ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2015. Том 22, № 3. С. 18–35

УДК 519.854 DOI: 10.17377/daio.2015.22.461

СРАВНЕНИЕ ТРЁХ ПОДХОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Э. Н. Гордеев[1]
[1]МГТУ им. Н. Э. Баумана,
2-я Бауманская ул., 5, 105005 Москва, Россия
e-mail: tatmigor@gmail.com

Аннотация. В 1970–80-х гг. в работах В. К. Леонтьева и Э. Н. Гордеева предложен и исследован подход к анализу устойчивости решений в работах В. К. Леонтьева и Э. Н. Гордеева. В ряде более поздних статей этот подход был развит и на его основе анализировалась устойчивость решений. Сам подход носит достаточно общий характер, но изначально связывался с задачами дискретной оптимизации. В дальнейшем похожие результаты, хотя и в иных терминах, публиковались для различных классов задач. В данной работе показана близость некоторых подходов как на уровне постановок задач, так и при интерпретации результатов. Библиогр. 18.

Ключевые слова: устойчивость решения, радиус устойчивости, псевдобулев полином, матроид, геометрическая конфигурация.

Введение

Пусть имеется задача Z, входные параметры которой $e_1, \ldots, e_m$ характеризуются наборами чисел. Под решением задачи понимается поиск некоторого объекта τ (или совокупности объектов) из конечного или бесконечного множества. Сам найденный объект также назовём решением задачи. Если множество чисел, которыми характеризуются входные параметры задачи Z, могут представляться точками метрического пространства, то на множестве задач может быть введена некоторая функция близости $r_{ij} = r(Z_i, Z_j)$. При определённых ограничениях на тип пространства и свойства нормы может оказаться, что объект, являющийся решением конкретной задачи, сохраняется в качестве решения и для всех задач из некоторой её ненулевой окрестности в метрическом пространстве. Подобное сохранение может интерпретироваться как

устойчивость решения, а несуществование такой ненулевой окрестности может рассматриваться как его неустойчивость. Количественную характеристику такой окрестности можно назвать «радиусом устойчивости».

1. Схемы постановок задач

Рассмотрим несколько постановок задач исследования устойчивости в следующих областях: комбинаторная оптимизация, вычислительная геометрия и исследование операций (для задач дискретной оптимизации эта схема предложена в [5, 6, 16, 17], а затем развита в последующих работах, например, в [8–10]). В простейшем виде схема выглядит так.

Пусть $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ — некоторое множество, $D_m = \{\tau_1, \ldots, \tau_q\}$, $q > 1$, — система подмножеств множества E, называемых *траекториями*. Элементам из E приписаны веса $w(e_1) = a_1, \ldots, w(e_m) = a_m$. Пусть вектор $A = (a_1, \ldots, a_m)$ берётся из $\mathbb{R}^m$. На каждой траектории определяется функционал $\tau(A)$ — длина траектории при взвешивании A. Например, линейный функционал $\tau(A) = \sum\limits_{e_i \in \tau} a_i$ или функционал задачи на узкие места $\tau(A) = \max\limits_{e_i \in \tau} a_i$.

Под задачей понимается тройка (E, D_m, A) с определённым на ней типом функционала. Пара (E, D_m) определяет «комбинаторику» задачи, поэтому если эта пара и функционал фиксированы, а варьируется лишь вектор $A = (a_1, \ldots, a_m)$ в $\mathbb{R}^m$ (конфигурационном пространстве), то получающуюся при этом индивидуальную задачу будем обозначать через Pr_A.

Решениями задачи (*оптимальными траекториями*) называются траектории, доставляющие экстремум (например, минимум) функционалу.

Множество номеров оптимальных траекторий задачи при взвешивании A обозначим через $\varphi(A)$, а длину оптимальной траектории — через $m(A)$. Через $S_\Delta(A)$ обозначим открытый шар в $\mathbb{R}^m$ с центром в A и радиуса Δ.

Пусть $R_0 = \{A \mid A \in \mathbb{R}^m,\ |\varphi(A)| = q\}$ и в пространстве $\mathbb{R}^m$ задана норма. Назовём задачу Pr_A *ε-устойчивой*, если $\varphi(A + B) \subseteq \varphi(A)$ для любого $B \in \mathbb{R}^m$, $\|B\| < \varepsilon$. Радиус устойчивости задачи Pr_A, $A \in R_0$, полагаем по определению равным нулю, в противном случае *радиусом устойчивости* назовём $\sup \varepsilon$, где $\sup$ берётся по всем ε, для которых Pr_A ε-устойчива.

Обозначим радиус устойчивости задачи Pr_A через $\rho(A)$. Таким образом, радиус устойчивости задаёт предел возмущений элементов весового вектора задачи Pr_A, при которых не расширяется множество оптимальных

ных решений. Вышеупомянутый вектор B будем называть *возмущающим* вектором или *возмущением*.

Для задач теории расписаний подход применён и развит в [1, 24].

Конечно, существует большое количество самых разных постановок задач в этой области и самых разных определений понятия устойчивости, причём данная тематика в последние годы привлекает всё большее внимание. Так, в задачах многокритериальной оптимизации большое количество работ принадлежит В. А. Емеличеву и его ученикам (см., например, [13, 14]). Отдельный подход основан на понятии устойчивости по функционалу. Здесь большой вклад принадлежит киевской школе И. В. Сергиенко, также этим занимаются А. А. Колоколов и его ученики (см., например, [12, 15]).

В [3] подробно изучаются дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. Если рассмотреть эти оптимизационные задачи с точки зрения устойчивости их решений, то алгоритмы и формулы для радиуса устойчивости достаточно просто получить на базе общего подхода из [11].

