ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2015. Том 22, № 4. С. 5–20

УДК 519.8 DOI: 10.17377/daio.2015.22.474

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМА НАХОЖДЕНИЯ В ГРАФЕ МИНИМАЛЬНОГО ОСТОВНОГО ДЕРЕВА С ОГРАНИЧЕННЫМ СНИЗУ ДИАМЕТРОМ *)

Э. Х. Гимади[1,2], *Е. Ю. Шин*[1]
[1]Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
[2]Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия
e-mail: gimadi@math.nsc.ru, Shinus90@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются графы с классом матриц, элементы которых — веса рёбер — выбираются случайно и независимо из неограниченного сверху интервала с непрерывной функцией распределения. Проведён вероятностный анализ приближённого алгоритма с квадратичной временно́й сложностью в случае экспоненциального распределения. Обоснованы достаточные условия асимптотической точности алгоритма. Аналогичные условия получены также в случае усечённо-нормального распределения. Ил. 2, библиогр. 17.

Ключевые слова: остовное дерево, полиномиальный алгоритм, вероятностный анализ, оценки качества алгоритма, асимптотическая точность.

Введение

Для многих NP-трудных задач дискретной оптимизации на случайных входных данных актуальным является вероятностный анализ быстрых приближённых алгоритмов. Среди характеристик качества работы алгоритма выделяют его относительную погрешность и вероятность несрабатывания. Оценки этих параметров получают в предположении, что известно распределение входных данных задачи, и оценки качества алгоритма зависят от вида распределения этих данных.

Известно, что классическая задача MST (Minimum Spanning Tree), состоящая в отыскании в неориентированном графе остовного дерева

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15–01–00976 и 13–07–00070) и целевой программы Президиума РАН.

минимального веса, полиномиально разрешима [5]. Однако некоторые обобщения этой задачи оказываются труднорешаемыми (см., например, [10, 12, 15, 17] и библиографию в них). В частности, таковой является задача о нахождении MST с ограниченным сверху диаметром, сокращённо BDMST (Bounded Diameter MST). Для её точного решения авторами работы [11] предложен алгоритм, базирующийся, по их словам, на новом подходе к 0-1 ЦЛП (целочисленному линейному программированию). Однако в связи со сложностью задачи применение точных методов ограничивается размерностью графа в 100 вершин. Быстрые эвристические алгоритмы для этой задачи зачастую основываются на алгоритме Прима для задачи MST. Например, в [9] искомое остовное дерево строится за время $O(n^3)$, начиная с одной вершины, присоединением на каждом шаге ребра наименьшего веса. При этом на каждом шаге производится проверка условия на диаметр и ненужные ветви отбрасываются. В [13] этот алгоритм модифицирован предварительным выбором стартовой вершины. Модифицированный алгоритм имеет сложность $O(n^2)$. Наиболее работоспособные результаты показали эволюционные алгоритмы, описанные, например, в [14, 16].

Обобщение задачи MST, рассматриваемой в данной статье, заключается в наложении ограничения снизу на диаметр искомого остовного дерева в полном взвешенном неориентированном графе. Далее такую задачу называем DBBMST (Diameter Bounded from Below MST). Постановка задачи DBBMST впервые описана в [4]. Там же представлен полиномиальный приближённый алгоритм, для которого для задач на случайных входных данных (весах рёбер неориентированного графа) из класса $\mathrm{UNI}(a_n, b_n)$ получены достаточные условия асимптотической точности. Класс $\mathrm{UNI}(a_n, b_n)$ состоит из случайных независимых равномерно распределённых величин в ограниченном снизу и сверху интервале $[a_n, b_n]$, $0 < a_n < b_n < \infty$.

Данная работа посвящена вероятностному анализу алгоритма решения задачи DBBMST на случайных входах с неограниченным сверху носителем, а именно с экспоненциальным и усечённо-нормальным распределением. Для такого сорта данных не удаётся впрямую использовать оценки относительной погрешности вида $b_n/a_n \leqslant o(n/\ln n)$, полученные в [4], поскольку в нашем случае $b_n = \infty$. Поэтому в статье реализована модифицированная техника, позволившая получить приемлемые оценки относительной погрешности, вероятности несрабатывания алгоритма и соответствующие (достаточные) условия асимптотической точности алгоритма.

