ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2015. Том 22, № 4. С. 35–49

УДК 519.85 DOI: 10.17377/daio.2015.22.478

СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С КРЕДИТОВАНИЕМ

Е. А. Казаковцева[2], *В. В. Сервах*[1,2]
[1]Омский филиал ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия
[2]Омский гос. университет,
пр. Мира, 55-а, 644077 Омск, Россия
e-mail: martynova87@mail.ru, svv_usa@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается задача максимизации прибыли при календарном планировании инвестиционных проектов с учётом реинвестирования получаемого дохода и возможности использования кредитов. Построены соответствующие модели, исследованы их свойства. Доказана сильная NP-трудность задачи максимизации прибыли для случая, когда размер используемого кредита не ограничен. Библиогр. 11.

Ключевые слова: календарное планирование, инвестиционный проект, NPV-критерий, кредитование.

Введение

Задача календарного планирования заключается в определении сроков выполнения взаимосвязанных работ с учётом технологических и ресурсных ограничений. Многочисленные постановки этой задачи различаются критериями, видами и характером потребления ресурсов, технологическими ограничениями и другими параметрами [7, 10]. В данной статье исследуются задачи, связанные с реализацией долгосрочных или среднесрочных производственных инвестиционных проектов. В этом случае большинство ресурсов принято оценивать в финансовом эквиваленте: оборудование можно арендовать или взять в лизинг, необходимое количество рабочих принять только на время выполнения проекта и т. п. Финансовый ресурс является складируемым. В [1] показано, что задача со складируемыми ресурсами и критерием общего времени завершения работ проекта полиномиально разрешима. Однако задача максимизации

прибыли проекта NP-трудна в сильном смысле [6]. Кроме того, в инвестиционных проектах предполагается, что полученный от выполнения текущих работ доход реинвестируется. Реинвестирование также делает задачу NP-трудной в сильном смысле даже для критерия общего времени завершения работ [8].

Как правило, выполнение долгосрочных инвестиционных проектов требует привлечения кредитов. Если размер выделенных на проект кредитов фиксирован, то выплаты процентов влияют на прибыль, но в постановке сохраняются ограничения на ресурсы, и задача построения оптимального расписания остаётся NP-трудной в сильном смысле. Интересной является постановка, в которой привлечение кредитных средств допускается в любом объёме. В этом случае ограничения ресурсного типа отсутствуют, но за дополнительный капитал приходится платить.

Задача с платой за использование ресурсов рассматривалась, например, в [9]. Однако в этой статье исследуется постановка с возобновляемыми ресурсами и критерием минимизации стоимости приобретаемых ресурсов при заданном директивном сроке выполнения проекта. Отметим новые аспекты, присутствующие в предлагаемой нами постановке: максимизируется чистая приведённая прибыль, ресурс является складируемым, выполнение работ может приносить доход, учитывается реинвестирование этого дохода.

В разд. 1 описана постановка задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами и критерием чистой приведённой прибыли. Модель с кредитованием построена в разд. 2. В разд. 3 приведены основные свойства и соотношения для рассматриваемой задачи. В разд. 4 доказана сильная NP-трудность задачи с кредитами.

1. Задача календарного планирования с NPV-критерием

Под производственным инвестиционным проектом будем понимать множество взаимосвязанных работ $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, выполнение которых направлено на получение прибыли. Взаимосвязь задаётся технологией выполнения работ проекта и определяется частичным порядком E на множестве V. Рассматривается единственный вид ресурса — финансовый. На момент $t = 0, 1, \ldots, T-1$ имеются фиксированные финансовые ресурсы в объёме $K(t)$, где T — период планирования проекта. Допускаются отрицательные значения $K(t)$. Работа $j \in V$ выполняется непрерывно в течение p_j единиц времени. Известна её потребность в капиталовложениях $k_j(\tau)$, $\tau = 0, 1, \ldots, p_j - 1$. Здесь τ означает момент времени, отсчитываемый от начала работы, а t — от начала выполнения всего

проекта. Получаемый от работы доход распределён по времени и задан размерами поступлений $c_j(\tau)$, $\tau = 1, 2, \ldots, p_j$. Доопределим $k_j(p_j) = 0$, $c_j(0) = 0$.

