ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2015. Том 22, № 3. С. 75–97

УДК 519.714.7 DOI: 10.17377/daio.2015.22.471

О ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО МНОЖЕСТВА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ *)

И. П. Чухров[1]
[1]Институт автоматизации проектирования РАН,
ул. 2-я Брестская, 19/18, 123056 Москва, Россия
e-mail: chip@icad.org.ru

Аннотация. Исследуется множество булевых функций, которые состоят из одной связной компоненты, имеют минимальные комплексы граней, не являющиеся кратчайшими, и не удовлетворяют достаточным условиям минимальности, основанным на понятии независимого множества вершин. При минимизации функций, обладающих указанными свойствами, неприменимы такие эффективные методы, как независимая минимизация для компонент связности и выполнимость достаточных условий минимальности. Для этого множества функций получены нижние оценки мощности и максимального числа комплексов граней, минимальных относительно аддитивных мер линейной и полиномиальной сложности. Ил. 1, библиогр. 8.

Ключевые слова: булева функция, единичный куб, грань, комплекс граней, аддитивная мера сложности, кратчайший комплекс граней, минимальный комплекс граней.

Введение

Задача минимизации булевых функций в геометрической интерпретации связана с представлением булевой функции подмножеством вершин n-мерного единичного куба и нахождением минимального покрытия комплексом граней единичного куба этого подмножества, т. е. является разновидностью задачи о покрытии множества. В аналитической интерпретации эквивалентными понятиями для граней и комплексов граней являются соответственно импликанта и дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) булевой функции, зависящие от n переменных.

В общем виде задача о покрытии множества семейством подмножеств формулируется в матричной форме, т. е. в виде задачи о покрытии строк

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13–01–00958–а).

$(0,1)$-матрицы, представляющих элементы множества, столбцами, представляющими допустимые подмножества элементов множества, которым приписан определённый вес.

В обзорных статьях [3, 4] изложены различные алгоритмические вопросы, связанные с точным и приближённым решениями задачи о покрытии, которые характерны для многих трудных дискретных оптимизационных задач. Практически всегда в таких задачах удаётся построить примеры неудачной применимости конкретной эвристики: для приближённых алгоритмов с большой ошибкой или для точных алгоритмов с большой трудоёмкостью, близкой к полному перебору всех возможных вариантов. Для построения минимальных покрытий из точных алгоритмов решения, как правило, используются переборные алгоритмы, относящиеся к методам ветвей и границ. Однако если подавляющее большинство допустимых покрытий близко к минимальному, то трудно надеяться отсечь многие из них, если нет достаточных условий минимальности.

Подход к минимизации булевых функций как к задаче о покрытии связан с известными трудностями: представление задачи в матричной форме может приводить к матрицам значительной размерности, определяемой длиной сокращённой ДНФ булевой функции. Как следствие, предлагаемые методы нацелены на кратное увеличение быстродействия алгоритмов для повышения размерности практически решаемых задач [8]. При условии применимости в решении конкретной задачи к таким обоснованным методам сокращения трудоёмкости алгоритмов относятся независимая минимизация для компонент связности и методы вычисления нижних границ, которые эффективно вычисляются и достижимы, т. е. обеспечивают достаточные условия минимальности, и др.

С одной стороны, применение таких методов при решении тестовых задач показывает возможность многократного сокращения временных затрат [7]. С другой стороны, актуальным становится исследование булевых функций, к которым такие методы не применимы. Отметим, что для локальных алгоритмов конечного индекса показана их неприменимость при минимизации плотных булевых функций [1; 2, с. 128].

При изложении используем следующие понятия и обозначения для единичного куба B^n и множества булевых функций n переменных P_n, которые можно найти в [2, 6].

Гранью единичного куба B^n называется множество вершин

$$B^{n,\alpha_1,\ldots,\alpha_k}_{i_1,\ldots,i_k} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in B^n \mid x_{i_1} = \alpha_1, \ldots, x_{i_k} = \alpha_k\},$$

где $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$ и $\alpha_s \in \{0,1\}$ для $s = 1,\ldots,k$. Множество индексов $\{i_1,\ldots,i_k\}$ называется *направлением* грани. *Рангом* и *размерностью*

грани называются числа k и $n-k$ соответственно.

Множество всех различных граней и различных граней ранга r единичного куба B^n обозначим через $\mathcal{I}^n$ и $\mathcal{I}^n_r$ соответственно.

Подмножество граней $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}^n$ такое, что $I_0 \subseteq \bigcap\limits_{I \in \mathcal{I}} I \neq \varnothing$, называется *пучком граней*, содержащим грань I_0 (содержащим вершину $\widetilde{\alpha} \in I_0$).

Комплекс граней $M = \{I_j \in \mathcal{I}^n,\ j = 1, \ldots, l\}$ содержит множество вершин $N_M = \bigcup\limits_{j=1}^{l} I_j \subseteq B^n$ и называется *комплексом граней функции* $f \in P_n$, если множество N_M совпадает с множеством N_f, т. е. с *множеством единичных вершин функции* f в кубе B^n.

Любая грань, содержащаяся в множестве N_f, называется *допустимой* гранью булевой функции f. Допустимая грань I функции f называется *максимальной*, если не существует грани $I' \neq I$ такой, что $I \subset I' \subseteq N_f$.

Два комплекса граней называются *эквивалентными*, если они являются комплексами граней одной функции.

Комплекс граней называется *неприводимым*, если после удаления из него любой грани получается не эквивалентный комплекс граней, т. е. соответствующий другой функции. В неприводимом комплексе каждая грань содержит хотя бы одну вершину, которая не содержится в других гранях комплекса. Такая вершина называется *собственной вершиной грани* в неприводимом комплексе.

Комплекс граней M называется *тупиковым*, если он является неприводимым и все грани максимальны для множества N_M.

Максимальная грань булевой функции называется *ядровой*, если существует вершина, не принадлежащая никакой другой максимальной грани функции. Вершины ядровой грани, которые не содержатся в других максимальных гранях функции, называются *собственными* вершинами ядровой грани.

Подмножество вершин $X \subseteq N_f$ называется *интервально независимым множеством вершин функции* f, если любая допустимая грань функции содержит не более одной вершины подмножества X.

Функционал, определённый на множестве всех комплексов граней (ДНФ), является мерой сложности, если он удовлетворяет аксиомам неотрицательности, монотонности относительно умножения, выпуклости относительно сложения и инвариантности относительно изоморфизма [6].

Комплекс граней называется *$\mathcal{L}$-минимальным*, если он имеет наименьшую меру сложности $\mathcal{L}$ среди всех эквивалентных комплексов гра-

ней, т. е. среди комплексов граней одной функции. Сложность $\mathcal{L}$-минимального комплекса граней булевой функции f называется *$\mathcal{L}$-сложностью функции* f и обозначается через $\mathcal{L}(f)$.

Мера сложности называется *аддитивной*, если сложность любого комплекса граней равна сумме сложностей граней. Для аддитивной меры сложности минимальные комплексы граней различных компонент связности булевой функции обладают *свойством суммируемости*, т. е. при объединении минимальных комплексов граней для компонент связности функции получается минимальный комплекс граней функции [6, с. 80].

Мера сложности, равная числу граней в комплексе M, называется *длиной* и обозначается через $l(M)$. Мера сложности, равная сумме рангов граней в комплексе M, называется *сложностью* и обозначается через $L(M)$. Очевидно, что эти меры сложности аддитивны. Комплекс граней, который имеет минимальное число граней или минимальную сумму рангов граней среди всех эквивалентных комплексов, называется *кратчайшим* или *минимальным* соответственно. Аддитивными являются также меры сложности L_0 — число направлений, равных 0, и L_1 — число направлений, равных 1, в гранях комплекса, т. е. число переменных в ДНФ с отрицанием и без отрицания соответственно.

Символ x^α для булевых переменных x и α обозначает $\overline{x}$ для $\alpha = 0$ и x для $\alpha = 1$, $x^\alpha = 1$ при $x = \alpha$ и $x^\alpha = 0$ при $x = \overline{\alpha}$.

Вектор булевых переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ и булеву функцию, которая зависит от этих переменных, обозначим через $\widetilde{x}^n$ и $f(\widetilde{x}^n)$ соответственно. Векторы булевых переменных $(x_{s+1}, \ldots, x_{s+k})$ и булевых значений $(\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_{s+k})$, где $1 \leqslant s+1 \leqslant s+k \leqslant n$, обозначим через $\widetilde{x}_{s+1,s+k}$ и $\widetilde{\alpha}_{s+1,s+k}$.

Целую часть и верхнюю целую часть числа x будем обозначать через $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ соответственно. Под $\log$ всюду понимается логарифм по основанию 2.

Далее $o(1)$ всюду означает величину, стремящуюся при $n \to \infty$ к нулю, а $\Theta(\varphi(n))$ для функции $\varphi(n) > 0$ всюду означает произвольную функцию $\psi(n) > 0$, для которой существуют такие константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что $c_1\varphi(n) \leqslant \psi(n) \leqslant c_2\varphi(n)$ при $n \to \infty$.

Для единичного куба B^n и целых i, k, удовлетворяющих условию $0 \leqslant i \leqslant i+k \leqslant n$, введём следующие обозначения:

B_i^n — слой с номером i, т. е. множество вершин $\widetilde{x}$ таких, что $\|\widetilde{x}\| = i$;

$S_{i,i+k}^n$ — пояс, т. е. множество вершин слоёв с номерами $i, \ldots, i+k$;

$\mathcal{I}_{i,i+k}^n$ — множество граней размерности k, которые содержатся в поясе $S_{i,i+k}^n$ единичного куба B^n (минимальная и максимальная вершины

таких граней содержатся в слоях B_i^n и B_{i+k}^n соответственно);

$\mathcal{L}_{i,i+k}^n$ — $\mathcal{L}$-сложность грани из множества $\mathcal{I}_{i,i+k}^n$. Такие грани изоморфны и имеют одинаковую сложность для любой меры в силу аксиомы инвариантности относительно изоморфизма.