1. Постановка задачи DBBMST

Пусть задан полный неориентированный граф $G_n = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{1, \ldots, n\}$, в котором каждому ребру $e = (i, j) \in E$ приписана стоимость (вес) $w_{ij} \geqslant 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Далее будем использовать следующие обозначения:

$\mathfrak{D}_n = \{D_n\}$ — множество всех остовных деревьев в G_n,

$W(G') = \sum\limits_{e \in G'} w(e)$ — вес подграфа G' (сумма весов всех его рёбер) графа G_n,

$d(D_n)$ — диаметр дерева D_n (длина максимальной относительно числа рёбер простой цепи в D_n),

$\{d_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, — некоторая последовательность натуральных чисел,

$\widetilde{\mathfrak{D}}_n = \{D_n \in \mathfrak{D}_n \mid d(D_n) \geqslant d_n\}$.

Задача заключается в нахождении в графе G_n остовного дерева D_n минимального веса в множестве $\widetilde{\mathfrak{D}}_n$.

В общем случае данная задача NP-трудна [4].

При $d_n = n-1$ задача совпадает с классической задачей о нахождении минимальной гамильтоновой цепи в G_n [5]. В [1, 3, 6] дан вероятностный анализ полиномиального алгоритма и условия асимптотической точности решения задачи коммивояжёра на случайных входных данных на ограниченном [3, 6] и на неограниченном сверху [2] интервалах. Из этих работ следуют аналогичные свойства приближённого решения задачи, рассматриваемой в настоящей статье. Поэтому далее нас будет интересовать случай $d_n \leqslant n - 2$.

Утверждение 1 [4]. *При $d_n = O(n^c)$, где $0 < c < 1$ и c не зависит от n, задача* DBBMST NP-*трудна.*

Утверждение 2 [4]. *Если d_n — константа, то задача* DBBMST *полиномиально разрешима.*

2. Описание алгоритма $\widetilde{A}$ решения задачи DBBMST

Опишем алгоритм $\widetilde{A}$, состоящий из двух этапов.

Этап 1. Начиная с произвольной вершины i_0 в G_n, строится простая цепь $C = \{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{d-1}, i_d)\}$ за d шагов.

На шаге m, $1 \leqslant m \leqslant d$, к текущей цепи $\{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{m-2}, i_{m-1})\}$ добавляется ребро (i_{m-1}, i_m), $i_m \notin \{i_0, i_1, \ldots, i_{m-1}\}$, с наименьшим весом.

Этап 2. Находится минимальное остовное дерево $\widetilde{D}_n \in \mathfrak{D}_n$, содержащее цепь $C = \{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{d-1}, i_d)\}$, построенную на этапе 1.

Дерево $\widetilde{D}_n$ принимается в качестве приближённого решения исходной задачи. Такое дерево может быть найдено с использованием, например, алгоритма Прима для задачи о минимальном остовном дереве [8], имеющего временну́ю сложность $O(n^2)$.

Замечание 1. Алгоритм $\widetilde{A}$ имеет временну́ю сложность $O(n^2)$.

Следующее структурное свойство решения, получаемого алгоритмом $\widetilde{A}$, будет использовано при его анализе в п. 4.1.

Лемма 1. *Пусть w_0 — вес минимального остовного дерева из $\mathfrak{D}_n$, т. е. $w_0 = \min\limits_{D_n \in \mathfrak{D}_n} w(D_n)$. Тогда вес $w(\widetilde{D}_n)$ остовного дерева $\widetilde{D}_n$, построенного алгоритмом $\widetilde{A}$, удовлетворяет неравенству*

$$w(\widetilde{D}_n) \leqslant w_0 + w(C) - da_n.$$

Доказательство. Ясно, что $\widetilde{D}_n$ является минимальным остовным деревом из $\mathfrak{D}_n$ в задаче с модифицированной функцией w'_{ij} весов рёбер в графе G_n, где

$$w'_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{если } (i,j) \notin C, \\ a_n, & \text{если } (i,j) \in C. \end{cases}$$

Стало быть, справедливо равенство

$$\sum_{(i,j)\in \widetilde{D}_n} w'_{ij} = \sum_{(i,j)\in C} w'_{ij} + w(\widetilde{D}_n) - w(C) = da_n + w(\widetilde{D}_n) - w(C).$$

С другой стороны, так как $w'_{ij} \leqslant w_{ij}$, имеем

$$\sum_{(i,j)\in \widetilde{D}_n} w'_{ij} = \min_{D_n \in \mathfrak{D}_n} \sum_{(i,j)\in D_n} w'_{ij} \leqslant \min_{D_n \in \mathfrak{D}_n} \sum_{(i,j)\in D_n} w_{ij} = \min_{D_n \in \mathfrak{D}_n} w(D_n) = w_0.$$

Из двух последних соотношений следует утверждение леммы. Лемма 1 доказана.