Приведём пример ещё одной схемы. Она возникает в задачах, возникающих в математических моделях прикладных проблем экономики и производства. Здесь также имеются исходная задача и набор её числовых параметров, осуществляется поиск объекта-решения и при этом исследуются возмущения входных параметров и их влияние на решение. Примерами являются работы [20, 21, 25]. Постановка из [20, 25] является частным случаем вышеприведённой схемы. В моделях используются известные оптимизационные задачи. Возмущается только часть параметров задачи, причём только в одну сторону: либо все увеличиваются, либо все уменьшаются. Поэтому и результаты либо автоматически следуют из результатов работ [5, 6, 8, 9, 16, 17], либо достаточно просто из них получаются, что покажем на примерах ниже.

Работа [21], на первый взгляд, в приведённую выше схему не укладывается. Здесь содержательная постановка включает «плату» за возмущение (изменение) параметров, поэтому отсутствует термин «устойчивость». Этот термин обычно интуитивно связан с борьбой с неточностями входных данных, т. е. издержками математической модели, а здесь — наоборот. В самой модели целенаправленно ищется возмущение определённого типа. Берётся известная задача дискретной оптимизации на максимум и находится её решение. Затем условие исходной задачи возмущается, но каждая единица нормы возмущающего вектора имеет определённую стоимость (бюджет). Необходимо в рамках фиксированного

бюджета получить из исходной задачи новую так, чтобы решение возмущённой задачи имело максимальный вес.

Дан взвешенный матроид M ранга R с m элементами и s базами. Кроме того, задано число B и вторые веса (стоимости) на элементах. Для элемента e стоимость $c(e)$ — «плата» за увеличение веса элемента на единицу. Веса элементов могут только увеличиваться.

Другими словами, в пространстве $\mathbb{R}^m$ векторов A задана метрика l_1, и элементы векторов могут возмущаться только в сторону увеличения. Но кроме весового вектора A задан ещё один весовой вектор c — плата за возмущение веса того или иного элемента матроида. Среди всех возмущённых задач таких, что суммарная плата $c(E)$ за увеличение весов элементов не превосходит B, требуется найти такую, длина оптимальной траектории которой максимальна. Эту проблему называют *задачей максимизации оптимума с фиксированным бюджетом.* Рассматриваемый выше подход на основе радиуса устойчивости сводится к данной задаче в случае, когда все $c(e) = 1$, а дальше всё зависит от метрики в пространстве $\mathbb{R}^m$. Предложенные в [21] алгоритмы решения далее интерпретированы в рамках исследования устойчивости решения.

В [5] рассматривались задачи на матроидах и пересечении матроидов для случая чебышёвской метрики в $\mathbb{R}^m$. В [9] рассматривали метрику l_1.

Нахождение радиуса устойчивости может напрямую быть использовано для решения задачи максимизации веса оптимального решения в рамках фиксированного бюджета. Заметим также, что предложенный алгоритм связан с задачей табулирования пространства шарами устойчивости. Проблема табулирования сразу возникает при анализе подхода к исследованию устойчивости. Хочется, решив одну задачу и найдя её радиус устойчивости, получить сразу решение континуума задач из шара устойчивости. К сожалению, возможности такого подхода весьма ограничены, что подробно исследовано в [17] и ряде последующих работ. Как будет показано, алгоритм из [21] может интерпретироваться как цепочка скачков из центра шара устойчивости на его границу, пересчёта решения и нового скачка.

Оказалось, что кроме задач дискретной оптимизации в описанную выше схему укладываются многие задачи вычислительной геометрии, а методика исследования устойчивости имеет содержательные и практически значимые последствия.

Примеры этого подхода можно найти в [2, 4, 7]. Допустимые решения задачи — геометрические объекты в некотором пространстве (пространство задачи). Эти объекты и будут траекториями $D_m = \{\tau_1, \ldots, \tau_q\}$,

$q > 1$. В индивидуальной задаче они описываются числовыми характеристиками через координаты точек $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ пространства задачи. Значения этих координат $A = (a_1, \ldots, a_m)$ могут подвергаться возмущению. Под решением задачи понимается объект с определёнными свойствами. Если можно ввести понятие эквивалентности объектов и некоторую норму в конфигурационном пространстве, то возникает аналог шара устойчивости, внутри которого решения задачи эквивалентны.

Сразу отметим, что геометрия исходного пространства самой задачи вычислительной геометрии и норма конфигурационного пространства независимы. Кроме того, здесь связь между траекториями и элементами $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ не прямая, а опосредованная структурой исходных данных.

2. Взаимосвязь постановок исследования устойчивости

Сначала рассмотрим задачу минимизации псевдобулева полинома [3] от переменных, принимающих значения 0 и 1, с рациональными коэффициентами

$$p(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\alpha \subset I} c_\alpha \prod_{i \in \alpha} y_i,$$

где $I = \{1, \ldots, m\}$, c_α — рациональные числа.

Так как минимизация идёт по точкам булева куба размерности m, в качестве элементов $D_m = \{\tau_1, \ldots, \tau_q\}$ (траекторий) берут все 2^m булевых векторов.

Полагаем по определению, что вес траектории τ равен $2^{|\tau|}$, где $|\tau|$ — вес Хэмминга булева вектора τ, которому соответствует эта траектория. Мощность пересечения двух траекторий τ_i и τ_j положим равной $2^{|\tau_i \cap \tau_j|}$, т. е. она определяется весом Хэмминга пересечения булевых векторов, соответствующим этим траекториям.