Множество $\left\{\mathcal{I}_{i,i+n-r}^n\right\}_{i=0}^r$ содержит все изоморфные подмножества граней ранга r в единичном кубе B^n. Все грани из $\mathcal{I}_{i,i+n-r}^n$ имеют одинаковую $\mathcal{L}$-сложность, которая не зависит от размерности грани и однозначно определяется двумя числами $L_0\left(I\right) = r - i$ и $L_1\left(I\right) = i$. Поэтому можно обозначить сложность любой грани из множества $\mathcal{I}_{i,i+n-r}^n$ через $\mathcal{L}_{r-i,i}$, и множество $\left\{\mathcal{L}_{r-i,i}\right\}_{i=0}^r$ представляет все возможные значения (включая равные) $\mathcal{L}$-сложности граней ранга r. Следовательно, $\bigcup\limits_{r\geqslant 1}\left\{\mathcal{L}_{r-i,i}\right\}_{i=0}^r$ является множеством возможных значений $\mathcal{L}$-сложности граней и аддитивная мера сложности однозначно определяется как функционал $\mathcal{L}\left(I\right) = \mathcal{L}\left(L_0\left(I\right), L_1\left(I\right)\right)$. Максимальную $\mathcal{L}$-сложность грани ранга r обозначим через $\mathcal{L}_r^{\max}$, т. е.

$$\mathcal{L}_r^{\max} = \max_{i|\, 0\leqslant i\leqslant r} \mathcal{L}_{r-i,i} = \max_{i|\, 0\leqslant i\leqslant r} \mathcal{L}_{r-i,n-i}^n.$$

Очевидно, что $\mathcal{L}_r^{\max} \leqslant \mathcal{L}_{r+1}^{\max}$.

Булева функция $f \in P_n$, для которой $N_f = S_{i,i+k}^n$, где $0 \leqslant i \leqslant i+k \leqslant n$, называется *поясковой* и обозначается через $S_{i,i+k}^n\left(\widetilde{x}^n\right)$.

Для булевой функции f введём следующие обозначения: $k\left(f\right)$ — число компонент связности, $m\left(f\right)$ — мощность максимального интервально независимого подмножества вершин, $\mathcal{T}\left(f\right)$ — множество тупиковых комплексов граней, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}\left(f\right)$ и $\mathcal{TM}_{\mathcal{L}}\left(f\right)$ — множество $\mathcal{L}$-минимальных и тупиковых $\mathcal{L}$-минимальных комплексов граней соответственно.

Очевидно, что $\mathcal{TM}_{\mathcal{L}}\left(f\right) = \mathcal{T}\left(f\right) \cap \mathcal{M}_{\mathcal{L}}\left(f\right) \neq \varnothing$ и для каждого комплекса $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}\left(f\right) \setminus \mathcal{T}\left(f\right)$, если $\mathcal{TM}_{\mathcal{L}}\left(f\right)$ непусто, уменьшением ранга или удалением граней может быть получен эквивалентный тупиковый комплекс $T \in \mathcal{T}\left(f\right)$, следовательно, $\mathcal{L}\left(M\right) \geqslant \mathcal{L}\left(T\right)$, т. е. $T \in \mathcal{TM}_{\mathcal{L}}\left(f\right)$.

Обозначим через $\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}$ подмножество функций, зависящих от n переменных и аддитивной меры сложности $\mathcal{L}$, которые обладают следующими свойствами: множество N_f является одной компонентой связности, $\mathcal{TM}_l\left(f\right) \cap \mathcal{TM}_{\mathcal{L}}\left(f\right) = \varnothing$ и $l\left(f\right) = m\left(f\right)$.

Достаточные условия минимальности, основанные на понятии интервально независимого подмножества вершин, для аддитивных мер сложности (аналогичные условиям для меры сложности L [6, с. 86]) не могут выполняться для функций из множества $\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}$. Действительно, в любом $\mathcal{L}$-минимальном комплексе граней M функции $f \in \mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}$ любое подмно-

жество собственных вершин мощности $l\,(M) > l\,(f) = m\,(f)$ не является интервально независимым для функции f.

При минимизации функций из множества $\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}$ не удаётся уменьшить трудоёмкость поиска решения за счёт независимой минимизации для компонент связности и применения достаточных условий минимальности для исключения просмотра всех минимальных комплексов граней.

Отметим, что для функции, имеющей, например, две компоненты связности в гранях $B^{n,0,0}_{n-1,n}$ и $B^{n,1,1}_{n-1,n}$, возможна следующая конструкция. Компонента функции в одной грани имеет максимальное число минимальных и кратчайших комплексов граней, т. е. $2^{\Theta(n2^n)}$ [5]. Компонента функции в другой грани имеет множества кратчайших и минимальных комплексов граней, которые не пересекаются. Для такой функции не пересекаются множества кратчайших и минимальных комплексов граней, при этом число кратчайших и минимальных комплексов граней не менее $2^{\Theta(n2^n)}$.

1. Описание конструкции

Максимальное число $\mathcal{L}$-минимальных комплексов граней для функций из множества $\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}$ обозначим через $\mu\,(\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}})$.

Методы получения нижних оценок $\mu\,(\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}})$ и $|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}|$ основаны на преобразовании в два этапа функции s переменных в функцию n переменных. Сначала функция s переменных преобразуется в функцию $n-2$ переменных, при этом каждая максимальная грань исходной функции преобразуется в пучок изоморфных максимальных граней получаемой функции. Затем функция $n-2$ переменных преобразуется в функцию n переменных добавлением одномерных ядровых граней в двух новых измерениях, которые содержат все вершины функции $n-2$ переменных, за исключением вершин исходной функции s переменных в фиксированной грани. При этом можно описать все тупиковые комплексы граней полученной функции, среди которых содержатся все тупиковые кратчайшие и $\mathcal{L}$-минимальные комплексы граней, а также получить для них сравнительные оценки сложности. При специальном выборе функции s переменных и параметров преобразований получаются функции из множества $\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}$, что позволяет получить нижние оценки $\mu\,(\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}})$ и $|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}|$.

Определим функцию $Z^n_{t,\widetilde{\alpha}}\,(\widetilde{x}^n) \in P_n$, где $1 \leqslant t \leqslant n$, имеющую простые импликанты, которые соответствуют изоморфным граням ранга t, содержащим вершину $\widetilde{\alpha} \in B^n$ и образующим пучок максимальной мощности.

Очевидно, что все грани одного ранга, содержащие вершину $\widetilde{0}$ или $\widetilde{1}$,

изоморфны, следовательно,

$$Z^n_{t,\widetilde{0}}(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{(j_1,j_2,\ldots,j_t)\in J^{1,n}_t} \overline{x}_{j_1}\ldots\overline{x}_{j_t} = S^n_{0,n-t}(\widetilde{x}^n),$$

$$Z^n_{t,\widetilde{1}}(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{(j_1,j_2,\ldots,j_t)\in J^{1,n}_t} x_{j_1}\ldots x_{j_t} = S^n_{t,n}(\widetilde{x}^n),$$

где $J^{n_1,n_2}_t = \{(j_1,j_2,\ldots,j_t) \mid n_1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leqslant n_2\}$, $1 \leqslant t \leqslant n_2 - n_1 + 1$. Для других вершин такое утверждение неверно.

Пусть $\mathcal{I}^n_{t,\widetilde{\alpha}} = \left\{B^{n,\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_t}}_{j_1,\ldots,j_t} \mid (j_1,j_2,\ldots,j_t) \in J^{1,n}_t\right\}$ — пучок всех граней ранга t, где $1 \leqslant t \leqslant n$, содержащих вершину $\widetilde{\alpha} \in B^n$.

Лемма 1. *Для любого множества граней $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^n_r$, имеющих ранг r, максимальным по мощности подмножеством изоморфных граней является подмножество $\mathcal{I}^* = \mathcal{I} \cap \mathcal{I}^n_{i_0,i_0+n-r}$ и $|\mathcal{I}^*| \geqslant |\mathcal{I}|/(r+1)$, где индекс i_0 определяется из условия*

$$\left|\mathcal{I} \cap \mathcal{I}^n_{i_0,i_0+n-r}\right| = \max_{i \mid 0\leqslant i\leqslant r} \left|\mathcal{I} \cap \mathcal{I}^n_{i,i+n-r}\right|.$$

В соответствии с леммой 1 положим

$$\widetilde{\mathcal{I}}^n_{t,\widetilde{\alpha}} = \mathcal{I}^n_{t,\widetilde{\alpha}} \cap \mathcal{I}^n_{i_0,i_0+n-t},$$

$$\widetilde{J}^{1,n}_{t,\widetilde{\alpha}} = \left\{\, (j_1,j_2,\ldots,j_t) \in J^{1,n}_t \mid B^{n,\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_t}}_{j_1,\ldots,j_t} \in \widetilde{\mathcal{I}}^n_{t,\widetilde{\alpha}}\right\},$$

где индекс i_0 определяется из условия

$$\left|\mathcal{I}^n_{t,\widetilde{\alpha}} \cap \mathcal{I}^n_{i_0,i_0+n-r}\right| = \max_{i \mid 0\leqslant i\leqslant r} \left|\mathcal{I}^n_{t,\widetilde{\alpha}} \cap \mathcal{I}^n_{i,i+n-r}\right|.$$

Тогда для функции $Z^n_{t,\widetilde{\alpha}}\,(\widetilde{x}^n)$ имеет место представление

$$Z^n_{t,\widetilde{\alpha}}\,(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{(j_1,j_2,\ldots,j_t)\in \widetilde{J}^{1,n}_{t,\widetilde{\alpha}}} x^{\alpha_{j_1}}_{j_1}\ldots x^{\alpha_{j_t}}_{j_t}.$$

Отметим, что $\log\left|\widetilde{\mathcal{I}}^n_{t,\widetilde{\alpha}}\right| \sim \log\left|\mathcal{I}^n_{t,\widetilde{\alpha}}\right| = \log\binom{n}{t}$, если $t \geqslant 1$ и $n-t \to \infty$ при $n \to \infty$, так как $\frac{1}{t+1}\left|\mathcal{I}^n_{t,\widetilde{\alpha}}\right| \leqslant \left|\widetilde{\mathcal{I}}^n_{t,\widetilde{\alpha}}\right| \leqslant \left|\mathcal{I}^n_{t,\widetilde{\alpha}}\right|$ и $\log t = o\left(\log\binom{n}{t}\right)$.