3. Вспомогательные факты

При анализе алгоритма будем использовать следующие определения [3].

Определение 1. Алгоритм A имеет оценки относительной погрешности $\varepsilon_A(n)$ и вероятности несрабатывания $\delta_A(n)$ в классе $\mathcal{K}_n$ задач размерности n, если для каждого n выполнено неравенство

$$\mathbb{P}\left\{\frac{|f_A(I)-f^*(I)|}{f^*(I)} > \varepsilon_A(n)\right\} \leqslant \delta_A(n),$$

где $f^*(I)$ — значение оптимума для индивидуальной задачи I, $f_A(I)$ — значение функционала, полученное при помощи алгоритма A, $\mathbb{P}\{J\}$ — вероятность события J.

Определение 2. Алгоритм A с оценками $(\varepsilon_A(n), \delta_A(n))$ называется *асимптотически точным* в классе задач $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, если

$$\varepsilon_A(n) \to 0, \quad \delta_A(n) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Далее все построения и рассуждения будем вести в предположении непрерывной функции распределения, зафиксировав ограничение снизу на диаметр остовного дерева величиной, равной $d_n \leqslant n-2$.

Для проведения вероятностного анализа алгоритма потребуется

Теорема Петрова [7]. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины и существуют положительные постоянные $g_1, g_2, \ldots, g_n$ и T такие, что $Ee^{tX_k} \leqslant e^{\frac{1}{2}g_k t^2}$, $k = 1, \ldots, n$, при любых t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Пусть $S = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ и $G = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$. Тогда*

$$\mathbb{P}\{S > x\} \leqslant \begin{cases} \exp\left(-\frac{x^2}{2G}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant GT, \\ \exp\left(-\frac{Tx}{2}\right) & \text{при } x > GT. \end{cases}$$

4. Вероятностный анализ алгоритма $\widetilde{A}$

4.1. Вычисление относительной погрешности и вероятности несрабатывания. Обозначим через η_k случайную величину, равную минимальному значению среди k случайных независимых величин $\widetilde{w}_{ij} = w_{ij} - a_n$, рассматриваемых на $(n-k)$-м основном шаге первого этапа алгоритма $\widetilde{A}$. Тогда вес l_m ребра, выбранного на m-м шаге первого этапа, можно записать в виде $l_m = a_n + \eta_{n-m}$, $m = 1, \ldots, d$, а общий вес найденной цепи C — в виде

$$w(C) = da_n + \sum_{k=n-d}^{n-1} \eta_k.$$

Оценим сверху вероятности несрабатывания $\delta_{\widetilde{A}}(n)$ алгоритма $\widetilde{A}$.

Имея в виду, что $f_{\widetilde{A}} = w(\widetilde{D}_n)$, $na_n \leqslant w_0 \leqslant f^*$, а также лемму 1, получим

$$\mathbb{P}\{f_{\widetilde{A}} > (1+\varepsilon_{\widetilde{A}}(n))f^*\} \leqslant \mathbb{P}\{w_0 + w(C) - da_n > (1+\varepsilon_{\widetilde{A}}(n))f^*\}$$
$$\leqslant \mathbb{P}\{w(C) - da_n > \varepsilon_{\widetilde{A}}(n)f^*\} \leqslant \mathbb{P}\left\{da_n + \sum_{k=n-d}^{n-1}\eta_k - da_n > \varepsilon_{\widetilde{A}}(n)na_n\right\}$$
$$= \mathbb{P}\left\{\sum_{k=n-d}^{n-1}\eta_k > \varepsilon_{\widetilde{A}}(n)na_n\right\}.$$

4.2. Случай показательного распределения. В случае показательного закона с параметром α плотность распределения недиагональных элементов матрицы (w_{ij}) (весов рёбер между парами вершин графа) имеет следующий вид (см. рис. 1):

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\exp\left(-\frac{x-a_n}{\alpha}\right), & \text{если } a_n \leqslant x < \infty, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