Пусть $A = (a_1, \ldots, a_s)$ — вектор, составленный из коэффициентов полинома ($s = 2^m$). Длина траектории $\tau_j(A)$ — это значение полинома на наборе переменных, который задаётся булевым вектором, соответствующим этой траектории.

Очевидно, что длина траектории — непрерывная функция от коэффициентов полинома. В пространстве $\mathbb{R}^s$ можно ввести норму. В [11] дано понятие «согласованности» нормы в этом пространстве со структурой множества $D_m = \{\tau_1, \ldots, \tau_q\}$. Легко показать, что в нашем случае условие согласованности выполняется для широкого класса норм, в частности, для любой нормы l_k, $k = 0, 1, \ldots, \infty$. Поэтому формулы и алгоритмы для радиуса устойчивости оптимизационной задачи минимизации

полиномов от булевых переменных легко получаются из результатов работ [11, 16].

Например, если хотим исследовать устойчивость при независимых возмущениях всех коэффициентов полинома, то получим следующую формулу для радиуса устойчивости:

$$\rho(A) = \max_{i \in \varphi(A)} \min_{j \notin \varphi(A)} \frac{\tau_i(A) - \tau_j(A)}{|\tau_i| + |\tau_j| - 2|\tau_i \cap \tau_j|}.$$

Здесь в знаменателе стоят веса траекторий и их пересечения, определённые выше, а в числителе — разность длин.

Рассмотрим соотношение двух постановок — проблему исследования устойчивости оптимизационой задачи на матроидах и упомянутую выше задачу максимизации функционала в рамках фиксированного бюджета.

Пусть пара $(E, D) = M$ является матроидом. Его ранг обозначим через R, а множество траекторий D_m — это множество всех баз матроида M. Входными параметрами задачи будем считать компоненты неотрицательного вектора A весов элементов матроида.

Размер максимального независимого подмножества множества S в матроиде M обозначим через $\mathrm{rank}(S, M)$. Кроме общего случая произвольного матроида рассматриваются несколько частных случаев: матроид трансверсалей, матроид расписаний и матроид разбиений. В теории оптимизации на матроидах принято задавать сложность решения задачи не только в зависимости от её размерности, но и от времени проверки принадлежности подмножества E множеству D_m. Ниже это время будет обозначаться через $\sigma(n)$ или просто через σ.

Итак, в пространстве $\mathbb{R}^m$ векторов A задана метрика l_1. Рассмотрим, как выглядят результаты работы [21] с точки зрения теории устойчивости и как с их использованием получаются формулы и алгоритмы для радиуса устойчивости. Приведём лишь общую схему, проясняющую связи между подходами. Детали доказательств лемм можно найти в [9].

Через T_A обозначим множество элементов M, входящих в оптимальные траектории. Совокупность элементов S_A назовём *протыкающим множеством* для $\varphi(A)$, если $\tau_j \cap S_A \neq \varnothing$ при любом $j \in \varphi(A)$. Через P_A обозначим совокупность всех протыкающих множеств для $\varphi(A)$.

В [11] доказано, что в случае метрики l_1 при отсутствии ограничений на возмущения весов рёбер $\sup \varepsilon$, упомянутый в определении радиуса устойчивости, достигается на некотором векторе B. Назовём его *вектором радиуса устойчивости* и обозначим через $B_{\rho(A)}$. Для неоптимальной траектории τ_j и вектора A определим число $r_j(A)$ как минимальную норму возмущающего вектора (возмущения) такого, что при возмущении A

на этот вектор (он, конечно, не единственный) длина траектории τ_j не будет превосходить длины любой оптимальной на A траектории.

Непосредственно из определения радиуса устойчивости и свойств метрики можно получить соотношение

$$\tau_j(A) - m(A) \leqslant r_j(A), \quad \rho(a) = \min_{j \notin \varphi(A)} r_j(A).$$

Упорядочив множество различных значений весов элементов M по возрастанию, получим последовательность из ν чисел $f_1, \dots, f_\nu$. Множество рёбер веса f_i назовём *i-м слоем.*

По аналогии с введённым в [20] определением *рангом протыкающего множества* S_A назовём число $R(S_A) = \min\limits_{j \in \varphi(A)} |S_A \cap \tau_j|$.

Протыкающее множество S_A^* такое, что $|S_A^*| = \min\limits_{S_A} \frac{|S_A|}{R(S_A)}$, где минимум берётся по всем протыкающим $\varphi(A)$ множествам, назовём *минимальным.*

Чтобы подчеркнуть, что именно является подмножеством элементов матроида, вместо $R(S_A)$ и S_A будем использовать обозначения $R(S_A, M)$ и (S_A, M).

Заметим, что в [21] описан метод нахождения минимального протыкающего множества. Назовём его ПРОЦЕДУРОЙ 1 (этот подход представляет собой модификацию полиномиального алгоритма из [23] для решения задачи нахождения базы вектора в многограннике матроида).

С её помощью в [8] строится ПРОЦЕДУРА 2, которая по минимальному протыкающему множеству S^* (одновременно с построением такого множества) получает оптимальную траекторию $\tau(S^*)$, имеющую с S^* ровно $R(S^*)$ общих рёбер.

Лемма 1. *Среди всех минимальных протыкающих множеств графа существуют множества, состоящие из рёбер одного слоя.*

Вначале хотим с помощью возмущения, содержащего только отрицательные элементы, сделать состоящую целиком из элементов T_A неоптимальную в A траекторию τ оптимальной в новой *возмущённой* задаче Pr_A, т. е. для фиксированной неоптимальной траектории τ требуется построить некоторое возмущение вектора A так, что все ненулевые элементы возмущающего вектора лежат в T_A и отрицательны. При этом в результате полученного возмущения длина траектории τ сравнялась с длиной хотя бы одной из оптимальных в A траекторий. Назовём такое возмущение *возмущением первого типа.* Нас интересует только построение минимального (по норме) возмущения с указанными свойствами.