В финансовых схемах для сравнения денег в различные моменты времени используется DCF-технология (discounted cash-flow). На рынке имеется возможность альтернативного безрискового ликвидного размещения капитала под ставку r_0. Капитал K_0, размещённый в момент t_0 под ставку r_0, к моменту t увеличится до величины $K_t = K_0(1 + r_0)^{t-t_0}$. Тем самым капитал K_t в момент t эквивалентен капиталу $K_t/(1 + r_0)^{t-t_0}$ в момент t_0. Операция приведения платежей к определённому моменту времени называется *дисконтированием*.

Величина
$$\mathrm{NPV}_j = \sum_{\tau=0}^{p_j} \frac{c_j(\tau) - k_j(\tau)}{(1 + r_0)^\tau}$$
называется *чистой прибылью* работы $j \in V$, приведённой к началу её выполнения (net present value). Если $\mathrm{NPV}_j > 0$, то работа приносит прибыль. Это означает, что вложенный в работу капитал приносит доход больше, чем его альтернативное безрисковое размещение под ставку r_0.

Пусть s_j — момент начала выполнения работы $j \in V$. Вектор $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ называется *расписанием* выполнения работ проекта. В силу целочисленности длительностей p_j и дискретности потока платежей достаточно рассмотреть расписания с целыми s_j. Обозначим через $N_t = \{j \in V \mid s_j \leqslant t < s_j + p_j\}$ множество работ, выполняемых в интервале $[t, t + 1)$, $t = 0, 1, \ldots, T - 1$. Расписание $\mathbf{S}$ *допустимое*, если

(a) сохраняется заданный частичный порядок выполнения работ:
$$s_i + p_i \leqslant s_j, \quad (i, j) \in E,$$

(b) в каждый момент времени с учётом реинвестирования дохода и размещения свободного капитала под ставку r_0 финансовых ресурсов достаточно для выполнения работ проекта:
$$\sum_{t=0}^{t^*} \sum_{j \in N_t} \frac{k_j(t - s_j)}{(1 + r_0)^t} \leqslant \sum_{t=0}^{t^*} \frac{K(t)}{(1 + r_0)^t} + \sum_{t=0}^{t^*} \sum_{j \in N_t} \frac{c_j(t - s_j)}{(1 + r_0)^t}, \quad t^* = 0, 1, \ldots, T - 1.$$

Требуется определить допустимое расписание выполнения работ, при котором чистая приведённая прибыль всего проекта будет максимальной. Чтобы просуммировать прибыль от всех работ, необходимо величины NPV_j привести к моменту времени $t = 0$. Тогда целевая функция

будет выглядеть следующим образом:

$$\mathrm{NPV}(\mathbf{S}) = \sum_{j \in V} \frac{\mathrm{NPV}_j}{(1+r_0)^{s_j}} \to \max .$$

Задачу календарного планирования с критерием NPV впервые сформулировал Рассел [11] в 1970 г. Различные постановки рассматривали Elmaghraby, Herroelen, Demeulemeester, Patterson, Ulusoy, Yang и многие другие авторы.

2. Модель задачи с кредитованием

Крупные инвестиционные проекты, как правило, не удаётся выполнить за счёт собственных средств. Поэтому широкое распространение получило использование кредитования. В постановке задачи с кредитованием в любой момент времени имеется возможность привлечения дополнительного капитала. Это может быть необходимо для продолжения проекта в случае нехватки основных средств или для ускорения реализации проекта, если технологически возможно выполнять несколько работ, но собственных ресурсов недостаточно. Получается, что в постановке задачи с кредитованием ограничения на ресурсы отсутствуют. Однако появляются дополнительные платы за использование привлечённого капитала, а именно проценты по кредиту.

Кредитные инструменты достаточно разнообразны и обладают непростой структурой. При моделировании приходится учитывать тип кредита, его размер, срок, схему погашения и так далее. Любой кредит с постоянной процентной ставкой r можно представить в виде потока платежей

$$\begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_m \\ \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_m \end{pmatrix},$$

обладающего свойством

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{\xi_i}{(1+r)^{\tau_i - \tau_0}} = 0.$$

Одним из условий кредитования является обязательная выплата процентов за текущий период. Какую бы форму ни имел кредит, на остаток основного долга начисляются проценты, и эти начисления должны быть погашены в текущем периоде. На следующий период опять происходит начисление процентов на остаток основного долга. Схема работы любого

кредита такова. Пусть D — размер кредита, взятого на m единиц времени, G_τ — размер выплат основного долга на момент τ, F_τ — остаток основного долга на момент τ, $F_0 = D$, $F_\tau = F_{\tau-1} - G_\tau$. Общий размер выплат в период τ составляет $R_\tau = G_\tau + F_{\tau-1}r$. В последний момент должно быть выполнено условие $F_m = 0$.