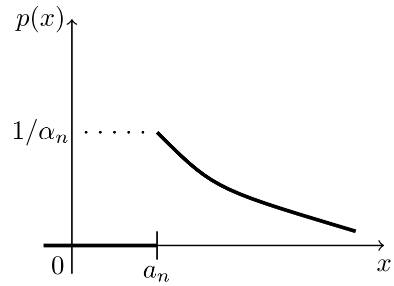

Рис. 1. График плотности показательного распределения

Далее перейдём к обозначениям весов графа в нормированной форме: $\widetilde{w}_{ij} = \frac{w_{ij}-a_n}{\alpha}$. Теперь плотность распределения недиагональных элементов матрицы $(\widetilde{w}_{ij})$ записывается в виде

$$\mathfrak{p}(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } 0 \leqslant x < \infty, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для соответствующей функции распределения имеем $\mathfrak{P}(x) = 1 - e^{-x}$.

Случайную величину ξ_k определим как минимум среди k элементов матрицы $\widetilde{w}_{ij}$, рассматриваемых на $(n-k)$-м основном шаге первого этапа

алгоритма $\widetilde{A}$. Нетрудно убедиться, что для функции распределения этой величины справедлива формула

$$\mathfrak{P}(\xi_k) = 1 - (1 - \mathfrak{P}(x))^k.$$

Далее через $\mathbb{E}\eta$ обозначаем математическое ожидание случайной величины η.

Лемма 2. $\mathbb{E}\xi_k = 1/k$.

Доказательство. С учётом указанных выше формул имеем

$$\mathbb{E}\xi_k = \int\limits_0^\infty x\, d\,\mathfrak{P}(\xi_k) = \int\limits_0^\infty xk(1 - \mathfrak{P}(x))^{k-1}\, d\,\mathfrak{P}(x) = \int\limits_0^\infty kxe^{-kx}\, dx$$

$$= -xe^{-kx}\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-kx}\, dx = -\frac{1}{k}e^{-kx}|_0^\infty = 1/k.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. $\mathbb{E}\sum\limits_{k=n-d}^{n-1}\xi_k \leqslant \ln(n)$.

Доказательство.

$$\sum_{k=n-d}^{n-1}\mathbb{E}\xi_k = \sum_{k=n-d}^{n-1} 1/k \leqslant \ln(n).$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $T = 1$, $g_k = 3/k^2$, $d < n - 1$. *Тогда*

$$\mathbb{E}e^{t(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k)} \leqslant \exp(g_k t^2/2) \tag{1}$$

при любых $n - d \leqslant k < n$ *и* $0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство. Для величины $\mathbb{E}e^{t\xi_k}$ верна цепочка равенств

$$\mathbb{E}e^{t\xi_k} = \int\limits_0^\infty e^{tx}\, d\,\mathfrak{P}(\xi_k) = \int\limits_0^\infty e^{tx}ke^{-kx}\, dx = \int\limits_0^\infty ke^{-(k-t)x}\, dx$$

$$= -\frac{k}{k-t}e^{-(k-t)x}|_0^\infty = \frac{1}{1-t/k} = \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{t}{k}\right)^m = 1 + \frac{t}{k} + \left(\frac{t}{k}\right)^2\frac{1}{1-t/k}.$$

С учётом верного в условиях теоремы неравенства

$$\frac{t}{k} \leqslant \frac{T}{n-d} \leqslant \frac{1}{2}$$

оценим величину $\mathbb{E}e^{t\xi_k}$ сверху:

$$\mathbb{E}e^{t\xi_k} \leqslant 1 + \frac{t}{k} + 2\left(\frac{t}{k}\right)^2 = 1 + \frac{t}{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{k}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{t}{k}\right)^2$$

$$\leqslant \left(1+\frac{t}{k}+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{k}\right)^2\right)\left(1+\frac{3}{2}\left(\frac{t}{k}\right)^2\right) \leqslant e^{t/k}\exp\left(\frac{3}{2}\left(\frac{t}{k}\right)^2\right) = e^{\mathbb{E}\xi_k}\exp\left(\frac{g_k t^2}{2}\right),$$

откуда непосредственно следует (1). Лемма 4 доказана.