Если для τ такое возмущение существует, то обозначим его норму через $\eta(\tau)$. В противном случае положим $\eta(\tau) = \infty$. Через $\eta(A)$ обозначим минимум $\eta(\tau)$ по всем неоптимальным траекториям, которые состоят из элементов T_A. Та неоптимальная траектория, при рассмотрении которой получен возмущающий вектор с нормой $\eta(A)$, будет называться *траекторией, на которой достигается* $\eta(A)$. Множество таких возмущающих векторов обозначим через V_A.

Процедура 3. Возьмём некоторую оптимальную траекторию τ^*. Сопоставим ей число $\gamma(\tau^*)$ следующим образом. Берём поочередно все элементы из τ^* и для каждого такого элемента s находим в T_A элемент минимальной длины $b(s)$ такой, что длина s меньше длины $b(s)$, а s и $b(s)$ входят в один цикл на множестве $\tau^* \cup b(s)$. Пусть $\lambda(s)$ — число элементов веса $b(s)$ в этом цикле. Ищем минимальную (по всем таким s) из величин $\lambda(s)(w(b(s)) - w(s))$, где $w(b(s))$ и $w(s)$ веса $b(s)$ и s. Пусть минимум достигается на некоторой паре $b(s^*)$ и s^*. Обозначим через τ'_s траекторию $\tau^* \cup b(s^*) \setminus s^*$. Если ни для какого элемента s рассматриваемой оптимальной траектории вышеупомянутого $b(s)$ не существует, то полагаем $\gamma(\tau^*) = \infty$, в противном случае $\gamma(\tau^*) = (\tau'_s(A) - m(A))\lambda(s)$.

Лемма 2. *Пусть τ^* — оптимальная траектория. Тогда $\gamma(\tau^*) = \eta(A)$.*

Пусть возмущающий вектор состоит только из положительных элементов множества T_A, т. е. хотим только за счёт увеличения элементов вектора A сделать некоторую неоптимальную в Pr_A траекторию τ оптимальной в новой «возмущённой» задаче Pr_A. Назовём такое возмущение *возмущением второго типа.* Минимальную норму такого возмущения обозначим через $\Delta(A)$. Назовём процедуру вычисления $\Delta(A)$ процедурой 4.

Лемма 3. *$\Delta(A)$ может быть найдено*

(i) *для произвольного матроида за время $O(m^4\mathbb{R}^2 + m^3R^4\sigma)$;*

(ii) *для матроида трансверсалей за время $O(R(m+R^2)n\log(2+m^2/n))$, где n — число рёбер в двудольном графе этого матроида;*

(iii) *для матроида расписаний за время $O(R^2(m + R^2))$;*

(iv) *для матроида разбиений за время $O(m \log m)$.*

Подробнее остановимся на том, что нахождение параметра $\Delta(A)$ может быть осуществлено с помощью методов, изложенных в [21], где дан взвешенный матроид M ранга R с m элементами и s базами. Кроме того, задано число B и вторые веса (стоимости) на элементах. Для элемента e стоимость $c(e)$ — это «плата» за увеличение веса элемента на единицу. Веса элементов могут только увеличиваться.

Подход на основе радиуса устойчивости сводится к данной задаче в случае, когда все $c(e) = 1$. Предложенные в [20] алгоритмы решения могут быть интерпретированы следующим образом.

Шаг работы алгоритма. Начинаем с вычисления радиуса устойчивости $\rho(A)$. После нахождения радиуса устойчивости получаем вектор $B_{\rho(A)}$. В результате возмущения на этот вектор строим новый вектор весов A'. При этом знаем, все ли траектории имеют в новой задаче одинаковую длину. В [5] (а также в [21]) показано, что после каждого шага количество слоёв в возмущённой задаче уменьшается по крайней мере на единицу по сравнению с исходной задачей. При этом достаточно рассмотреть возмущение элементов одного слоя!

Если в возмущённой задаче все траектории имеют одинаковую длину, то процесс заканчивается. В противном случае после нахождения радиуса устойчивости сравниваем его с B. Если он меньше, то берём возмущённую задачу Pr_A и ищем её радиус устойчивости. И так до тех пор, пока либо получим задачу с бесконечным радиусом устойчивости (в ней веса всех рёбер одинаковы), либо сумма всех этих радиусов не станет равной (или превзойдёт) B.

Нахождение $\Delta(A)$ осуществляется по аналогии с описанным в [25] алгоритмом для кратчайшего остовного дерева с той лишь разницей, что базовым алгоритмом для нахождения минимального протыкающего множества является не процедура из [18] для нахождения «прочности» (strength) графа, а алгоритм из [23]. Как доказано в [19], этот алгоритм за время $O\big(m_i^4 + m_i^3 R_i^2 \sigma\big)$ решает задачу минимизации $\min\{(C(T)/\lambda + \mathrm{rank}(E_i - T, M_i)) \mid T \subseteq E_i\}$ (для фиксированного λ).

Применяя R_i раз этот алгоритм (для R_i специальным образом выбранных значений λ), можно найти минимальное протыкающее множество соответствующего невзвешенного субматроида M_i, т. е. трудоёмкость процедуры $O\big(m_i^4 R_i + m_i^3 R_i^3 \sigma\big)$.