Конкретные формулы зависят от вида кредита. При $G_1 = G_2 = \cdots = G_m = F_0/m$ имеем кредит с постоянными выплатами основного долга; при $R_1 = R_2 = \cdots = R_m = \text{const}$ кредит называется *аннуитетным*. Есть и другие виды кредитов. Более того, кредитные организации могут пойти и на свободные выплаты основного долга, но оплата процентов на остаток кредита обязательно должна быть произведена. Последним обстоятельством воспользуемся в дальнейшем при построении модели задачи.

В работе для исследования задачи рассматривается общая схема процентных выплат без привязки к конкретному типу кредита. Чтобы исключить влияние многообразных факторов, связанных с видами кредитования, и акцентировать внимание на общей сути задачи, будем рассматривать идеальную модель кредита. Под идеальным будем понимать кредит, при котором (i) процентная ставка фиксирована и не меняется в зависимости от срока и размера кредита, (ii) кредит любого размера доступен в любой момент времени, (iii) погашение кредита может происходить в любой момент.

Если рассматривать не идеальный вариант, то возникает множество дополнительных ограничений, которые не отражают сути исследуемой задачи. В частности, при ограничении размера кредита получаем обычную задачу календарного планирования с ограниченными ресурсами; при изменении ставки от срока или размера кредита получаем более широкую задачу, сложность которой может обуславливаться уже другими причинами.

Утверждение 1. *При сделанных выше предположениях долгосрочный кредит можно разбить на эквивалентную последовательность одноразовых кредитов.*

Доказательство. Действительно, в нашей формулировке кредит однозначно определяется потоком платежей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ +D & -G_1 - Dr & -G_2 - (D - G_1)r & -G_3 - (D - G_1 - G_2)r & \dots \end{pmatrix}.$$

Декомпозируем поток следующим образом: по завершении периода τ полностью возвращаем кредит вместе с набежавшими процентами в объ-

ёме $(1+r)F_{\tau-1}$, а в начале следующего периода оформляем новый кредит на сумму F_τ, чтобы соответствующая разность была равна платежу по исходному потоку. Последовательность потоков платежей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ D & -(1+r)D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ D-G_1 & -(1+r)(D-G_1) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ D-G_1-G_2 & -(1+r)(D-G_1-G_2) \end{pmatrix} \dots\dots$$

соответствует той же самой схеме кредитования, что и выше. Утверждение 1 доказано.

Такой подход позволяет ввести только один дополнительный тип переменных $D(t)$ — размер кредита, взятого в момент t, и модель с кредитованием и реинвестированием прибыли примет следующий вид: построить расписание выполнения работ $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, при котором

соблюдается технологический порядок выполнения работ

$$s_i + p_i \leqslant s_j, \quad (i,j) \in E;$$

в каждый момент времени $t^* = 0, 1, \dots, T$ сохраняется неотрцательный платёжный баланс с учётом взятых кредитов, выплат по ним, реинвестирования дохода и размещения свободного капитала под ставку r_0:

$$\sum_{t=0}^{t^*} \left(\frac{K(t)}{(1+r_0)^t} + \sum_{j \in N_t} \frac{c_j(t-s_j) - k_j(t-s_j)}{(1+r_0)^t} + \frac{D(t) - (1+r)D(t-1)}{(1+r_0)^t} \right) \geqslant 0;$$

чистая приведённая прибыль с учётом выплат по кредитам достигает максимального значения:

$$\mathrm{NPV}(\mathbf{S}) = \sum_{j \in V} \frac{\mathrm{NPV}_j}{(1+r_0)^{s_j}} + \sum_{t=0}^{T} \frac{D(t) - (1+r)D(t-1)}{(1+r_0)^t} \to \max,$$

где $D(-1) = 0$ и $D(T) = 0$.