Для $1 \leqslant t \leqslant n-s$ обозначим через $Z^{n-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}\,(\widetilde{x}_{s+1,n})$ функцию, которая получается из функции $Z^{n-s}_{t,\widetilde{\alpha}}\,(\widetilde{x}^{n-s})$ подстановкой $(n-s)$-мерных векторов переменных $\widetilde{x}_{s+1,n}$ и значений $\widetilde{\alpha}_{s+1,n}$. В грани $B^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_s}_{1,\ldots,s} \subset B^n$

эта функция представляется пучком изоморфных граней ранга t максимальной мощности, которые содержат вершину $(\sigma_1, \dots, \sigma_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_n)$.

Определим первое преобразование $\Phi^{s,n,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}} : P_s \to P_n$, которое зависит от параметров s, t и булева вектора $\widetilde{\alpha}_{s+1,n}$. Для функции $f \in P_s$ результатом преобразования Φ является функция (рис. 1)

$$\Phi_f^{s,n,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}\left(\widetilde{x}^n\right) = f\left(\widetilde{x}^s\right) Z^{n-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}\left(\widetilde{x}_{s+1,n}\right) \vee x_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Для вектора $\widetilde{\alpha}_{s+1,n}$ и произвольной грани $I = B^{s,\sigma_1,\dots,\sigma_r}_{i_1,\dots,i_r} \subset B^s$ ранга r, где $(i_1, \dots, i_r) \in J_r^{1,s}$, пучок граней вида $B^{n,\sigma_1,\dots,\sigma_r,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_t}}_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_t}$ в кубе B^n, где $(j_1, \dots, j_t) \in \widetilde{J}^{s+1,n}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}$, обозначим через $Q^{s,n,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}\left(I\right)$.

Лемма 2. *Для любой грани $I \subset B^s$ справедливы следующие утверждения:*

(i) *все грани в пучке $Q^{s,n,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}\left(I\right)$ изоморфны;*

(ii) *если I является максимальной гранью функции $f\left(\widetilde{x}^s\right) \in P_s$, то любая грань из пучка $Q^{n,s,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}\left(I\right)$ является максимальной гранью функции $\Phi_f^{s,n,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}\left(\widetilde{x}^n\right)$.*

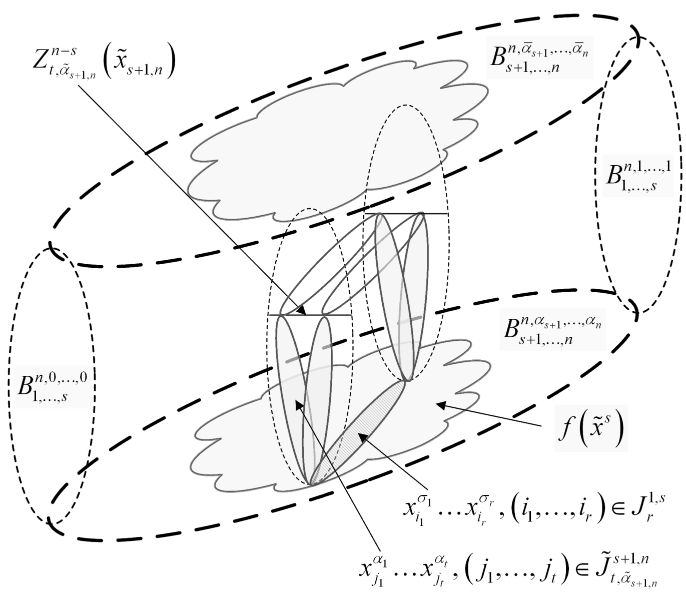

Рис. 1. Преобразование $\Phi^{s,n,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}$ функции $f \in P_s$

Определим второе преобразование $\Psi^{n-2,n,\alpha_{n-1},\alpha_n} : P_{n-2} \to P_n$, кото-

рое функции $f = f_1 \vee f_2 \in P_{n-2}$ ставит в соответствие

$$\Psi_f\left(\widetilde{x}^n\right) \equiv \Psi_{f_1,f_2}^{n-2,n,\alpha_{n-1},\alpha_n}\left(\widetilde{x}^n\right)$$
$$= x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n} (f_1(\widetilde{x}^{n-2}) \vee f_2(\widetilde{x}^{n-2})) \vee \lambda(\widetilde{x}^n) f_2(\widetilde{x}^{n-2}),$$

где $\lambda\left(\widetilde{x}^n\right) = x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\overline{\alpha}_n}\left(x_1 \oplus \cdots \oplus x_{n-2}\right) \vee x_{n-1}^{\overline{\alpha}_{n-1}} x_n^{\alpha_n}\left(x_1 \oplus \cdots \oplus x_{n-2} \oplus 1\right)$.

Это преобразование основано на идее Ю. Л. Васильева [2, с. 126] и позволяет за счёт увеличения на два измерения размерности единичного куба и добавления одномерных ядровых граней, которые имеют собственные вершины в добавленных измерениях, сделать покрытым этими гранями произвольное подмножество вершин функции.

Для функции $\Psi_f\left(\widetilde{x}^n\right)$ определим подмножества вершин:

$$H_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\alpha_n} = \left\{\widetilde{x} \in B^n \mid x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n} f_1(\widetilde{x}^{n-2}) \overline{f}_2(\widetilde{x}^{n-2}) = 1\right\},$$

$$R_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\alpha_n} = \left\{\widetilde{x} \in B^n \mid x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n} f_2(\widetilde{x}^{n-2}) = 1\right\},$$

$$C_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\overline{\alpha}_n} = \left\{\widetilde{x} \in B^n \mid x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\overline{\alpha}_n} f_2(\widetilde{x}^{n-2})\left(x_1 \oplus \cdots \oplus x_{n-2}\right) = 1\right\},$$

$$C_{\Psi_f}^{\overline{\alpha}_{n-1},\alpha_n} = \left\{\widetilde{x} \in B^n \mid x_{n-1}^{\overline{\alpha}_{n-1}} x_n^{\alpha_n} f_2(\widetilde{x}^{n-2})\left(x_1 \oplus \cdots \oplus x_{n-2} \oplus 1\right) = 1\right\},$$

$$C_{\Psi_f} = C_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\overline{\alpha}_n} \cup C_{\Psi_f}^{\overline{\alpha}_{n-1},\alpha_n}.$$

Очевидно, что $C_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\overline{\alpha}_n} \cap C_{\Psi_f}^{\overline{\alpha}_{n-1},\alpha_n} = \varnothing$ и ровно одна вершина $\widetilde{y} \in C_{\Psi_f}$ является соседней для каждой вершины $\widetilde{x} \in R_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\alpha_n}$. Комплекс одномерных граней, содержащих такие пары соседних вершин, обозначим через $\operatorname{Ker}\left(\Psi_f\right) = \left\{I = \{\widetilde{x}, \widetilde{y}\} \mid \widetilde{x} \in R_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\alpha_n},\ \widetilde{y} \in C_{\Psi_f}\right\}$.

Лемма 3. *Для любого представления функции $f \in P_{n-2}$ в виде $f = f_1 \vee f_2$ функция $\Psi_f\left(\widetilde{x}^n\right) \equiv \Psi_{f_1,f_2}^{n-2,n,\alpha_{n-1},\alpha_n}\left(\widetilde{x}^n\right)$ обладает следующими свойствами*:

(i) *все грани комплекса $\operatorname{Ker}\left(\Psi_f\right)$ являются ядровыми гранями функции Ψ_f и вершины из множества C_{Ψ_f} являются собственными для этих ядровых граней*;

(ii) *грань $B_{i_1,\ldots,i_r,n-1,n}^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_r,\alpha_{n-1},\alpha_n}$ такая, что $H_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\alpha_n} \cap B_{i_1,\ldots,i_r,n-1,n}^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_r,\alpha_{n-1},\alpha_n}$ непусто, где $(i_1,\ldots,i_r) \in J_r^{1,n-2}$, максимальна для функции $\Psi_f \in P_n$ тогда и только тогда, когда грань $B_{i_1,\ldots,i_r}^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_r}$ является максимальной гранью функции $f \in P_{n-2}$.*

Для построения функций из множества $\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}$ определим схему преобразования функций: $P_s \xrightarrow{\Phi^{s,n-2,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}} P_{n-2} \xrightarrow{\Psi^{n-2,n,\alpha_{n-1},\alpha_n}} P_n$.