Так как можно рассматривать только возмущения элементов одного слоя, с помощью процедуры, трудоёмкость которой не превосходит $O(m^2\sigma)$, можно найти для данного протыкающего множества норму возмущения минимального веса, которое приведёт к появлению новых оптимальных траекторий.

Всего в оптимальной траектории слоёв не более R, т. е. упомянутых субматроидов нужно просмотреть не более R. Из найденных возмущений минимальное по норме и даст λ. Отсюда получаем, что общее время нахождения λ составит $O(m^4R^2 + m^3R^4\sigma)$.

Для матроида трансверсалей может быть использован более эконом-

ный алгоритм решения параметрической задачи о максимальном потоке, например, из [22]. Этот алгоритм решает упомянутую выше задачу минимизации и находит для данного протыкающего множества норму возмущения минимального веса, которое приведёт к появлению новых оптимальных траекторий. Время работы $O((m + R^2)n \log(2 + m^2/n))$, где n — число рёбер в двудольном графе этого матроида.

Та же схема работает на матроидах расписаний и на матроидах разбиений.

Заметим, что для решения задачи с фиксированным бюджетом в рассмотренных трёх случаях нужно в m раз больше времени, так как шагов упомянутого выше алгоритма (вычисление радиуса устойчивости — это фрагмент одного шага) не более m.

Процедура 5. Для каждого элемента h из $E \setminus T_A$ найдём траекторию минимальной длины τ_h, обязательно содержащую этот элемент (это, конечно, неоптимальная траектория).

Минимум величины $\tau_h(A) - m(A)$ по всем h из $E \setminus T_A$ обозначим через $\omega(A)$. Если множество $E \setminus T_A$ пусто, то полагаем $\omega(A) = \infty$.

Назовём уменьшение некоторого элемента из $E \setminus T_A$ *возмущением третьего типа.*

Лемма 4. *Для любого вектора радиуса устойчивости $B_{\rho(A)}$ найдётся вектор радиуса устойчивости $v_{\rho(A)} \in V_A$ такой, что $\|B_{\rho(A)}\| = \|v_{\rho(A)}\|$, и имеющий следующую структуру:*

(i) *либо содержит одну отрицательную компоненту на месте элемента из множества $E \setminus T_A$, остальные компоненты нулевые*;

(ii) *либо содержит $|Z|$ ненулевых одинаковых компонент на месте элементов из T_A, принадлежащих некоторой неоптимальной траектории τ, остальные компоненты нулевые: $|\tau \cap Z| > \max\limits_{i \in \varphi(A)} |\tau_i \cap Z|$*;

(iii) *либо содержит $|S^*|$ ненулевых одинаковых компонент на месте элементов из минимального протыкающего множества, состоящего из элементов одного слоя, остальные компоненты нулевые.*

Теорема 1. *Радиус устойчивости в оптимизационной задаче на матроиде в пространстве с нормой l_1 задаётся формулой*

$$\rho(A) = \min\{\gamma(A), \Delta(A), \omega(A)\}$$

и может быть вычислен за время

(i) $O(m^4R^2 + m^3R^4\sigma)$ *для произвольного матроида*;

(ii) $O(R(m+R^2)n \log(2+m^2/n))$ *для матроида трансверсалей, где n — число рёбер в двудольном графе этого матроида*;

(iii) $O(R^2(m+R^2))$ *для матроида расписаний*;

(iv) $O(m \log m)$ *для матроида разбиений*.

Теперь рассмотрим связь постановок исследования устойчивости в задачах вычислительной геометрии с постановками из [1, 8–10, 20, 24, 25].

Подход к исследованию устойчивости в задачах вычислительной геометрии предложен и описан в [7]. В [2] он детализирован и применён для широкого класса задач вычислительной геометрии в евклидовом пространстве. Однако [2] носит чисто прикладной характер, что позволило продемонстрировать эффективность и полезность теории устойчивости, но ввиду конкретности целей применения не позволило оценить возможности развитых в рамках теории устойчивости положений и результатов.

В то же время в [4] рассмотрена конкретная классическая задача вычислительной геометрии — задача построения диаграммы Вороного, которая изучалась и изучается в самых разных аспектах и для которой получено множество интересных и важных в рамках всей области исследований задач вычислительной геометрии результатов. Здесь проблема устойчивости рассмотрена достаточно полно.

Формулы для радиуса устойчивости решений в задачах вычислительной геометрии строятся на основе параметров геометрических объектов, поэтому они характеризуются описанием алгоритмов, конструирующих эти объекты, и сложностью этих алгоритмов. Именно в таком ключе представлены результаты, например, в [2, 4, 7].

Для наших целей удобно представить задачу вычислительной геометрии в следующем виде.

Пусть $L = l_1, \ldots, l_n$ — множество точек векторного пространства $\mathbb{R}^d$, $S_n = s_1, \ldots, s_m,\ m > 0$, — система подмножеств множества L, $F[S_n] = \{f_1, \ldots, f_N\}$ — множество (геометрических объектов), элементы которого задаются конечными последовательностями (возможно с повторениями) точек из L. В общем виде d — размерность пространства $\mathbb{R}^d$. Тогда l_i — вектор в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Далее возникает уточнение постановки для различных классов задач. В [2] рассматривается класс задач, в которых определена цена $w(F[S_n])$ каждого из геометрических объектов и необходимо оптимизировать эту цену. Подробно рассмотрены три задачи: задача построения графа видимости, задача о кратчайшем пути между точками на евклидовой плоскости и задача построения диаграммы Вороного для точек на евклидовой плоскости.

По аналогии с приведёнными выше рассмотрениями можно показать, как формулы (3) и (4) из [2, с. 91] получаются из результатов

работ [8, 11, 17]. Проиллюстрируем эту связь на примере классической задачи вычислительной геометрии — построения диаграммы Вороного.