Задача календарного планирования при возможности использования кредитов не является тривиальной и представляет определённый интерес для математиков. В [4] приведён пример, когда кредиты выгодно использовать при ставке по кредиту выше относительной прибыльности каждой работы. Другой интересный факт заключается в том, что раннее расписание выполнения работ может быть не оптимальным даже для случая,

когда внутренняя норма прибыли каждой работы больше ставки по кредиту. В [2] построена модель ситуации, в которой одинаковые технологически независимые работы выгодно только частично финансировать за счёт кредитования, а остальные — за счёт реинвестирования дохода. Это наводит на мысль, что вопрос оптимизации объёмов кредитования в задаче календарного планирования является достаточно сложным.

3. Свойства и основные соотношения для задачи с кредитами

Возможность использования кредитов существенно влияет на составление расписания. Отметим некоторые важные свойства оптимальных решений. *Прибыльностью работы* j называется величина irr_j (internal rate of return), которая вычисляется из уравнения

$$\sum_{\tau=0}^{p_j} \frac{c_j(\tau) - k_j(\tau)}{(1+\mathrm{irr}_j)^\tau} = 0.$$

Значение irr_j задаёт процент прибыли, который обеспечивает данная работа. Важную роль при планировании инвестиционных проектов играет соотношение между величинами r_0, r, irr_j. Логично выглядит гипотеза, что если прибыльность каждой работы проекта больше ставки по кредиту, то использование кредитования позволяет реализовать раннее расписание выполнения работ и получить наибольшее значение NPV. С другой стороны, опять же логично предположить, что если прибыльности всех работ меньше ставки по кредиту, то брать кредит невыгодно. Но обе эти гипотезы оказываются неверными. В [5] доказаны следующие утверждения.

Утверждение 2. *Раннее расписание выполнения работ может быть не оптимальным даже для случая, когда прибыльности всех работ* irr_j *больше ставки по кредиту* r.

Утверждение 3. *Дополнительную прибыль за счёт кредитов можно получить даже в том случае, если прибыльности всех работ* iir_j *меньше ставки по кредиту* r.

Описанные свойства показывают, что характер зависимости оптимального расписания от основных параметров модели не тривиален. Несколько упрощает задачу тот факт, что для заданного расписания выполнения работ все параметры, в том числе и величину кредитов, можно рассчитать.

Утверждение 4. *Заданное расписание выполнения работ однозначно определяет объём кредитных заимствований.*

Доказательство. Действительно, так как расписание выполнения работ задано, задан и поток платежей всего проекта. Если все величины потока неотрицательны, то использовать кредиты нет необходимости. Если в некоторые моменты платежи отрицательны, то их дефицит можно покрыть только за счёт кредитов. При этом появляются дополнительные обязательства по кредитам. Начиная с первого отрицательного платежа, покрываем дефицит за счёт кредита минимально возможного объёма и пересчитываем оставшийся поток платежей. Далее действуем аналогично. Данная процедура однозначно определяет объёмы необходимых кредитов. Утверждение 4 доказано.

Оценим, какой эффект при выполнении проекта может быть достигнут за счёт кредитования. Прежде всего отметим, что NPV потока платежей — аддитивная функция, следовательно, изменение общего значения NPV всего проекта при сдвиге одной работы можно оценивать изменением NPV только этой работы.

Если выполнение работы было сдвинуто с момента s_j на $s_j - 1$, то изменение NPV составит

$$\frac{\mathrm{NPV}_j}{(1+r_0)^{s_j-1}} - \frac{\mathrm{NPV}_j}{(1+r_0)^{s_j}} = \frac{r_0 \cdot \mathrm{NPV}_j}{(1+r_0)^{s_j}}.$$

Отсюда вытекает, что при изменении сроков выполнения работы изменение NPV зависит не только от того, на сколько единиц сдвигается работа, но и от сроков её выполнения. Этот факт будет важен при построении оценки эффективности использования кредита.