(i) Положим $f_0(\widetilde{x}^{n-2}) = \Phi_f^{s,n-2,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}(\widetilde{x}^{n-2})$, т. е.

$$f_0(\widetilde{x}^{n-2}) = f\left(\widetilde{x}^s\right) Z^{n-2-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\left(\widetilde{x}_{s+1,n-2}\right) \vee x_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \dots x_{n-2}^{\alpha_{n-2}}.$$

(ii) Представим $f_0(\widetilde{x}^{n-2}) = f_1(\widetilde{x}^{n-2}) \vee f_2(\widetilde{x}^{n-2})$, где

$$f_1(\widetilde{x}^{n-2}) = f\left(\widetilde{x}^s\right) x_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \dots x_{n-2}^{\alpha_{n-2}},$$

$$f_2(\widetilde{x}^{n-2}) = \overline{f}\left(\widetilde{x}^s\right) x_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \dots x_{n-2}^{\alpha_{n-2}} \\ \vee f\left(\widetilde{x}^s\right) \left(x_{s+1}^{\overline{\alpha}_{s+1}} \vee \dots \vee x_{n-2}^{\overline{\alpha}_{n-2}}\right) Z^{n-2-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\left(\widetilde{x}_{s+1,n-2}\right).$$

(iii) Применим преобразование $\Psi^{n-2,n,\alpha_{n-1},\alpha_n}$ к представлению функции $f_0 = f_1 \vee f_2 \in P_{n-2}$. Для краткости получаемую в результате преобразования функцию обозначим через $f_{\Phi,\Psi}\left(\widetilde{x}^n\right) \equiv \Psi_{f_1,f_2}^{n-2,n,\alpha_{n-1},\alpha_n}\left(\widetilde{x}^n\right)$.

Для функции $f_{\Phi,\Psi} \in P_n$ используем следующие обозначения:

$\mathrm{Ker}\left(f_{\Phi,\Psi}\right)$ — комплекс одномерных ядровых граней функции $f_{\Phi,\Psi}$, для которых вершины множества C_{Ψ_f} являются собственными;

$\Omega_Q\left(T\right)$ — семейство комплексов граней в кубе B^n, в котором каждый комплекс получается из тупикового комплекса граней $T \in \mathcal{T}\left(f\right)$ заменой каждой грани $I = B^{s,\sigma_1,\dots,\sigma_r}_{i_1,\dots,i_r} \in T$ гранью из пучка

$$\left\{B^{n,\sigma_1,\dots,\sigma_r,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_t},\alpha_{n-1},\alpha_n}_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_t,n-1,n} \mid B^{n,\sigma_1,\dots,\sigma_r,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_t}}_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_t} \in Q^{s,n-2,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\left(I\right)\right\}$$

в кубе B^n;

$\Omega\left(T\right)$ — семейство комплексов граней в кубе B^n, в котором каждый комплекс получается из комплекса граней семейства $\Omega_Q\left(T\right)$ добавлением граней комплекса $\mathrm{Ker}\left(f_{\Phi,\Psi}\right)$;

$\Omega_{\mathcal{T}}\left(f\right) = \bigcup\limits_{T\in\mathcal{T}(f)} \Omega\left(T\right)$ — множество всех комплексов граней, которые могут быть построены по всем тупиковым комплексам граней функции f.

Лемма 4. *Для любой функции $f \in P_s$ справедливы следующие утверждения*:

(i) $\mathcal{T}\left(f_{\Phi,\Psi}\right) = \{T_0\} \cup \Omega_{\mathcal{T}}\left(f\right)$ *— множество тупиковых комплексов граней функции $f_{\Phi,\Psi}$, где $T_0 = \left\{B^{n,\alpha_{s+1},\dots,\alpha_n}_{s+1,\dots,n}\right\} \cup \mathrm{Ker}\left(f_{\Phi,\Psi}\right)$;*

(ii) $f_{\Phi,\Psi} \in \mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}$, *если $l\left(f\right) > 1$ и для аддитивной меры сложности $\mathcal{L}$ выполняется неравенство*

$$\min_{M\in\Omega_Q(f)} \mathcal{L}\left(M\right) < \mathcal{L}\left(B^{n,\alpha_{s+1},\dots,\alpha_n}_{s+1,\dots,n}\right),$$

где $\Omega_Q(f) = \bigcup\limits_{T \in \mathcal{T}(f)} \Omega_Q(T)$. *При этом, во-первых,* $\mathcal{TM}_l(f_{\Phi,\Psi}) = \{T_0\}$, $T_0 \notin \mathcal{TM}_{\mathcal{L}}(f_{\Phi,\Psi})$ *и* $l(T_0) = m(f_{\Phi,\Psi})$, *во-вторых,* $\Omega(T) \subseteq \mathcal{TM}_{\mathcal{L}}(f_{\Phi,\Psi})$ *для некоторого тупикового комплекса* $T \in \mathcal{T}(f)$ *и* $l(M) > m(f_{\Phi,\Psi}) = l(f_{\Phi,\Psi})$ *для любого* $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f_{\Phi,\Psi})$.

При выполнении условий леммы 4 для некоторого $T \in \mathcal{T}(f)$ имеем

$$\mu(\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}) \geqslant |\mathcal{TM}_{\mathcal{L}}(f_{\Phi,\Psi})| \geqslant |\Omega(T)| = \left|\widetilde{\mathcal{I}}^{n-2-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\right|^{l(T)}.$$

Обозначим через $\mathcal{F}\big(Z^n_{t,\widetilde{\alpha}}\big)$ множество функций, в котором каждая функция соответствует некоторому непустому подмножеству граней, содержащих вершину $\widetilde{\alpha} \in B^n$ и имеющих ранг t, из пучка изоморфных граней максимальной мощности $\widetilde{\mathcal{I}}^n_{t,\widetilde{\alpha}}$.

Получение нижней оценки $|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}|$ основано на возможности применения к компонентам связности функции $f \in P_s$ преобразований с различными функциями из $\mathcal{F}\big(Z^{n-s-2}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\big)$ и сохранением справедливости леммы 4 в силу суммируемости для компонент связности тупиковых комплексов граней и сложности комплексов граней для аддитивных мер.

Если для функции $f \in P_s$ число компонент связности $k(f) > 1$, то

при первом преобразовании Φ для каждой компоненты независимо используется произвольная функция из $\mathcal{F}\big(Z^{n-2-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\big)$;

при втором преобразовании Ψ функция $f_2(\widetilde{x}^{n-2})$ определяется с учётом выбранной для каждой компоненты функции из $\mathcal{F}\big(Z^{n-s-2}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\big)$.

Обозначим через $\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}\big(f, Z^{n-2-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\big)$ множество различных функций из $\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}$, которые можно получить для функции f по такой схеме преобразования при выполнении условий леммы 4. Тогда

$$|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}| \geqslant \left|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}\big(f, Z^{n-2-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\big)\right| = \big(2^{\left|\widetilde{\mathcal{I}}^{n-2-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\right|} - 1\big)^{k(f)}.$$

2. Основные результаты

Теорема 1. *Если для функции* $f \in P_s$ *и параметров* s, t *и* $\widetilde{\alpha}_{s+1,n} = (\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n)$ *для аддитивной меры сложности* $\mathcal{L}$ *выполняется соотношение*

$$l^{\max}_T(f)\,\mathcal{L}^{\max}_{s+t+2} < \mathcal{L}^{\max}_{n-s} = \mathcal{L}\big(B^{n,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n}_{s+1,\ldots,n}\big), \quad l(f) > 1,$$

то

$$\log \mu(\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}) \geqslant l(f) \log \left|\widetilde{I}^{n-2-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\right|, \quad \log |\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}| \geqslant k(f)\big(\left|\widetilde{I}^{n-2-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\right| - 1\big),$$

где $k\,(f)$, $l\,(f)$, $l_T^{\max}\,(f)$ — *число компонент связности, длина кратчайшего и максимальная длина тупикового комплексов граней функции* f *соответственно,* $\bigl|\widetilde{I}^{n-2-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\bigr|$ — *максимальная мощность пучка изоморфных граней ранга* t, *которые содержат вершину* $(\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_{n-2})\in B^{n-s-2}$.

Значения нижних оценок для конкретной аддитивной меры сложности $\mathcal{L}$ определяются рациональным выбором функции $f\in P_s$ и параметров преобразований s, t, $\widetilde{\alpha}_{s+1,n}$, при которых выполнены условия теоремы 1. Очевидно, что нижние оценки получаются тем выше, чем больше значения $l_T^{\max}\,(f)$, $l\,(f)$ и $k\,(f)$ для функции $f\in P_s$, при этом может быть использована оценка из леммы 1:

$$\bigl|\widetilde{I}^{n-2-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\bigr| \geqslant \frac{1}{t+1}\binom{n-2-s}{t}.$$

Аддитивная мера сложности $\mathcal{L}$ называется *линейной*, если $\mathcal{L}\,(I) = aL_0\,(I)+bL_1\,(I)$, где $a,b\geqslant 0$, $\max\{a,b\}>0$ и I — грань куба.

Теорема 2. *Для аддитивной линейной меры сложности* $\mathcal{L}$ *при* $n\to\infty$ *выполняются соотношения*

$$\log\mu\,(\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}) \gtrsim n\log n, \quad \log|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}| \geqslant \Theta(2^n/\sqrt{n}).$$

Получение оценок для нелинейных аддитивных мер связано с естественными предположениями о поведении максимальной меры сложности грани: $\mathcal{L}^{\max}_{r_n}\sim\mathcal{L}^{\max}_{v_n}$, если $r_n\sim v_n$, и $\mathcal{L}^{\max}_{r_n}=o\bigl(\mathcal{L}^{\max}_{v_n}\bigr)$, если $r_n=o\,(v_n)$, при $n\to\infty$, где r_n, v_n — последовательности натуральных чисел и $r_n,v_n\leqslant n$ для $n=1,\ldots$.

Очевидно, что таким условиям удовлетворяют аддитивные меры, для которых $\mathcal{L}\,(I)=q\,(L_0\,(I)\,,L_1\,(I))$, где $q(x,y)$ — многочлен не ниже второй степени с положительными коэффициентами и I — грань куба. Такие меры сложности будем называть *аддитивными мерами полиномиальной сложности*.