Задача построения диаграммы Вороного (ДВ) состоит в нахождении для заданного конечного набора точек (терминалов) $p_1, \ldots, p_n$ в d-мерном метрическом пространстве U^d (пространстве задачи) областей близости $P_1, \ldots, P_n$, $P_i \subset U^d$, т. е. множеств таких, что расстояние от любой точки t из области P_i до точки p_i не превосходит расстояния от t до p_j, $j \neq i$. (В общем виде задача рассмотрена в [23] и там на U^d задана положительно определённая дистанционная функция $\operatorname{dist}(\cdot)$ и её лебеговы множества компактны, телесны, звёздны относительно начала координат и имеют липшицеву границу.)

Заметим, в частности, что на плоскости для любой метрики l_q, $q = 1, \ldots, \infty$, задача решается за время $O(n \log n)$.

Обозначим ДВ конфигурации терминальных точек $P = (p_1, \ldots, p_n)$ через $D(P)$. Рассмотрим гиперграф H(P), вершинами которого являются области близости $P_1, \ldots, P_n$, а рёбрами — семейства областей близости, пересечение которых непусто, а также пустое множество. Тем самым гиперграф пересечений H(P) — это гиперграф пересечений семейства множеств, который является по определению симплициальным комплексом.

Определение 1. Диаграммы Вороного, которым соответствуют одинаковые комплексы, называются *эквивалентными*.

Пусть близость конфигураций в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^{dn}$ задаётся некоторой нормой. В общем случае эта норма никак не связана с дистанционной функцией в исходном пространстве.

Определение 2. ДВ конфигурации терминалов называется *устойчивой*, если эквивалентны ДВ всех конфигураций в некоторой окрестности конфигурации P в конфигурационном пространстве. ДВ, которая не является устойчивой, называется *неустойчивой*.

Считается, что устойчивой диаграмме соответствует устойчивая конфигурация (устойчивое множество терминалов P), а неустойчивой диаграмме — неустойчивая.

Определение 3. *Радиусом устойчивости ДВ конфигурации* называется точная нижняя грань расстояний в конфигурационном пространстве от конфигурации P до неустойчивых конфигураций.

Таким образом, радиус устойчивости неустойчивой диаграммы равен нулю. В [4] получено решение в общем случае, в [2, 10] среди других задач вычислительной геометрии рассмотрен случай ДВ на плоскости. В качестве примера приведём этот простой результат (аналогичное рассмотре-

ние легко провести для любой фиксированной метрики l_q, $q = 1, \ldots, \infty$).

Координаты терминальной точки p_i будем обозначать через x_i, y_i. Расстояния в конфигурационном пространстве измеряются в норме l_∞. Пусть $n > 2$. Будем обозначать расстояние в абсолютной норме от точки a до множества M плоскости через $\rho_\infty(a, M)$.

Рассмотрим тройку точек $t = \{a_1, a_2, a_3\}$ и множество прямых L на плоскости. Через $\delta(t)$ обозначим

$$\delta(t) = \inf_{l \in L} \max_{i=1,2,3} \rho_\infty(a_i, l).$$

Через $\delta(P)$ обозначим $\min \delta(t_i)$, где минимум берётся по всем тройкам t_i терминалов таким, что в ДВ есть вершина, равноудалённая от них.

Рассмотрим теперь неограниченную область Дирихле D_k. Среди рёбер её границы имеются ровно два неограниченных. Если они параллельны, то полагаем $\beta(D_k) = 0$. В противном случае эти рёбра лежат на границах D_k с областями D_u и D_v, тогда $\beta(D_k) = \delta(t(k, u, v))$, где $t(k, u, v)$ — конфигурация из трёх точек p_k, p_u, p_v, а через $\beta(P)$ обозначим минимум $\beta(D_k)$ по всем неограниченным областям ДВ.

Сопоставим теперь ДВ помеченный граф $G(V, E)$, вершинами которого являются вершины диаграммы и точка ∞, а рёбра соответствуют либо конечным рёбрам диаграммы, либо бесконечным рёбрам, помеченным номерами областей Дирихле, которые они разделяют. Назовём *флип-рёбрами* конечные рёбра ДВ такие, что в графе G вершины, им инцидентные, имеют степень 3. Каждой такой вершине отвечает тройка терминалов, а флип-ребру — некая четвёрка терминалов, являющаяся объединением двух соответствующих троек. Рассмотрим четвёрку точек $s = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ и множество окружностей F на плоскости. Пусть $\pi(s) = \inf\limits_{f \in F} \max\limits_{i=1,2,3,4} \rho_\infty(a_i, f)$.

Через $\pi(P)$ обозначим $\min \pi(s_i)$, где минимум берётся по всем четвёркам терминалов, соответствующим флип-рёбрам. Если множество флип-рёбер пусто, то полагаем $\pi(P) = \infty$.

Кроме того, обозначим через $J(P)$ множество бесконечных областей Дирихле, имеющих граничные параллельные бесконечные рёбра. Следующие две теоремы полностью описывают ситуацию исследования устойчивости в рассматриваемом случае.

Теорема 2. *ДВ неустойчива тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(i) *существует вершина $v \in V$ степени более* 3;

(ii) *множество $J(P)$ непусто.*

Итак, если задача неустойчива, то радиус устойчивости равен нулю. Для устойчивой задачи следующее утверждение даёт формулу вычисления радиуса устойчивости.

Теорема 3. *Пусть* $l(P) = \min(\delta(P), \beta(P), \pi(P))$. *Тогда* $r(P) = l(P)$.