Итак, величины $X_k = \xi_k - \mathbb{E}\xi_k,\ n-d \leqslant k < n$, удовлетворяют условиям теоремы Петрова с параметрами $T = 1$, $g_k = 3/k^2$, $n-d \leqslant k < n$, $G = 3\sum\limits_{k=n-d}^{n-1}\frac{1}{k^2} < 1$.

Теорема 1. *Пусть элементы матрицы расстояний являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами, принимающими значения из неограниченной сверху области $[a_n, \infty)$, $a_n > 0$, согласно показательному распределению с параметром α. Тогда алгоритм $\widetilde{A}$ строит решение задачи* DBBMST *с оценками относительной погрешности*

$$\varepsilon_{\widetilde{A}}(n) = (1+\lambda)\left(\frac{\alpha_n/a_n}{n/\ln n}\right) \tag{2}$$

и вероятности несрабатывания

$$\delta_{\widetilde{A}}(n) = n^{-\lambda/2}, \tag{3}$$

где $\lambda > 1$. Алгоритм $\widetilde{A}$ асимптотически точен при

$$\frac{\alpha_n}{a_n} = o\left(\frac{n}{\ln n}\right). \tag{4}$$

Доказательство. Продолжим неравенство (1):

$$\mathbb{P}\{f_{\widetilde{A}} > (1+\varepsilon_{\widetilde{A}}(n))f^*\} \leqslant \mathbb{P}\bigg\{\sum_{k=n-d}^{n-1} \eta_k > \varepsilon_{\widetilde{A}}(n) n a_n\bigg\}$$
$$= \mathbb{P}\bigg\{\sum_{k=n-d}^{n-1} \xi_k > \varepsilon_{\widetilde{A}}(n) n a_n/\alpha\bigg\} = \mathbb{P}\bigg\{\sum_{k=n-d}^{n-1} X_k > \varepsilon_{\widetilde{A}}(n) - \mathbb{E}\sum_{k=n-d}^{n-1} \xi_k\bigg\}$$
$$\leqslant \mathbb{P}\bigg\{\sum_{k=n-d}^{n-1} X_k > \varepsilon_{\widetilde{A}}(n) n a_n/\alpha - \ln n\bigg\}.$$

Положив относительную погрешность равной

$$\varepsilon_{\widetilde{A}}(n) = (1+\lambda)\frac{a_n/\alpha_n}{n/\ln n}$$

с константой $\lambda > 1$, получаем

$$\mathbb{P}\{f_{\widetilde{A}} > (1+\varepsilon_{\widetilde{A}}(n))f^*\} \leqslant \mathbb{P}\bigg\{\sum_{k=n-d}^{n-1} X_k > \lambda \ln n\bigg\}.$$

Положим $x = \lambda \ln n$. Поскольку при достаточно больших n выполняется неравенство $GT < 1 < x$, по теореме Петрова имеем

$$\mathbb{P}\{f_{\widetilde{A}} > (1+\varepsilon_{\widetilde{A}}(n))f^*\} \leqslant \exp\left(-\frac{Tx}{2}\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{\lambda \ln n}{2}\right) = n^{-\lambda/2} = \delta_{\widetilde{A}}(n) \to 0$$

при $n \to \infty$.

Итак, для задачи DBBMST в случае показательного распределения определены оценки (2) и (3) качества алгоритма $\widetilde{A}$ и условие (4) его асимптотической точности. Теорема 1 доказана.

4.3. Случай усечённо-нормального распределения. В случае усечённо-нормального закона плотность распределения недиагональных элементов матрицы (w_{ij}) имеет следующий вид (см. рис. 2):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n{}^2}} \exp\big(-\frac{(x-a_n)^2}{2\sigma_n{}^2}\big), & \text{если } a_n \leqslant x < \infty, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

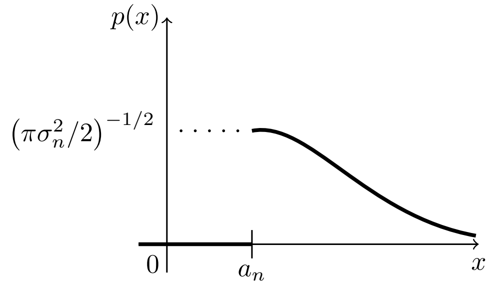

Рис. 2. График плотности усечённо-нормального распределения

Пусть $\widetilde{w}_{ij} = \frac{w_{ij}-a_n}{\sigma}$. Функции плотности и распределения недиагональных элементов матрицы $(\widetilde{w}_{ij})$ равны соответственно

$$\mathfrak{f}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2}, & \text{если } 0 \leqslant x < \infty, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad \mathfrak{F}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x e^{-u^2/2}\, du.$$

Говорим, что функция распределения $\mathfrak{F}_1(x)$ *мажорирует функцию распределения* $\mathfrak{F}_2(x)$, если $\mathfrak{F}_1(x) \geqslant \mathfrak{F}_2(x)$ для всякого x.