Теорема 3. *Для аддитивной меры полиномиальной сложности* $\mathcal{L}$ *при* $n\to\infty$ *выполняются оценки*

$$\log\mu(\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}) \geqslant \bigl(\mathcal{L}^{\max}_n\bigr)^{1-o(1)}\log n, \quad \log|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}| \geqslant \Theta(2^n/n^{3/2}).$$

3. Доказательства

Доказательство леммы 1. Множество $\bigl\{\mathcal{I}^n_{i,i+n-r},\ i=0,\ldots,r\bigr\}$ состоит из попарно не пересекающихся подмножеств изоморфных граней ранга r и содержит все грани ранга r единичного куба B^n. Поэтому

подмножество граней $\mathcal{I}^* = \mathcal{I} \cap \mathcal{I}^n_{i_0, i_0+n-r} \subseteq \mathcal{I}$ является максимальным по мощности подмножеством изоморфных граней ранга r. Мощность этого множества не может быть меньше, чем среднее значение $\left|\mathcal{I} \cap \mathcal{I}^n_{i,i+n-r}\right|$ для всех допустимых значений i. Следовательно,

$$|\mathcal{I}^*| = \max_{i \mid 0 \leqslant i \leqslant r} \left|\mathcal{I} \cap \mathcal{I}^n_{i,i+n-r}\right| \geqslant \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r} \left|\mathcal{I} \cap \mathcal{I}^n_{i,i+n-r}\right| = \frac{|\mathcal{I}|}{r+1}.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Для грани $I = B^{s,\sigma_1,\dots,\sigma_r}_{i_1,\dots,i_r} \subseteq N_f \subset B^s$, где $(i_1, \dots, i_r) \in J^s_{1,r}$, любая грань I_Q из пучка $Q^{s,n,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}(I)$ в кубе B^n имеет вид $I_Q = B^{n,\sigma_1,\dots,\sigma_r,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_t}}_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_t}$, где $(j_1, \dots, j_t) \in \widetilde{J}^{s+1,n}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}$.

(i) Очевидно, что $L_1(I_Q) = \|(\sigma_1, \dots, \sigma_r)\| + \|(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t})\|$ и $L_0(I_Q) = r + t - L_1(I_Q)$. Все грани вида $B^{n-s,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_t}}_{j_1,\dots,j_t}$, где $(j_1, \dots, j_t) \in \widetilde{J}^{s+1,n}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}$, изоморфны, т. е. значение $L_1\big(B^{n-s,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_t}}_{j_1,\dots,j_t}\big) = \|(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t})\|$ одинаково для всех таких граней. Поэтому для всех граней I_Q пучка $Q^{s,n,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}(I)$ одинаковы значения $L_1(I_Q)$ и $L_0(I_Q)$ соответственно, т. е. все грани изоморфны.

(ii) Пусть $I = B^{s,\sigma_1,\dots,\sigma_r}_{i_1,\dots,i_r}$ является максимальной гранью функции $f(\widetilde{x}^s) \in P_s$ и $I_Q \in Q^{s,n,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}(I)$. Покажем, что при удалении любого направления из грани I_Q получается грань I'_Q, которая не является допустимой для функции $\Phi^{s,n,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}_f(\widetilde{x}^n)$.

Если грань I'_Q получена удалением направления i_p, где $1 \leqslant p \leqslant r$, то она не допустимая, так как при удалении направления i_p из максимальной грани I получается недопустимая грань для $f \in P_s$.

Если грань I'_Q получена удалением направления j_p, где $1 \leqslant p \leqslant t$, то она не допустимая, так как при удалении направления j_p из грани $B^{n-s,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_t}}_{j_1,\dots,j_t}$ получается грань ранга $t-1$, т. е. недопустимая грань функции $Z^{n-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n}}(\widetilde{x}_{s+1,n})$, для которой все максимальные грани имеют ранг t. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. (i) Множество вершин $C^{\alpha_{n-1},\overline{\alpha}_n}_{\Psi_f}$ принадлежит нечётным слоям грани $B^{n,\alpha_{n-1},\overline{\alpha}_n}_{n-1,n}$, а множество $C^{\overline{\alpha}_{n-1},\alpha_n}_{\Psi_f}$ — чётным слоям грани $B^{n,\overline{\alpha}_{n-1},\alpha_n}_{n-1,n}$, так как они являются подмножествами вершин линейной функции $x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-2} \oplus \sigma$ для $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$.

Для любой вершины $\widetilde{x} \in B^n \setminus B^{n,\alpha_{n-1},\alpha_n}_{n-1,n}$, соседней с вершиной $\widetilde{y} \in C_{\Psi_f} = C^{\alpha_{n-1},\overline{\alpha}_n}_{\Psi_f} \cup C^{\overline{\alpha}_{n-1},\alpha_n}_{\Psi_f}$, имеем $\Psi_f(\widetilde{x}) = 0$ и $\Psi_f(\widetilde{y}) = 1$. Следовательно, для функции Ψ_f любая одномерная грань из множества $\mathrm{Ker}(\Psi_f)$

является единственной максимальной гранью, которая содержит соседние вершины $\widetilde{x} \in R_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\alpha_n}$ и $\widetilde{y} \in C_{\Psi_f}$, т. е. является ядровой гранью, и вершина $\widetilde{y}$ собственная для этой грани.

(ii) Очевидно, что грань $B_{i_1,\dots,i_r,n-1,n}^{n,\sigma_1,\dots,\sigma_r,\alpha_{n-1},\alpha_n}$ является допустимой гранью функции Ψ_f тогда и только тогда, когда грань $B_{i_1,\dots,i_r}^{n,\sigma_1,\dots,\sigma_r}$ является допустимой гранью функции $f \in P_{n-2}$, так как

$$\begin{aligned} N_{\Psi_f} \cap B_{n-1,n}^{n,\alpha_{n-1},\alpha_n} &= H_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\alpha_n} \cup R_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\alpha_n} \\ &= \{\widetilde{x}^n \in B^n \mid f(\widetilde{x}^{n-2}) = 1,\ x_{n-1} = \alpha_{n-1},\ x_n = \alpha_n\}. \end{aligned}$$

Пусть грань $I_{\Psi_f} = B_{i_1,\dots,i_r,n-1,n}^{n,\sigma_1,\dots,\sigma_r,\alpha_{n-1},\alpha_n}$, где $(i_1,\dots,i_r) \in J_r^{1,n-2}$, максимальная для функции Ψ_f. Если грань I получена из грани $B_{i_1,\dots,i_r}^{n-2,\sigma_1,\dots,\sigma_r}$ удалением направления i_p, где $1 \leqslant p \leqslant r$, и допустима для функции f, то при добавлении двух направлений $x_{n-1} = \alpha_{n-1}$ и $x_n = \alpha_n$ получается допустимая грань функции Ψ_f, которая содержит грань I_{Ψ_f}, т. е. грань I_{Ψ_f} не является максимальной для функции Ψ_f.

Пусть грань $I_f = B_{i_1,\dots,i_r}^{n-2,\sigma_1,\dots,\sigma_r}$ является максимальной для функции f, грань I получена из грани $I_f^* = B_{i_1,\dots,i_r,n-1,n}^{n,\sigma_1,\dots,\sigma_r,\alpha_{n-1},\alpha_n}$ удалением одного направления и $I_f^* \cap H_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\alpha_n} \neq \varnothing$.

Если грань I получена удалением направления i_p, где $1 \leqslant p \leqslant r$, и допустима для функции Ψ_f, то допустимой является и грань, получаемая из грани I_f удалением этого направления i_p, т. е. грань I_f не является максимальной для функции f.

Если грань I получена удалением направления $n-1$ или n и $I_f^* \cap H_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\alpha_n} \neq \varnothing$, то

$$I \cap \{\widetilde{x}^n \in B^n \mid f_1(\widetilde{x}^{n-2})\overline{f}_2(\widetilde{x}^{n-2}) = 1\} \neq \varnothing,$$

что противоречит соотношению

$$N_{\Psi_f} \cap \left(B_{n-1,n}^{n,\alpha_{n-1},\overline{\alpha}_n} \cup B_{n-1,n}^{n,\overline{\alpha}_{n-1},\alpha_n}\right) \subseteq \{\widetilde{x}^n \in B^n \mid f_2(\widetilde{x}^{n-2}) = 1\}.$$

Следовательно, грань I не допустима, а грань I_f^* максимальна для функции Ψ_f. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. (i) Комплекс граней $\mathrm{Ker}\,(f_{\Phi,\Psi})$ не содержит только вершин функции $f_{\Phi,\Psi}$ из множества

$$\begin{aligned} H_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\alpha_n} &= \left\{\widetilde{x} \in B^n \mid f_1(\widetilde{x}^{n-2}) x_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \dots x_n^{\alpha_n} = 1\right\} \\ &= \{\widetilde{x}^n \in B^n \mid f\,(\widetilde{x}^s) = 1,\ x_i = \alpha_i,\ i = s+1,\dots,n\} \subset B_{s+1,\dots,n}^{n,\alpha_{s+1},\dots,\alpha_n}, \end{aligned}$$

так как $f_1\overline{f}_2 \equiv f_1$ при $f_1 f_2 \equiv 0$ и $f_1(x_1, \ldots, x_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_{n-2}) = f(\widetilde{x}^s)$.

В произвольном тупиковом комплексе граней функции $f_{\Phi,\Psi}$ множество $H_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\alpha_n}$ может содержаться

либо в одной грани $B_{s+1,\ldots,n}^{n,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n}$, максимальной для функции $f_{\Phi,\Psi}$, так как $f(\widetilde{x}^s) \not\equiv 1$ при $l(f) > 1$, и тогда тупиковый комплекс граней есть T_0;

либо в тупиковом комплексе граней T^* таком, что собственные вершины всех граней содержатся в $H_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\alpha_n}$ и $N_{T^*} \cap B_{s+1,\ldots,n}^{n,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n} = H_{\Psi_f}^{\alpha_{n-1},\alpha_n}$.