Заметим, что проверка устойчивости задачи и нахождение радиуса устойчивости могут быть осуществлены за линейное по числу терминалов время.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алюшкевич В. Б., Сотсков Ю. Н.** Устойчивость в задачах календарного планирования // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. науки. 1989. № 3. С. 102–107.
2. **Артеменко В. И., Гордеев Э. Н., Журавлев Ю. И. и др.** Метод формирования оптимальных программных траекторий робота-манипулятора // Кибернетика и систем. анализ. 1996. № 5. С. 82–104.
3. **Береснев В. Л.** Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2005. 408 с.
4. **Вялый М. Н., Гордеев Э. Н., Тарасов С. П.** Об устойчивости диаграммы Вороного // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 3. С. 147–158.
5. **Гордеев Э. Н.** Алгоритмы полиномиальной сложности для вычисления радиуса устойчивости в двух классах траекторных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 7. С. 984–992.
6. **Гордеев Э. Н.** Устойчивость решений в задаче о кратчайшем пути на графе // Дискрет. математика. 1989. Т. 1, № 3. С. 39–46.
7. **Гордеев Э. Н.** Об устойчивости решений в задачах вычислительной геометрии // Тез. докл. междунар. науч. конф. «Интеллектуальная обработка информации». Симферополь: Крым. Акад. Наук, 1996. С. 8.
8. **Гордеев Э. Н.** Исследование устойчивости задачи о кратчайшем остове в метрике l_1 // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, № 5. С. 770–778.
9. **Гордеев Э. Н.** Исследование устойчивости в оптимизационных задачах на матроидах в метрике l_1 // Кибернетика и систем. анализ. 2001. № 2. С. 132–144.
10. **Гордеев Э.Н.** Использование радиуса устойчивости оптимизационных задач для скрытия и проверки корректности информации // Инженерный журн.: наука и инновации. 2013. № 11. С. 14–19.
11. **Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К.** Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 1. С. 66–72.

12. **Девятерикова М. В., Колоколов А. А., Косарев Н. А.** Анализ устойчивости по целевой функции некоторых алгоритмов целочисленного программирования // Изв. вузов. Математика. 2011. № 4. С. 47–53.
13. **Емеличев В. А., Коротков В. В.** О радиусе устойчивости векторной квадратичной булевой задачи на узкие места // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 6. С. 3–16.
14. **Емеличев В. А., Коротков В. В.** Анализ устойчивости парето-оптимального портфеля многокритериальной инвестиционной задачи с минимаксными критериями Вальда // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 6. С. 23–36.
15. **Колоколов А. А., Девятерикова М. В.** Анализ устойчивости L-разбиения множеств в конечномерном пространстве // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7, № 2. С. 47–53.
16. **Леонтьев В. К.** Устойчивость в линейных дискретных задачах // Пробл. кибернетики. 1979. Вып. 35. С. 169–185.
17. **Леонтьев В. К., Гордеев Э. Н.** Качественное исследование траекторных задач // Кибернетика. 1986. № 5. С. 82–90.
18. **Cheng E., Cunningham W. H.** A faster algorithm for computing the strength of a network // Inf. Process. Lett. 1994. Vol. 49. P. 209–212.
19. **Cunningham W. H.** Testing membership in matroid polyhedra // J. Comb. Theory. Ser. B. 1984. Vol. 36. P. 161–188.
20. **Fredericson G. N., Solis-Oba R.** Increasing the weight of minimum spanning trees // Proc. 7th Ann. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms. Philadelphia, PA: SIAM, 1996. P. 539–546.
21. **Fredericson G. N., Solis-Oba R.** Efficient algorithms for robustness in matroid optimization // Proc. 8th Ann. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms. Philadelphia, PA: SIAM, 1997. P. 659–668.
22. **Gallo G., Grigoriadis M. D., Tarjan R. E.** A fast parametric maximum flow algorithm and application // SIAM J. Comput. 1989. Vol. 18, No. 1. P. 30–55.
23. **Narayanan H.** A rounding technique for the polymatroid problem // Linear Algebra Appl. 1995. Vol. 221. P. 41–57.
24. **Sotskov Yu. N., Leont'ev V. K., Gordeev E. N.** Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. 1985. Vol. 58. P. 169–190.
25. **Tarjan R. E.** Sensitivity analysis of minimum spanning trees and shortest paths trees // Inf. Process. Lett. 1982. Vol. 14, No. 1. P. 30–33.

Гордеев Эдуард Николаевич

Статья поступила
10 сентября 2014 г.

Исправленный вариант —
9 февраля 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
May–June 2015. Volume 22, No. 3. P. 18–35

UDC 519.854 DOI: 10.17377/daio.2015.22.461

COMPARISON OF THREE APPROACHES TO STUDING STABILITY OF SOLUTIONS TO DISCRETE OPTIMIZATION AND COMPUTATIONAL GEOMETRY PROBLEMS

E. N. Gordeev[1]
[1]Bauman Moscow State Technical University,
5 2nd Bauman St., 105005 Moscow, Russia
e-mail: tatmigor@gmail.com

Abstract. In the 1970–1980s an approach to the analysis of the stability of solutions was proposed and studied. The approach is universal, but originally was used in discrete optimization problems. Later similar results, albeit in different terms, were published for various classes of problems. We show that both the statements of problems and the interpretation of results are close. Bibliogr. 25.

Keywords: stability of the solution, stability radius, Boolean polynomial, matroid, geometric configuration.