Пусть имеется некоторое допустимое расписание $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ выполнения работ в задаче без кредитования, в котором ни одна работа не может быть локально перемещена на более ранний срок без нарушения ресурсных ограничений. Для некоторой работы $i \in V$ обозначим через ε размер кредита, который необходимо взять, чтобы начать эту работу в момент $s_i - 1$. Этот сдвиг позволяет также сдвинуть на более ранний срок выполнение и некоторых других работ. Обозначим их множество через V_i. Пусть в момент $t = s_i$ объём собственных средств $K(t)$ достаточно велик, чтобы выполнить все оставшиеся работы без кредитов. Максимальный эффект от кредита будет достигнут, если все работы множества V_i прибыльны и начнут выполнение на единицу раньше. Тогда изменение NPV составит

$$\Delta\mathrm{NPV} = \frac{r_0 \cdot \mathrm{NPV}_i}{(1+r_0)^{s_i}} + \sum_{j \in V_i} \frac{r_0 \cdot \mathrm{NPV}_j}{(1+r_0)^{s_j}} + \frac{\varepsilon}{(1+r_0)^{s_i-1}} - \frac{\varepsilon(1+r)}{(1+r_0)^{s_i}}.$$

Если эта величина отрицательна, то кредитование невыгодно, откуда получаем

$$r > r_0 + \frac{r_0}{\varepsilon}\left(\mathrm{NPV}_i + \sum_{j \in V_i} \frac{\mathrm{NPV}_j}{(1+r_0)^{s_j - s_i}}\right).$$

Таким образом, смоделирована ситуация, когда полный отказ от использования кредитования происходит при ставке r, растущей вместе с ростом размерности задачи. При сколь угодно большом фиксированном значении r существуют примеры, в которых оптимальное значение прибыли достигается только при использовании кредитования.

Это утверждение не позволяет доказать NP-трудность задачи непосредственным сведе́нием к ней задачи без кредитования за счёт повышения ставки r, так как реальная ставка не должна зависеть от количества работ в проекте. Поэтому для доказательства сильной NP-трудности придётся использовать другой подход. Чтобы его реализовать, рассмотрим модель с идентичными работами.

Имеется n идентичных работ единичной длительности. При старте каждой работы требуется k единиц капиталовложений, а по окончании работы получаем доход в размере c, который можно использовать для выполнения других работ. Без ограничения общности величины k и $K(t)$ считаем целочисленными и $r \geqslant r_0$. Последнее неравенство довольно естественно, так как ставка r_0 предусматривает безрисковое и ликвидное размещение капитала, а кредитование проекта этим условиям не удовлетворяет. Поэтому ставка по кредиту должна быть выше. Кроме того, должно выполняться условие $c/k > 1+r_0$, так как иначе альтернативное вложение капитала принесёт неменьшую прибыль с меньшими рисками, а потому выполнять проект не имеет смысла.

В [2] удалось показать, что при условии

$$1 + r < \frac{c}{k} < \frac{r(1+r_0)}{r_0}$$

необходимо решать задачу оптимизации размеров кредитов, даже если работы не связаны отношением предшествования. Заметим, что при указанном условии прибыльность всех работ выше ставки по кредиту и, казалось бы, кредит брать нужно сразу на все работы. Однако оказывается выгодно кредитовать только часть работ, а остальные выполнять за счёт собственных средств и реинвестирования полученного дохода.

Вернёмся к задаче с произвольным частичным порядком. Для всех работ

$$\mathrm{NPV}_j = -k + \frac{c}{1+r_0}.$$

Рассмотрим ситуацию, когда сдвиг начала выполнения работы i с момента s_i на $s_i - 1$ за счёт кредита размером ε позволяет сдвинуть работы множества V_i. Кредит невыгоден, если ставка по нему удовлетворяет неравенству

$$r > r_0 + \frac{r_0}{\varepsilon}\left(-k + \frac{c}{1+r_0}\right)\left(1 + \sum_{j \in V_i} \frac{1}{(1+r_0)^{s_j - s_i}}\right).$$

Заметим, что если одна работа выполнялась раньше другой, то в соответствии с утверждением 3 её сдвиг принесёт большее увеличение прибыли. Самый большой эффект от использования кредита будет в случае, когда все работы множества V_i следуют непосредственно за работой i, т. е. при условии $s_j = s_i + 1$, $j \in V_i$. Пусть $|V_i| = m$. Тогда последнее неравенство примет вид

$$r > r_0 + \frac{r_0}{\varepsilon}\left(-k + \frac{c}{1+r_0}\right)\left(1 + \frac{m}{1+r_0}\right).$$

Напомним, что при этом условии использование кредитования оказывается невыгодным и оптимальное значение целевой функции совпадает с оптимумом рассмотренной в разд. 2 задачи с ограничениями. Если взять $r_0 = 0{,}1$, $\varepsilon = k = 1$, $c = 1{,}4$, $m = 100$, то $r > 2{,}6$, т. е. ставка по кредиту должна быть не менее 260%, что нереально для практических задач. Если в этой ситуации $m = 2$, то уже при $r > 0{,}177$ можно обойтись без кредитования. Ставка в 17,7% примерно соответствует нынешней ситуации на российском финансовом рынке.