Утверждение 3. *Усечённо-нормальная функция распределения $\mathfrak{F}(x)$ с параметром σ мажорирует экспоненциальную функцию распределения с параметром $\alpha = 2\sigma$:*

$$\mathfrak{F}(x) \geqslant \mathfrak{P}(x/2) \quad \text{для всех } x \geqslant 0. \tag{5}$$

Доказательство. Разность левой и правой частей в (5) обозначим через

$$h(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x e^{-u^2/2}\, du - (1 - e^{-\frac{x}{2}}).$$

Нетрудно видеть, что для функции $h(x)$ и её производной

$$h'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

верно: $h(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$, $h'(0) > 0$. Поскольку на положительной полуоси равенство $h'(x) = 0$ выполняется только в единственной точке $x_0 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 12\ln(2) - 4\ln(\pi)}) \geqslant 0$, имеем $h(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$, откуда следует справедливость утверждения. Утверждение 3 доказано.

Лемма 5 [1]. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения $F(x)$, $\widehat{F}(x)$ — функция распределения случайной величины $\xi = \min\limits_{i=1,\ldots,k}(\xi_i), \eta_1, \ldots, \eta_k$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения $G(x)$, $\widehat{G}(x)$ — функция распределения случайной величины $\eta = \min\limits_{i=1,\ldots,k}(\eta_i)$. Тогда при любом x*

$$F(x) \leqslant G(x) \Rightarrow \widehat{F}(x) \leqslant \widehat{G}(x).$$

Лемма 6 [1]. *Пусть $P_\xi, P_\eta, P_\zeta, P_\chi$ — функции распределения случайных величин ξ, η, ζ, χ соответственно, причём ξ и ζ независимы, η и χ независимы. Тогда*

$$(\forall x\ P_\xi(x) \leqslant P_\eta(x)) \wedge (\forall y\ P_\zeta(y) \leqslant P_\chi(y)) \Rightarrow (\forall z\ P_{\xi+\zeta}(z) \leqslant P_{\eta+\chi}(z)).$$

Лемма 7 [1] *Пусть функция распределения $F(x)$ случайных величин такова, что $F(x) \geqslant P(x)$. Тогда для алгоритма $\widetilde{A}$ справедливы те же оценки качества $(\varepsilon_{\widetilde{A}}, \delta_{\widetilde{A}})$, что и в случае входов с функцией распределения $P(x)$.*

Положим $F(x) = \mathfrak{F}(x)$ и $P(x) = \mathfrak{P}(x/2)$. Из утверждения 3 и лемм 5–7 следует справедливость следующей теоремы в случае усечённо-нормального распределения.

Теорема 2. *Пусть элементы матрицы расстояний являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами, принимающими значения из неограниченной сверху области $[a_n, \infty)$, $a_n > 0$, согласно усечённо-нормальному распределению с параметром σ. Тогда алгоритм $\widetilde{A}$ строит решение задачи BMST с оценками относительной погрешности*

$$\varepsilon_{\widetilde{A}}(n) = (1+\lambda)\left(\frac{\sigma_n/a_n}{2n/\ln n}\right) \tag{6}$$