REFERENCES

1. **V. B. Alyushkevich** and **Yu. N. Sotskov,** Stability in problems of scheduling, *Izv. Akad. Nauk BSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauki,* No. 3, 102–107, 1989.
2. **V. I. Artemenko, E. N. Gordeev, Yu. I. Zhuravlev et al.,** Construction of optimal programmed paths for the motion of a robotic manipulator, *Kibern. Sist. Anal.,* No. 5, 82–104, 1996. Translated in *Cybern. Syst. Anal.,* **32**, No. 5, 672–687, 1996.
3. **V. L. Beresnev,** *Diskretnye zadachi razmeshcheniya i polinomy ot bulevykh peremennykh* (Location Discrete Problems and Polynomials of Boolean Variables), Inst. Mat. SO RAN, Novosibirsk, 2005.
4. **M. N. Vyalyi, E. N. Gordeev,** and **S. P. Tarasov,** On the stability of the Voronoi diagram, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **36**, No. 3, 147–158, 1996. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.,* **36**, No. 3, 405–414, 1996.
5. **E. N. Gordeev,** Algorithms of polynomial complexity for computing the radius of stability in two classes of trajectory problems, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **27**, No. 7, 984–992, 1987. Translated in *USSR Comput. Math. Math. Phys.,* **27**, No. 4, 14–20, 1987.

6. **E. N. Gordeev,** Stability of the solution in the problem of the shortest way on a graph, *Diskretn. Mat.,* **1**, No. 3, 39–46, 1989.

7. **E. N. Gordeev,** On solution stability in problems of computational geometry, in *Tezisy dokladov Mezhdunarodnoi konf. "Intellektualizatsiya obrabotki informatsii"* (Abstracts of Int. Conf. "Intellectualization of Information Processing"), *Alushta, Ukraine, June 3–7, 1996,* p. 8, Krym. Akad. Nauk, Simferopol, 1996.

8. **E. N. Gordeev,** Stability analysis of the minimum spanning tree problem in the metric l_1, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **39**, No. 5, 770–778, 1999. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.,* **39**, No. 5, 738–746, 1999.

9. **E. N. Gordeev,** Stability analysis in optimization problems on matroids in the metric l_1, *Kibern. Sist. Anal.,* No. 2, 132–144, 2001. Translated in *Cybern. Syst. Anal.,* **37**, No. 2, 251–259, 2001.

10. **E. N. Gordeev,** Using the stability radius of optimization problems to hiding and validation of information, *Inzhenernyi Zh.: Nauka i Innovatsii*, No. 11, 14–19, 2013.

11. **E. N. Gordeev** and **V. K. Leont'ev,** A general approach to the study of the stability of solutions in discrete optimization problems, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **36**, No. 1, 66–72, 1996. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.,* **36**, No. 1, 53–58, 1996.

12. **M. V. Devyaterikova,** **A. A. Kolokolov,** and **N. A. Kosarev,** The analysis of the stability of some integer programming algorithms with respect to the objective function, *Izv. VUZ., Mat.,* No. 4, 23–32, 2011. Translated in *Russ. Math. (Izv. VUZ),* **55**, No. 4, 18–25, 2011.

13. **V. A. Emelichev** and **V. V. Korotkov,** On the stability radius of an effective solution of the vector quadratic Boolean bottleneck problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **18**, No. 6, 3–16, 2011.

14. **V. A. Emelichev** and **V. V. Korotkov,** Stability analysis of a Pareto-optimal portfolio of the multicriteria investment problem with Wald maximin criteria, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **19**, No. 6, 23–36, 2012.

15. **A. A. Kolokolov** and **M. V. Devyaterikova,** Stability analysis for L-partitions in a finite-dimensional space, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **7**, No. 2, 47–53, 2000.

16. **V. K. Leont'ev,** Stability in linear discrete problems, in S. V. Yablonskii, ed., *Problemy kibernetiki* (Problems of Cybernetics), Vol. 35, pp. 169–185, Nauka, Moscow, 1979.

17. **V. K. Leont'ev** and **E. N. Gordeev,** Qualitative analysis of trajectory problems, *Kibernetika,* No. 5, 82–90, 1986.

18. **E. Cheng** and **W. H. Cunningham,** A faster algorithm for computing the strength of a network, *Inf. Process. Lett.,* **49**, No. 4, 209–212, 1994.

19. **W. H. Cunningham,** Testing membership in matroid polyhedra, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **36**, 161–188, 1984.

20. **G. N. Fredericson** and **R. Solis-Oba,** Increasing the weight of minimum

spanning trees, in *Proc. 7th Ann. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, Atlanta, GA, USA, Jan. 28–30, 1996*, pp. 539–546, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1996.

21. **G. N. Fredericson** and **R. Solis-Oba,** Efficient algorithms for robustness in matroid optimization, in *Proc. 8th Ann. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, New Orleans, LA, USA, Jan. 4–7, 1997*, pp. 659–668, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1997.
22. **G. Gallo, M. D. Grigoriadis,** and **R. E. Tarjan,** A fast parametric maximum flow algorithm and application, *SIAM J. Comput.,* **18**, No. 1, 30–55, 1989.
23. **H. Narayanan,** A rounding technique for the polymatroid problem, *Linear Algebra Appl.,* **221**, 41–57, 1995.
24. **Yu. N. Sotskov, V. K. Leont'ev,** and **E. N. Gordeev,** Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization, *Discrete Appl. Math.,* **58**, 169–190, 1985.
25. **R. E. Tarjan,** Sensitivity analysis of minimum spanning trees and shortest paths trees, *Inf. Process. Lett.,* **14**, No. 1, 30–33, 1982.

Eduard N. Gordeev

Received
10 September 2014

Revised
9 February 2015