4. Сложность задачи с кредитованием

Как сказано выше, в задаче с кредитованием отсутствуют ресурсные ограничения. Поэтому основной акцент в исследовании сложности связан со значением целевой функции.

Теорема. *Задача календарного планирования проектов с критерием чистой приведённой прибыли и возможностью использования кредитов* NP-*трудна в сильном смысле даже в случае работ единичной длительности.*

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу. Проект (V, E) состоит из n идентичных взаимосвязанных работ единичной длительности. При старте каждой работы требуется k единиц капиталовложений, а по окончании работы получаем доход в размере c, который можно использовать для выполнения других работ. Собственные средства заданы

величинами $K(t),\ t = 0, 1, 2, \ldots$. Допускается реинвестирование дохода и использование кредитов. Ставка по кредиту равна r. Задан уровень прибыли NPV*. Требуется определить, существует ли расписание выполнения работ со значением прибыли не менее NPV*.

Сведём к ней задачу о клике, которая NP-трудна в сильном смысле. Имеется неориентированный граф (W, U) и дано натуральное число q. Существует ли в нём полный подграф с числом вершин не меньше q? Без ограничений общности будем считать, что данный граф не содержит изолированных вершин.

По графу (W, U) строим проект с числом работ $|U| + |W|$. Каждому ребру $(i, j) \in U$ сопоставляем рёберную работу u_{ij}, а каждой вершине $j \in W$ — вершинную работу w_j:

$$V = \{u_{ij} \mid (i, j) \in U\} \cup \{w_j \mid j \in W\}.$$

На V определим отношение предшествования $E : u_{ij} \to w_i$ и $u_{ij} \to w_j$ для всех $u_{ij} \in U$. Длительности всех работ равны единице. Вложение в каждую работу равно k единиц, а поступления по её завершении — c. Собственные средства в начальный момент времени равны $K(0) = (|U| - q(q-1)/2)k$. Объём средств $K(1)$ не ограничен.

Теперь покажем, что в графе (W, U) существует клика размером q тогда и только тогда, когда существует расписание со значением целевой функции NPV*, равным

$$\left(|U| - \frac{q(q-1)}{2} + \frac{1}{1+r_0}\left(\frac{q(q-1)}{2} + |W| - q\right) + \frac{q}{(1+r_0)^2}\right)\left(\frac{c}{1+r_0} - k\right).$$

Сначала рассмотрим задачу без кредитования. Найдем оптимальное расписание выполнения работ. Так как по условию в исходном графе нет изолированных вершин, в интервале $[0, 1]$ выполняется только $|U| - q(q-1)/2$ рёберных работ. Меньше быть не может, поскольку сдвиг любой из работ приносит прибыль, следовательно, все ресурсы должны быть использованы. В интервале $[1, 2]$ выполняется $q(q-1)/2$ рёберных и некоторое количество вершинных работ. Обозначим это множество через V_1. Остальные работы образуют множество $V_2 = V \setminus V_1$ и выполняются в интервале $[2, 3]$. Так как число выполняемых рёберных работ в каждом из интервалов постоянно, важно как распределяются вершинные работы на V_1 и V_2. Чем больше работ войдёт в V_1 и меньше в V_2, тем больше будет целевая функция.