Покажем, что $T^* \in \Omega_Q(f)$ и, следовательно, $T^* \cup \mathrm{Ker}(f_{\Phi,\Psi}) \in \Omega_{\mathcal{T}}(f)$. Обозначим через T комплекс граней в кубе B^s, который получен удалением направлений $s+1, \ldots, n$ из всех граней $I^* \cap B_{s+1,\ldots,n}^{n,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n}$, где $I^* \in T^*$. Очевидно, что комплекс граней T неприводим для функции $f \in P_s$, т. е. $N_T = N_f$, и все грани имеют собственные вершины.

Предположим, что некоторая грань $I \in T$, полученная из грани $I^* \in T^*$, не является максимальной для функции f. Удалением из грани I некоторого непустого набора направлений получим максимальную для функции f грань $I_{\max}$. Тогда из леммы 2 и определения функции $f_{\Phi,\Psi}$ следует, что грань $I^* \in T^*$ строго содержится в одной из граней пучка $Q^{s,n-2,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}(I_{\max})$, которые являются максимальными для функции $f_{\Phi,\Psi}$; противоречие максимальности грани I^* в тупиковом комплексе T^*. Следовательно, $T \in \mathcal{T}(f)$ и $T^* \in \Omega_Q(f)$.

(ii) Во-первых, для комплекса граней T_0 выполняются соотношения

$$l(T_0) = 1 + l(\mathrm{Ker}(f_{\Phi,\Psi})), \quad \mathcal{L}(T_0) = \mathcal{L}\big(B_{s+1,\ldots,n}^{n,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n}\big) + \mathcal{L}(\mathrm{Ker}(f_{\Phi,\Psi})).$$

Во-вторых, для любого комплекса граней $M = \{M_Q\} \cup \mathrm{Ker}(f_{\Phi,\Psi}) \in \Omega_{\mathcal{T}}(f)$, где $M_Q \in \Omega_Q(T) \subseteq \Omega_Q(f)$ для некоторого $T \in \mathcal{T}(f)$ функции f и $l(M_Q) = l(T) \geqslant l(f)$, имеем

$$l(M) = l(M_Q) + l(\mathrm{Ker}(f_{\Phi,\Psi})), \quad \mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_Q) + \mathcal{L}(\mathrm{Ker}(f_{\Phi,\Psi})).$$

Тогда из условия $l(f) > 1$ следует, что $l(T_0) < l(M)$ для любого комплекса граней $M \in \Omega_{\mathcal{T}}(f)$, т. е. $\mathcal{TM}_l(f_{\Phi,\Psi}) = \{T_0\}$. Из условия

$$\min_{M \in \Omega_Q(f)} \mathcal{L}\big(M\big) < \mathcal{L}\big(B_{s+1,\ldots,n}^{n,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n}\big)$$

вытекает, что $\mathcal{L}(M) < \mathcal{L}(T_0)$ для некоторого комплекса граней $M \in \Omega_{\mathcal{T}}(f)$, т. е. $T_0 \notin \mathcal{TM}_{\mathcal{L}}(f_{\Phi,\Psi})$.

Очевидно, что для некоторого комплекса $T^* \in \mathcal{T}(f)$ имеем

$$\min_{M \in \Omega_Q(T^*)} \mathcal{L}(M) = \min_{T \in \mathcal{T}(f)} \min_{M \in \Omega_Q(T)} \mathcal{L}(M) = \min_{M \in \Omega_Q(f)} \mathcal{L}(M).$$

В силу леммы 2 все комплексы граней из любого $\Omega_Q(T)$ имеют одинаковую сложность для любой аддитивной меры сложности $\mathcal{L}$. Тогда $\Omega(T^*) \subseteq \mathcal{TM}_{\mathcal{L}}(f_{\Phi,\Psi})$, так как все комплексы граней из множества $\Omega(T^*) = \{M \cup \operatorname{Ker}(f_{\Phi,\Psi}) \mid M \in \Omega_Q(T^*)\}$ имеют минимальную $\mathcal{L}$-сложность среди тупиковых комплексов граней функции $f_{\Phi,\Psi}$.

Очевидно, что $m(f_{\Phi,\Psi}) = l(f_{\Phi,\Psi}) = l(T_0) = 1 + l(\operatorname{Ker}(f_{\Phi,\Psi}))$, т. е. максимальное интервально независимое множество вершин функции $f_{\Phi,\Psi}$ образуют множество собственных вершин одномерных ядровых граней и одна собственная вершина грани $B^{n,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n}_{s+1,\ldots,n}$ из множества $H^{\alpha_{n-1},\alpha_n}_{\Psi_f}$.

Для любого комплекса $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f_{\Phi,\Psi})$ удалением и уменьшением ранга граней можем получить тупиковый комплекс $M_T \in \mathcal{TM}_{\mathcal{L}}(f_{\Phi,\Psi})$, тем самым $M_T \in \Omega_{\mathcal{T}}(f)$, т. е. $l(M) \geqslant l(M_T) > l(f_{\Phi,\Psi}) = m(f_{\Phi,\Psi})$. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Отметим, что для любого комплекса граней $M \in \Omega_Q(f)$, во-первых, $1 < l(f) \leqslant l(M) \leqslant l^{\max}_T(f) < 2^s$, так как комплекс M получен преобразованием каждой грани некоторого тупикового комплекса функции $f \in P_s$ в грань куба B^n, во-вторых, все грани комплекса M имеют ранг не более $t+s+2$, т. е. $\mathcal{L}(M) \leqslant l^{\max}_T(f)\,\mathcal{L}^{\max}_{t+s+2}$. По условию теоремы получаем $\mathcal{L}(M) < \mathcal{L}\big(B^{n,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n}_{s+1,\ldots,n}\big)$. Тогда выполнены условия леммы 4, следовательно, $\Omega(T) \subseteq \mathcal{TM}_{\mathcal{L}}(f_{\Phi,\Psi})$ для некоторого тупикового комплекса $T \in \mathcal{T}(f)$. По определению семейства комплексов граней $\Omega(T)$ для любого тупикового комплекса $T \in \mathcal{T}(f)$ имеем

$$|\Omega(T)| = |\Omega_Q(T)| = \prod_{I \in T} |Q^{s,n-2,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}(I)| = \left|\widetilde{I}^{n-2-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\right|^{l(T)},$$

$$\log \mu(\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}) \geqslant \log |\mathcal{TM}_{\mathcal{L}}(f_{\Phi,\Psi})| \geqslant \log |\Omega(T)| \geqslant l(f) \log \left|\widetilde{I}^{n-2-s}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\right|.$$

Для получения нижней оценки $|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}|$ определим множество функций

$$\mathcal{F}\big(Z^n_{t,\widetilde{\alpha}}\big) = \Big\{ Z^n_{t,\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x}^n, J) = \bigvee_{(j_1,j_2,\ldots,j_t) \in J} x^{\alpha_{j_1}}_{j_1} \ldots x^{\alpha_{j_t}}_{j_t},\ J \subseteq \widetilde{J}^{1,n}_{t,\widetilde{\alpha}},\ J \neq \varnothing \Big\}.$$

Каждая функция из этого множества соответствует некоторому непустому подмножеству граней из пучка максимальной мощности изоморфных граней $\widetilde{\mathcal{I}}^n_{t,\widetilde{\alpha}}$, которые содержат вершину $\widetilde{\alpha} \in B^n$ и имеют ранг t.

Пусть $f(\widetilde{x}^s) = \bigvee\limits_{i=1}^{k} h_i(\widetilde{x}^s)$, где $h_i(\widetilde{x}^s)$ — связные компоненты функции $f(\widetilde{x}^s)$ для $i = 1, \ldots, k$ и $k = k(f)$.

Первое преобразование определяется следующим образом:

$$f_0\left(\widetilde{x}^{n-2}\right) = \Phi_f^{s,n-2,t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}\left(\widetilde{x}^{n-2}, \{J_i\}_{i=1}^k\right)$$
$$= \bigvee_{i=1}^{k} h_i\left(\widetilde{x}^s\right) Z_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}^{n-2-s}\left(\widetilde{x}_{s+1,n-2}, J_i\right) \vee x_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \ldots x_{n-2}^{\alpha_{n-2}},$$

где $Z_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}^{n-2-s}\left(\widetilde{x}_{s+1,n-2}, J_i\right) \in \mathcal{F}\left(Z_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}^{n-2-s}\right)$, $J_i \subseteq \widetilde{J}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}^{s+1,n-2}$ и $J_i \neq \varnothing$ для $i = 1, \ldots, k$, т. е. для каждой компоненты связности функции f преобразование выбирается независимо.

Второе преобразование применяется к представлению функции

$$f_0(\widetilde{x}^{n-2}) = f_1(\widetilde{x}^{n-2}) \vee f_2(\widetilde{x}^{n-2}),$$

где

$$f_1(\widetilde{x}^{n-2}) = f\left(\widetilde{x}^s\right) x_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \ldots x_{n-2}^{\alpha_{n-2}},$$

$$f_2(\widetilde{x}^{n-2}) = \overline{f}\left(\widetilde{x}^s\right) x_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \ldots x_{n-2}^{\alpha_{n-2}}$$
$$\vee \left(x_{s+1}^{\overline{\alpha}_{s+1}} \cdots \vee x_{n-2}^{\overline{\alpha}_{n-2}}\right) \bigvee_{i=1}^{k} h_i\left(\widetilde{x}^s\right) Z_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}^{n-2-s}\left(\widetilde{x}_{s+1,n-2}, J_i\right).$$

Утверждения леммы 4 остаются справедливыми в силу суммируемости для компонент связности функции f тупиковых комплексов граней и сложности комплексов граней для аддитивных мер.