и вероятности несрабатывания

$$\delta_{\widetilde{A}}(n) = n^{-\lambda/2}, \tag{7}$$

где $\lambda > 1$. Алгоритм $\widetilde{A}$ асимптотически точен при

$$\frac{\sigma_n}{a_n} = o\left(\frac{n}{\ln n}\right). \tag{8}$$

Заключение

В данной работе проведён вероятностный анализ приближённого алгоритма квадратичной временно́й сложности для решения задачи о нахождении в полном графе минимального остовного дерева с ограниченным снизу диаметром в случае, когда элементы матрицы расстояний — независимые одинаково распределённые случайные величины из неограниченной сверху области данных. Для двух распределений такого вида (показательного и усечённо-нормального) получены оценки качества алгоритма и условия его асимптотической точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гимади Э. Х., Глазков Ю. В.** Об асимптотически точном алгоритме решения одной модификации трёхиндексной планарной задачи о назначениях // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2006. Т. 13, № 1. С. 10–26.
2. **Гимади Э. Х., ЛеГаллу А., Шахшнейдер А. В.** Вероятностный анализ одного алгоритма приближённого решения задачи коммивояжёра на неограниченных сверху входных данных // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15, № 1. С. 23–43.
3. **Гимади Э. Х., Перепелица В. А.** Асимптотический подход к решению задачи коммивояжёра // Управляемые системы. Сб. науч. тр. Вып. 12. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1974. С. 35–45.
4. **Гимади Э. Х., Сердюков А. И.** Об одном алгоритме нахождения минимального остова с ограниченным снизу диаметром // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 2. С. 3–11.
5. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М: Мир, 1982. 416 с.
6. **Перепелица В. А., Гимади Э. Х.** Задача нахождения минимального гамильтонова цикла в взвешенном графе // Дискрет. анализ. Сб. науч. тр. Вып. 15. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1969. С. 57–65.
7. **Петров В. В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987. 317 с.
8. **Прим Р. К.** Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения // Кибернетический сборник. Вып. 2. М.: Мир, 1961. С. 95–107.
9. **Abdalla A., Deo N., Gupta P.** Random-tree diameter and the diameter constrained MST // Congr. Numerantium. 2000. Vol. 144. P. 161–182.
10. **Bertsimas D. J.** The probabilistic minimum spanning tree problem // Networks. 1990. Vol. 20, No. 3. P. 245–275.
11. **Gruber M., Raidl G. R.** A new 0–1 ILP approach for the bounded-diameter minimum spanning tree problem // Proc. 2nd Int. Network Optimization Conf. (Lisbon, Portugal, March 20–23, 2005). 2005. Vol. 1. P. 178–185.

12. **Johnson D. S., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G.** The complexity of the network design problem // Networks. 1978. Vol. 8, No. 4. P. 279–285.
13. **Julstrom B. A.** Greedy heuristics for the bounded-diameter minimum spanning tree problem // J. Exp. Algorithmics. 2009. No. 14. P. 1–14.
14. **Julstrom B. A., Raidl G. R.** A permutation-coded evolutionary algorithm for the bounded-diameter minimum spanning tree problem // Genet. Evol. Comput. Conference's Workshops Proc., Workshop Anal. Des. Represent. Operat., Chicago, USA, July 12–16, 2003, pp. 2–7, 2003. Available at https://www.ac.tuwien.ac.at/files/pub/julstrom-03.pdf. Accessed June 11, 2015.
15. **Ozeki K., Yamashita T.** Spanning trees: A survey // Graphs Comb. 2011. Vol. 27, No. 1. P. 1–26.
16. **Raidl G. R., Julstrom B. A.** Greedy heuristics and an evolutionary algorithm for the bounded-diameter minimum spanning tree problem // Proc. 2003 ACM Symp. Applied Computing (Melbourne, FL, March 9–12, 2003). New York: ACM Press, 2003. P. 747–752.
17. **Jothi R., Raghavachari B.** Approximation algorithms for the capacitated minimum spanning tree problem and its variants in network design // ACM Trans. Algorithms. 2005. Vol. 1, No. 2. P. 265–282.

Гимади Эдуард Хайрутдинович,
Шин Екатерина Юрьевна

Статья поступила
10 февраля 2015 г.

Исправленный вариант —
4 мая 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
July–August 2015. Volume 22, No. 4. P. 5–20

UDC 519.8 DOI: 10.17377/daio.2015.22.474

PROBABILISTIC ANALYSIS OF AN ALGORITHM FOR THE MINIMUM SPANNING TREE PROBLEM WITH DIAMETER BOUNDED FROM BELOW

E. Kh. Gimadi[1,2], *E. Yu. Shin*[1]
[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
[2]Novosibirsk State University,
2 Pirogov St., 630090 Novosibirsk, Russia
e-mail: gimadi@math.nsc.ru, Shinus90@yandex.ru

Abstract. Graphs with distance matrices are considered with weights of edges being independent random variables distributed on the interval unbounded from above. Probabilistic analysis of a polynomial algorithm is performed. In the cases of exponential and truncated normal distribution, conditions for asymptotic optimality are presented. Ill. 2, bibliogr. 17.