Оценим мощность V_2. В интервале $[1, 2]$ выполняется $q(q-1)/2$ рёберных работ. В исходном графе им соответствуют $q(q-1)/2$ рёбер. Концы

этих рёбер образуют множество вершин W_2, в точности являющееся прообразом множества V_2. Действительно, работы, соответствующие вершинам из W_2, нельзя сдвинуть на более ранний срок из-за требования сохранения частичного порядка, а остальные вершинные работы выполняются в интервале $[1, 2]$, так как расписание оптимальное и все вершинные работы сдвинуты на самый ранний срок. Понятно, что $q \leqslant |W_2| = |V_2| \leqslant 2q$. Наконец, простой, но ключевой факт: нижняя оценка $|V_2| = q$ достигается тогда и только тогда, когда подграф с вершинами W_2 является кликой. Таким образом, если клики нет, то $|V_2| > q$. Тогда для полученного расписания $\mathrm{NPV} < \mathrm{NPV}^*$.

Осталось рассмотреть оптимальное расписание в задаче с кредитованием.

Во-первых, как отмечено выше, объём средств $K(1)$ не ограничен, что позволяет при $c/k > r_0$, начиная со второго временно́го интервала, выполнять работы как можно раньше в соответствии с частичным порядком. Таким образом, кредит брать имеет смысл только в начальный момент времени.

Во-вторых, размер кредита кратен k. Действительно, так как $K(0)$ кратно k, для того чтобы сдвинуть хотя бы одну работу на более ранний срок, требуется кредит не менее k единиц.

В-третьих, в построенном графе за работой u_{ij} следуют ровно две вершинные работы w_i и w_j. Значит, сдвинув за счёт кредита работу u_{ij} с интервала $[1, 2]$ на интервал $[0, 1]$ можно как максимум сдвинуть ещё работы, на которые кредит не потребуется, и в формуле, выведенной в конце разд. 3, $m = 2$. Если эффект от этого сдвига отрицательный, то и любой сдвиг любого другого множества работ тоже даст отрицательный эффект.

Таким образом, при

$$r > r_0 + \frac{r_0}{k}\left(-k + \frac{c}{1+r_0}\right)\left(1 + \frac{2}{1+r_0}\right) = r_0 + \frac{r_0(3+r_0)}{(1+r_0)^2}\left(\frac{c}{k} - 1 - r_0\right)$$

оптимальное решение без использования кредитов лучше, чем с кредитами. В этой ситуации значение NPV^* достигается тогда и только тогда, когда в графе (W, U) существует клика размером q. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гимади Э. Х., Залюбовский В. В., Севастьянов С. В.** Полиномиальная разрешимость задач календарного планирования со складируемыми ресурсами и директивными сроками // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2000. Сер. 2. Т. 7, № 1. С. 9–34.

2. **Казаковцева Е. А., Сервах В. В.** Кредитование и анализ надежности расписаний в задаче календарного планирования проектов // Автоматика и телемеханика. 2014. № 7. С. 87–98.
3. **Казаковцева Е. А., Сервах В. В.** NP-трудность задачи календарного планирования проектов при возможности использования кредитов // Тез. докл. XVI Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2014. С. 56.
4. **Мартынова Е. А., Сервах В. В.** О задаче календарного планирования проектов с использованием кредитов // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 107–116.
5. **Мартынова Е. А., Сервах В. В.** Оптимизация использования кредитов в задаче календарного планирования // Мат. Росс. конф. «Дискретная оптимизация и исследование операций». Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2013. С. 96.
6. **Сервах В. В., Щербинина Т. А.** О сложности задачи календарного планирования проектов // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 3. С. 105–111.
7. **Brucker P., Drexl A., Möhring R., Neumann K., Pesch E.** Resource-constrained project scheduling: Notation, classification, models, and methods // Eur. J. Oper. Res. 1999. Vol. 112, No. 1. P. 3–41.
8. **Gimadi E. Kh., Sevastianov S. V.** On solvability of the project scheduling problem with accumulative resources of an arbitrary sign // Oper. Res. Proc. (Sel. Pap. Int. Conf. Oper. Res., Klagenfurt, Sept. 2–5, 2002). Berlin: Springer-Verl., 2002. P. 241–246.
9. **Möhring R. H.** Minimizing costs of resource requirements in project networks subject to a fixed completion time // Oper. Res. 1984. Vol. 32, No. 1. P. 89–120.
10. Project scheduling: Recent models, algorithms, and applications. New York: Kluwer Acad. Publ., 1999. 535 p.
11. **Russell A. H.** Cash flows in networks // Manage. Sci. 1970. Vol. 16, No. 5. P. 357–373.

Казаковцева Евгения Андреевна,
Сервах Владимир Вицентьевич

Статья поступила
20 февраля 2015 г.