Для функции $f\left(\widetilde{x}^s\right)$, где $l\left(f\right) \geqslant k\left(f\right) > 1$, при выполнении для параметров t и s условия $l_T^{\max}\left(f\right) \mathcal{L}_{s+t+2}^{\max} < \mathcal{L}_{n-s}^{\max}$ в результате преобразований получаем функцию

$$f_{\Phi,\Psi}\left(\widetilde{x}^n, \{J_i\}_{i=1}^k\right) \in \mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}\left(f, Z_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}^{n-2-s}\right) \subseteq \mathcal{F}_{n,\mathcal{L}},$$

где $J_i \subseteq \widetilde{J}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}^{s+1,n-2}$ и $J_i \neq \varnothing$ для $i = 1, \ldots, k$. Следовательно,

$$\left|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}\right| \geqslant \left|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}\left(f, Z_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}^{n-2-s}\right)\right| = (2^{\left|\widetilde{J}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}^{s+1,n-2}\right|} - 1)^{k(f)},$$

$$\log\left|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}\right| \geqslant k(f)\left(\left|\widetilde{I}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}^{n-2-s}\right| - 1\right),$$

так как $\left|\widetilde{J}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}^{s+1,n-2}\right| = \left|\widetilde{I}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}^{n-2-s}\right|$ и $\log\left(2^x - 1\right) > x - 1$ при $x > 1$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Произвольная аддитивная линейная мера сложности $aL_0(I)+bL_1(I)$ умножением на константу $\max^{-1}\{a,b\}$ может быть приведена к одной из мер сложности L, $L_{0,c}$ или $L_{1,c}$, где $L_{\sigma,c}(I) = L_\sigma(I)+cL_{1-\sigma}(I)$ для $\sigma \in \{0,1\}$, $0 \leqslant c < 1$ и грани I. При этом сохраняются свойство минимальности комплексов граней и выполнимость условия $l_T^{\max}(f)\,\mathcal{L}_{t+s+2}^{\max} < \mathcal{L}_{n-s}^{\max}$. Для меры сложности $\mathcal{L} \in \{L, L_{0,c}, L_{1,c}\}$ справедливы следующие утверждения:

(i) $\mathcal{L}_t^{\max} = t$, так как $\mathcal{L}(I) = t$ для $I \in I_{t,\widetilde{0}}^n$ или $I \in I_{t,\widetilde{1}}^n$ и $L_{\sigma,c}(I) = L_\sigma(I)+cL_{1-\sigma}(I) = t-(1-c)\,L_{1-\sigma}(I) \leqslant t$ для $\sigma = 0,1$ и грани I ранга t;

(ii) $\left|\widetilde{\mathcal{I}}_{t,\widetilde{\alpha}}^n\right| = \left|\mathcal{I}_{t,\widetilde{\alpha}}^n\right| = \binom{n}{t}$, где $\widetilde{\alpha} = \widetilde{0}$ и $Z_{t,\widetilde{\alpha}}^n(\widetilde{x}^n) = S_{0,n-t}^n(\widetilde{x}^n)$ для $\mathcal{L} = L_{0,c}$; $\widetilde{\alpha} = \widetilde{1}$ и $Z_{t,\widetilde{\alpha}}^n(\widetilde{x}^n) = S_{t,n}^n(\widetilde{x}^n)$ для $\mathcal{L} = L_{1,c}$; $\widetilde{\alpha} = \widetilde{0}$ или $\widetilde{\alpha} = \widetilde{1}$ и соответственно $Z_{t,\widetilde{\alpha}}^n(\widetilde{x}^n)$ равно $S_{0,n-t}^n(\widetilde{x}^n)$ или $S_{t,n}^n(\widetilde{x}^n)$ для $\mathcal{L} = L$.

Положим $f(\widetilde{x}^s) = x_1 \oplus \dots \oplus x_s$, где $s \geqslant 2$, и определим $\widetilde{\alpha}_{s+1,n}$ равным $\widetilde{0}$ или $\widetilde{1}$ в зависимости от меры сложности $\mathcal{L} \in \{L, L_{0,c}, L_{1,c}\}$, чтобы выполнялось $\mathcal{L}_{n-s}^{\max} = \mathcal{L}\big(B_{s+1,\dots,n}^{n,\alpha_{s+1},\dots,\alpha_n}\big) = n-s$.

Тогда $k(f) = l(f) = 2^{s-1} > 1$, $\left|\widetilde{I}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}^{n-2-s}\right| = \binom{n-s-2}{t}$ и для $(s,t) \in Y_n = \big\{(s,t) \mid (t+s+2)\,2^{s-1} < n-s,\ s \geqslant 2\big\}$ из теоремы 1 следует, что

$$\log\mu(\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}) \geqslant 2^{s-1}\log\binom{n-2-s}{t}, \quad \log|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}| \geqslant 2^{s-1}\left(\binom{n-s-2}{t}-1\right).$$

(i) Из ограничения для параметров t и s имеем $t < n2^{1-s}$ и $s < \log(n-s) < \log n$. Тогда для $(s,t) \in Y_n$ и $s \to \infty$ при $n \to \infty$ выполняется $s+t = o(n)$ и

$$\begin{aligned}\log\mu(\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}) \geqslant 2^{s-1}\log\binom{n-2-s}{t} &\sim 2^{s-1}t\log\frac{n-2-s}{t}\\ &= 2^{s-1}(t+s+2)\,\frac{t}{t+s+2}\log\frac{n-2-s}{t}.\end{aligned}$$

Положим $s_n = \lceil \nu_n\rceil + 1$ и $t_n = \left\lfloor 2^{\nu_n-\lceil\nu_n\rceil}\left(1-\frac{2s_n}{n}\right)\log^p n\right\rfloor - s_n - 2$, где $\nu_n = \log n - p\log\log n$ и $p > 1$. Очевидно, что $s_n \sim \log n$, $t_n = \Theta\big(\log^p n\big)$ и

$$\frac{t_n}{t_n+s_n+2} \sim 1, \quad \log\frac{n-2-s_n}{t_n} \sim \log n \text{ при } n \to \infty.$$

При этом

$$n \lesssim n\left(1-\frac{2s_n}{n}\right) - \frac{2n}{\log^p n} \leqslant 2^{s_n-1}(t_n+s_n+2) \leqslant n\left(1-\frac{2s_n}{n}\right) < n-s_n,$$

так как $n = 2^{\nu_n}\log^p n \leqslant 2^{\lceil \nu_n \rceil}\log^p n \leqslant 2^{1+\nu_n}\log^p n \leqslant 2n$.

Следовательно, $\log \mu\left(\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}\right) \gtrsim n \log n$ при $n \to \infty$.

(ii) Для $(s,t) \in Y_n$ и $a_{s,t}(n) = 2^{s-1}\binom{n-s-2}{t}$ выполняется оценка

$$\log\left|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}\right| \geqslant 2^{s-1}\left(\binom{n-s-2}{t} - 1\right) = a_{s,t}(n) - 2^{s-1}.$$

Заметим, что из $x > y$ следует $x - 2^{s-1} > y - 2^s$ при $s \geqslant 2$. Покажем, что максимальное значение $a_{s,t}(n)$ в области

$$Y_n = \left\{(s,t) \mid 2 \leqslant s < \log n,\ t < t_{n,s} = (n-s)\, 2^{1-s} - s - 2 < n2^{1-s}\right\}$$

при достаточно больших n достигается для $(s,t) = \left(2, \lfloor t_{n,2} \rfloor\right)$, где $\lfloor t_{n,2} \rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 5$.

Очевидно, что $a_{2,t}(n) = 2\binom{n-4}{t} < 2\binom{n-4}{\lfloor t_{n,2} \rfloor}$ при $t < \lfloor t_{n,2} \rfloor < \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor$.

При $3 \leqslant s < \log n$ и $t_{n,s} < n2^{1-s} \leqslant n/4$ для достаточно больших n выполняется соотношение

$$a_{s,t}(n) < n\binom{n-4}{\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil} < 2\binom{n-4}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 5} = a_{2,\lfloor t_{n,2} \rfloor}(n).$$

Следовательно, $\log\left|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}\right| \geqslant a_{2,\lfloor t_{n,2} \rfloor}(n) - 2 = \Theta\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2 доказана.

Лемма 5. *Для аддитивной меры полиномиальной сложности $\mathcal{L}$ и целого $k \geqslant 2$ выполняется $k\mathcal{L}_r^{\max} < \mathcal{L}_{kr}^{\max}$ при достаточно больших r.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}(I) = q\left(L_0(I), L_1(I)\right)$ и $q(x,y) = ax + by + q_2(x,y)$, где $a, b \geqslant 0$ и $q_2(x,y) \not\equiv 0$ — многочлен степени 2 или выше с положительными коэффициентами и без линейных членов. Отметим, что

(i) если $k \geqslant 2$ и $q_2(x,y) > 0$, то $q_2(kx,ky) \geqslant k^2 q_2(x,y) > kq_2(x,y)$, т. е.

$$q(kx,ky) = akx + bky + q_2(kx,ky) > k(ax+by) + kq_2(x,y) = kq(x,y);$$

(ii) при условии $x + y = r$ и $x, y \geqslant 0$ для достаточно больших r максимальные значения многочленов $ax + by$ и $q_2(x,y)$ имеют порядок роста $\Theta(r)$ и не менее $\Theta\left(r^2\right)$ соответственно, т. е. максимальное значение $q(x,y)$ достигается, когда $q_2(x,y) > 0$.