Keywords: spanning tree, polynomial algorithm, the probabilistic analysis, performance guarantee, asymptotic optimality.

REFERENCES

1. **E. Kh. Gimadi** and **Yu. V. Glazkov,** An asymptotically optimal algorithm for one modification of planar three-index assignment problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **13**, No. 1, 10–26, 2006. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **1**, No. 4, 442–452, 2007.
2. **E. Kh. Gimadi, A. Le Gallou,** and **A. V. Shakhshneyder,** Probabilistic analysis of an approximation algorithm for the traveling salesman problem on unbounded above instances, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **15**, No. 1, 23–43, 2008. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **3**, No. 2, 207–221, 2009.
3. **E. Kh. Gimadi** and **V. A. Perepelitsa,** An asymptotic approach to the traveling salesman problem, in *Upravlyaemye sistemy* (Controlled Systems), Vol. 12, pp. 35–45, Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1974.
4. **E. Kh. Gimadi** and **A. I. Serdyukov,** An algorithm for finding the minimum spanning tree with a diameter bounded from below, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **7**, No. 2, 3–11, 2000.

5. M. R. Garey and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness,* Freeman, San Francisco, 1979. Translated under the title *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi,* Mir, Moscow, 1982.

6. V. A. Perepelitsa and **E. Kh. Gimadi,** The minimum Hamiltonian cycle problem in a weighted graph, in *Diskretnyi analiz* (Discrete Analysis), Vol. 15, pp. 57–65, Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1969.

7. V. V. Petrov, *Predelnye teoremy dlya summ nezavisimykh sluchainykh velichin* (Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables), Nauka, Moscow, 1987.

8. R. C. Prim, Shortest connection networks and some generalizations, *Bell Syst. Techn. J.,* **36**, No. 6, 1389–1401, 1957. Translated in *Kiberneticheskii sbornik* (Cybernetic Sbornik), Vol. 2, pp. 95–107, Mir, Moscow, 1961.

9. A. Abdalla, N. Deo, and **P. Gupta,** Random-tree diameter and the diameter-constrained MST, *Congr. Numerantium,* **144**, 161–182, 2000.

10. D. J. Bertsimas, The probabilistic minimum spanning tree problem, *Networks,* **20**, No. 3, 245–275, 1990.

11. M. Gruber and **G. R. Raidl,** A new 0–1 ILP approach for the bounded-diameter minimum spanning tree problem, in L. Gouveia and C. Mourao, eds., *Proc. 2nd Int. Netw. Optim. Conf., Lisbon, Portugal, Mar. 20–23, 2005,* Vol. 1, pp. 178–185, 2005.

12. D. S. Johnson, J. K. Lenstra, and **A. H. G. Rinnooy Kan,** The complexity of the network design problem, *Networks,* **8**, No. 4, 279–285, 1978.

13. B. A. Julstrom, Greedy heuristics for the bounded-diameter minimum spanning tree problem, *J. Exp. Algorithmics,* **14**, 1–14, 2009.

14. B. A. Julstrom and **G. R. Raidl,** A permutation-coded evolutionary algorithm for the bounded-diameter minimum spanning tree problem, in *Genet. Evol. Comput. Conference's Workshops Proc., Workshop Anal. Des. Represent. Operat., Chicago, USA, July 12–16, 2003,* pp. 2–7, 2003. Available at https://www.ac.tuwien.ac.at/files/pub/julstrom-03.pdf. Accessed June 11, 2015.

15. K. Ozeki and **T. Yamashita,** Spanning trees: A survey, *Graphs Comb.,* **27**, No. 1, 1–26, 2011.

16. G. R. Raidl and **B. A. Julstrom,** Greedy heuristics and an evolutionary algorithm for the bounded-diameter minimum spanning tree problem, in *Proc. 2003 ACM Symp. Appl. Comput., Melbourne, FL, USA, Mar. 9–12, 2003,* pp. 747–752, ACM, New York, 2003.

17. **R. Jothi** and **B. Raghavachari,** Approximation Algorithms for the Capacitated Minimum Spanning Tree Problem and Its Variants in Network Design, *ACM Trans. Algorithms,* **1**, No. 2, 265–282, 2005.

Edward Kh. Gimadi,
Ekaterina Yu. Shin

Received
10 February 2015
Revised
4 May 2015