Исправленный вариант —
6 апреля 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
July–August 2015. Volume 22, No. 4. P. 35–49

UDC 519.85 DOI: 10.17377/daio.2015.22.478

THE COMPLEXITY OF THE PROJECT SCHEDULING PROBLEM WITH CREDITS

E. A. Kazakovtseva[2], *V. V. Servakh*[1,2]
[1]Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS,
13 Pevtsov St., 644099 Omsk, Russia
[2]Omsk State University,
55-a Mir Ave., 644077 Omsk, Russia
e-mail: martynova87@mail.ru, svv_usa@rambler.ru

Abstract. We consider the profit maximization problem in calendar planning of investment projects taking into account reinvesting of the obtained revenue and possible credit financing. We construct corresponding models and study characteristics of these models. Strong NP-hardness of the profit maximization problem is proved when the amount of the used credits is not limited. Bibliogr. 11.

Keywords: project scheduling, investment project, NPV criterion, credit.

REFERENCES

1. **E. Kh. Gimadi, V. V. Zalyubovskiy,** and **S. V. Sevastyanov,** Polynomial solvability of scheduling problems with storable resources and directive deadlines, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **7**, No. 1, 9–34, 2000. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **1**, No. 4, 442–452, 2007.
2. **E. A. Kazakovtseva** and **V. V. Servakh,** Financing and reliability analysis for schedules in the project calendar planning problem *Avtom. Telemekh.,* No. 7, 87–98, 2014. Translated in *Autom. Remote Control,* **75**, No. 7, 1231–1240, 2014.
3. **E. A. Kazakovtseva** and **V. V. Servakh,** NP-hardness of the project scheduling problem with credits in *Tezisy dokladov XVI Baikal'skoi mezhdunarodnoi shkoly-seminara "Metody optimizatsii i ikh prilozheniya"* (Abstr. XVI Baikal Int. School-Seminar "Optimization Methods and Their Applications"), *Olkhon, Irkutsk Reg., Russia, June 30 – July 6, 2014,* p. 56, Inst. Sist. Energ. SO RAN, Irkutsk, 2014.
4. **E. A. Martynova** and **V. V. Servakh,** On scheduling credited projects, *Avtom. Telemekh.,* No. 3, 107–116, 2012. Translated in *Autom. Remote Control,* **73**, No. 3, 508–516, 2012.

5. **E. A. Martynova** and **V. V. Servakh,** Optimizing the use of credits in the project scheduling problem, in *Materialy Rossiiskoi konferentsii "Diskretnaya optimizatsiya i issledovanie operatsii"* (Proc. Russian Conf. "Discrete Optimization and Operation Research"), *Novosibirsk, Russia, June 24–28, 2013,* p. 96, Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 2013.
6. **V. V. Servakh** and **T. A. Shcherbinina,** Complexity of some project scheduling problem with nonrenewable resources, *Vestn. NGU, Ser. Mat., Mekh., Inform.,* **8**, No. 3, 105–112, 2008.
7. **P. Brucker, A. Drexl, R. Möhring, K. Neumann,** and **E. Pesch,** Resource-constrained project scheduling: Notation, classification, models, and methods *Eur. J. Oper. Res.,* **112**, No. 1, 3–41, 1999.
8. **E. Kh. Gimadi** and **S. V. Sevast'yanov,** On solvability of the project scheduling problem with accumulative resources of an arbitrary sign, in *Oper. Res. Proc. 2002 (Sel. Pap. Int. Conf. Oper. Res., Klagenfurt, Sept. 2–5, 2002),* pp. 241–246, Springer-Verl., Berlin, 2002.
9. **R. H. Möhring,** Minimizing costs of resource requirements in project networks subject to a fixed completion time, *Oper. Res.,* **32**, No. 1, 89–120, 1984.
10. **J. Węglarz,** ed., *Project Scheduling: Recent Models, Algorithms, and Applications,* Kluwer Acad. Publ., New York, 1999 (Int. Ser. Oper. Res. Manag. Sci., Vol. 14).
11. **A. H. Russell,** Cash flows in networks, *Manag. Sci.,* **16**, No. 5, 357–373, 1970.

Evgeniya A. Kazakovtseva,
Vladimir V. Servakh

Received
20 February 2015
Revised
6 April 2015