Пусть I — грань ранга r, для которой $\mathcal{L}(I) = q\left(L_0(I), L_1(I)\right) = \mathcal{L}_r^{\max}$ и $q_2\left(L_0(I), L_1(I)\right) > 0$ при достаточно больших r. Тогда для грани I'

ранга kr, в которой число направлений, равных σ, для $\sigma = 0,1$ в k раз больше, чем в грани I, т. е. $L_\sigma(I') = kL_\sigma(I)$, выполняется соотношение

$$k\mathcal{L}_r^{\max} = kq\left(L_0(I), L_1(I)\right) < q\left(kL_0(I), kL_1(I)\right) = \mathcal{L}\left(I'\right) \leqslant \mathcal{L}_{kr}^{\max}.$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 3. Положим $f(\widetilde{x}^s) = x_1 \oplus \cdots \oplus x_s$, где $s \geqslant 2$, и определим $\widetilde{\alpha}_{s+1,n}$ так, что $\mathcal{L}_{n-s}^{\max} = \mathcal{L}\big(B_{s+1,\ldots,n}^{n,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n}\big)$. Тогда $k(f) = l(f) = 2^{s-1} > 1$, $\big|\widetilde{I}_{t,\widetilde{\alpha}_{s+1,n-2}}^{n-2-s}\big| \geqslant \frac{1}{t+1}\binom{n-s-2}{t}$ по лемме 1 и при $(s,t) \in Y_{n,\mathcal{L}} = \big\{(s,t) \mid 2^{s-1}\mathcal{L}_{t+s+2}^{\max} < \mathcal{L}_{n-s}^{\max},\ s \geqslant 2\big\}$ из теоремы 1 получаем

$$\log\mu\left(\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}\right) \geqslant 2^{s-1}\log\left(\frac{1}{t+1}\binom{n-s-2}{t}\right),$$

$$\log\left|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}\right| \geqslant 2^{s-1}\left(\frac{1}{t+1}\binom{n-s-2}{t} - 1\right).$$

Отметим, что $\log\mathcal{L}_{r_n}^{\max} = \Theta(\log r_n)$ для $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$ для аддитивной меры полиномиальной сложности $\mathcal{L}$.

Положим $t_n = \lceil \log^p n \rceil$, где $p > 1$, $\nu_n = \mathcal{L}_{n-t_n}^{\max} / \mathcal{L}_{2t_n+2}^{\max}$ и $s_n = \lfloor \log\nu_n \rfloor$. Тогда $s_n \leqslant \log\nu_n = \Theta(\log n) < t_n$, $\log\mathcal{L}_{2t_n+2}^{\max} = \Theta(\log\log n)$, $\log\nu_n \sim \log\mathcal{L}_{n-t_n}^{\max} \sim \log\mathcal{L}_n^{\max} = \Theta(\log n)$ при $n \to \infty$ и $\frac{1}{4}\nu_n \leqslant 2^{s_n-1} \leqslant \frac{1}{2}\nu_n < \nu_n$.

Следовательно,

$$(s_n, t_n) \in \big\{(s,t) \mid 2^{s-1}\mathcal{L}_{2t+2}^{\max} < \mathcal{L}_{n-t}^{\max},\ 2 \leqslant s < t\big\} \subseteq Y_{n,\mathcal{L}} \quad \text{при } n \to \infty,$$

так как $\mathcal{L}_{s+t+2}^{\max} \leqslant \mathcal{L}_{2t+2}^{\max}$ и $\mathcal{L}_{n-t}^{\max} \leqslant \mathcal{L}_{n-s}^{\max}$ при $s < t$. Тогда

$$\begin{aligned}\log\mu\left(\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}\right) &\geqslant 2^{s_n-1}\log\left(\frac{1}{t_n+1}\binom{n-2-s_n}{t_n}\right)\\ &\gtrsim \frac{1}{4}\nu_n\left(t_n\log\frac{n-2-s_n}{t_n} - \log(t_n+1)\right) \sim \frac{1}{4}\nu_n t_n\log n\\ &= \left(\mathcal{L}_n^{\max}\right)^{1-o(1)}\log n.\end{aligned}$$

(ii) Для $(s,t) \in Y_{n,\mathcal{L}}$ и $a_{s,t}(n) = 2^{s-1}\frac{1}{t+1}\binom{n-s-2}{t}$ имеем

$$\log\left|\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}\right| \geqslant 2^{s-1}\left(\frac{1}{t+1}\binom{n-s-2}{t} - 1\right) = a_{s,t}(n) - 2^{s-1}.$$

Если $2^{s-1}(t+s+2) < n-s$ и $t \to \infty$ при $n \to \infty$ из леммы 5 следует, что $2^{s-1}\mathcal{L}_{t+s+2}^{\max} < \mathcal{L}_{2^{s-1}(t+s+2)}^{\max} \leqslant \mathcal{L}_{n-s}^{\max}$. Тогда при $n \to \infty$

$$\widetilde{Y}_n = \{(s,t) \mid 2^{s-1}(t+s+2) < n-s,\ 2 \leqslant s < \log n < t\} \subseteq Y_{n,\mathcal{L}}.$$

Аналогично доказательству теоремы 2 покажем, что при достаточно больших n максимальное значение $a_{s,t}(n)$ в области $\widetilde{Y}_n$ достигается для $(s,t) = (2, \lfloor t_{n,2} \rfloor)$, где $\lfloor t_{n,2} \rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 5$ и

$$a_{2,\lfloor t_{n,2} \rfloor}(n) = \frac{2}{\lfloor t_{n,2} \rfloor + 1} \binom{n-4}{\lfloor t_{n,2} \rfloor} = \Theta(2^n / n^{3/2}).$$

При $s = 2$ выполнено $\frac{a_{2,t-1}(n)}{a_{2,t}(n)} = \frac{t+1}{n-3-t} < 1$ для $t < \frac{n}{2} - 2$.

При $3 \leqslant s < \log n$ имеем $t < t_{n,s} < n/4$ и при достаточно больших n выполняется соотношение

$$a_{s,t}(n) = 2^{s-1} \frac{1}{t+1} \binom{n-s-2}{t} < n \binom{n-4}{\lceil \frac{n}{4} \rceil} < a_{2,\lfloor t_{n,2} \rfloor}(n).$$

Следовательно, $\log |\mathcal{F}_{n,\mathcal{L}}| \geqslant a_{2,\lfloor t_{n,2} \rfloor}(n) - 2 = \Theta(2^n / n^{3/2})$ при $n \to \infty$. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев Ю. Л.** Массивные классы плотных булевых функций // Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем. № 32. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1978. С. 21–33.
2. **Васильев Ю. Л., Глаголев В. В.** Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. М.: Наука, 1974. С. 99–148.
3. **Еремеев А. В., Заозерская Л. А., Колоколов А. А.** Задача о покрытии: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7, № 2. С. 22–46.
4. **Леонтьев В. К.** Дискретная оптимизация // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 2. С. 338–352.
5. **Чухров И. П.** О минимальных комплексах граней в единичном кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 3. С. 79–99.
6. **Чухров И. П.** О мерах сложности комплексов граней в единичном кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 6. С. 77–94.
7. **Coudert O.** On solving covering problems // Proc. 33rd Design Automation Conf. (Las Vegas, NV, June 3–7, 1996). New York: ACM, 1996. P. 197–202.
8. **Coudert O., Sasao T.** Two-level logic minimization // Logic synthesis and verification. Norwell, MA: Kluwer Acad. Publ., 2001. P. 1–27. (Springer Int. Ser. Eng. Comp. Sci.; Vol. 654.)

Чухров Игорь Петрович

Статья поступила
16 января 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
May–June 2015. Volume 22, No. 3. P. 75–97

UDC 519.714.7 DOI: 10.17377/daio.2015.22.471

ON THE PROBLEM OF MINIMIZING A SINGLE SET OF BOOLEAN FUNCTIONS

I. P. Chukhrov[1]
[1]Institute of Computer Aided Design RAS,
19/18 2-nd Brestskaya St., 123056 Moscow, Russia
e-mail: chip@icad.org.ru

Abstract. We study the set of Boolean functions that consist of a single connected component, have minimal complexes of faces which are not shortest and do not satisfy the sufficient condition for minimality based on the notion of an independent set of vertices. The independent minimization for the connected components and feasibility of sufficient conditions for the minimality can not be applied to minimizing of such functions. For this set of functions, we obtain lower bounds on the power and maximal number of complexes of faces which are minimal with respect to additive measures of linear and polynomial complexity. Ill. 1, bibliogr. 8.

Keywords: Boolean function, unit cube, face, complex of faces, additive complexity measure, shortest complex of faces, minimal complex of faces.

REFERENCES

1. **Yu. L. Vasil'ev,** Massive classes of dense Boolean functions, in *Metody diskretnogo analiza v sinteze upravlyayushchikh sistem* (Methods of Discrete Analysis in Synthesis of Control Systems), Vol. 32, pp. 21–33, Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1978.
2. **Yu. L. Vasil'ev** and **V. V. Glagolev,** Metric properties of disjunctive normal forms, in *Diskretnaya matematika i matematicheskie voprosy kibernetiki* (Discrete Mathematics and Mathematical Problems of Cybernetics), Vol. 1, pp. 99–148, Nauka, Moscow, 1974.
3. **A. V. Eremeev, L. A. Zaozerskaya,** and **A. A. Kolokolov,** The set covering problem: complexity, algorithms, and experimental study, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **7**, No. 2, 22–46, 2000.
4. **V. K. Leont'ev,** Discrete optimization, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **47**, No. 2, 338–352, 2007. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.,* **47**, No. 2, 328–340, 2007.

5. **I. P. Chukhrov,** On minimal complexes of faces in the unit cube, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **19**, No. 3, 79–99, 2012.
6. **I. P. Chukhrov,** On complexity measures of complexes of faces in the unit cube, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **20**, No. 6, 77–94, 2013. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **8**, No. 1, 9–19, 2014.
7. **O. Coudert,** On solving covering problems, in *Proc. 33rd Design Automation Conf., Las Vegas, NV, USA, June 3–7, 1996,* pp. 197–202, ACM, New York, 1996.
8. **O. Coudert** and **T. Sasao,** Two-level logic minimization, in S. Hassoun and T. Sasao, eds., *Logic Synthesis and Verification,* pp. 1–27, Kluwer Acad. Publ., Norwell, MA, 2002. (Springer Int. Ser. Eng. Comp. Sci.; Vol. 654.)

Igor P. Chukhrov

Received
16 January 2015