ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2015. Том 22, № 5. С. 52–70

УДК 519.718.7 DOI: 10.17377/daio.2015.22.476

ОЦЕНКИ ДЛИН ТЕСТОВ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ ДОПУСТИМЫХ НЕИСПРАВНОСТЕЙ *)

К. А. Попков[1]
[1]Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, 119991 Москва, Россия
e-mail: kirill-formulist@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются задачи проверки исправности и диагностики состояний N функциональных элементов, реализующих в исправном состоянии заданную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, путём составления из них схем с одним выходом и наблюдения выдаваемых этими схемами значений на любых входных наборах значений переменных. Допускаются произвольные константные неисправности на выходах функциональных элементов; при этом предполагается, что не более k элементов неисправны, где k — заданное натуральное число, не превосходящее N. Требуется минимизировать число схем, необходимых для проверки исправности и определения состояний всех элементов. Получена нижняя оценка на число указанных схем в случае, когда k близко к N. В качестве следствия из этой оценки установлено, что при выполнении некоторого условия на N и принадлежности k некоторому отрезку число таких схем не может быть меньше ck, где $c > 1$ — константа, не зависящая от выбора числа k из этого отрезка. Библиогр. 15.

Ключевые слова: функциональный элемент, неисправность, схема, проверяющий тест, диагностический тест.

Введение

Рассматриваются задачи проверки исправности и распознавания состояний функциональных элементов с использованием экспериментов,

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14–01–00598) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

заключающихся в составлении произвольных схем из заданных функциональных элементов с последующим «прозваниванием» этих схем, т. е. нахождением булевых функций, реализуемых составляемыми схемами. Суть общепринятой математической модели схемы из функциональных элементов и тех элементов, из которых строятся эти схемы, с исчерпывающей полнотой и ясностью представлена в [2]; именно такая математическая модель является объектом исследования и рассматривается ниже.

Логический подход к контролю работы электрических схем впервые описан в [12]. Этот подход также применим к контролю работы схем из функциональных элементов (см. [9, 13, 14]), а именно к проверке исправности и диагностике неисправностей таких схем. В [7, 8, 10, 11, 15] получены существенные результаты относительно сложности тестирования схем из функциональных элементов при произвольных константных неисправностях на выходах элементов. Такие же неисправности рассматриваются и в данной работе, однако целью тестирования здесь является проверка исправности и диагностика неисправностей самих функциональных элементов, а не схем, которые из них строятся. Соответствующая постановка задачи сформулирована в [3, 5] и состоит в следующем. Представим, что имеются N функциональных элементов ($N \geqslant 1$), занумерованных числами от 1 до N. Каждый элемент, рассматриваемый как простейшая схема из функциональных элементов, имеет $n \geqslant 1$ входов $v_1, \ldots, v_n$ и один выход и в исправном состоянии реализует на выходе заданную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — переменные, подаваемые на его входы $v_1, \ldots, v_n$ (считаем, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных и, как следствие, отлична от константы). В неисправном состоянии каждый элемент реализует одну из констант 0 или 1. Неисправность элемента, при которой он реализует константу 0 (1), будем называть *неисправностью элемента типа* 0 (1). Предполагается, что среди данных N функциональных элементов не более k элементов могут быть неисправны, где k — заданное натуральное число, $k \leqslant N$. Можно составлять любые схемы с одним выходом из данных функциональных элементов и наблюдать выдаваемые схемами значения на любых наборах значений переменных.

Задача заключается в том, чтобы протестировать функциональные элементы, т. е. для каждого из них определить, исправен данный элемент или неисправен (задача проверки), и в дополнение к этому узнать тип неисправности каждого неисправного элемента (задача диагностики), используя при тестировании по возможности меньшее число схем.

Предполагается, что в процессе экспериментирования исправные эле-

менты остаются исправными, неисправные элементы — неисправными и тип неисправности каждого неисправного элемента сохраняется.

1. Основные определения и вспомогательные утверждения

Будем называть *неисправностью системы элементов* любое множество неисправностей функциональных элементов при условии, что число этих неисправностей не больше k. (В частности, случай, когда все элементы исправны, является одним из видов неисправности системы элементов.)

Неисправность любого элемента можно представить в виде упорядоченной пары (i, δ), где i — номер этого элемента, δ — булева константа, которую он реализует. Любую неисправность системы элементов можно представить в виде множества $\{(i_1, \delta_1), \ldots, (i_s, \delta_s)\}$, где s — число неисправных элементов, $i_1, \ldots, i_s$ — номера неисправных элементов, δ_j — булева константа, которую реализует элемент с номером i_j.

Диагностическим тестом назовём набор схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных функциональных элементов, такой, что для любых двух различных неисправностей системы элементов наборы функций, реализуемых схемами, не совпадают (т. е. существует схема S_i такая, что реализуемая этой схемой функция при первой неисправности не совпадает с реализуемой этой же схемой функцией при второй неисправности). Число l назовём *длиной* этого теста.

Проверяющим тестом назовём такой набор схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных функциональных элементов, что для любых двух неисправностей системы элементов, при которых множества неисправных элементов различны, наборы функций, реализуемых схемами, не совпадают. Число l назовём *длиной* этого теста.

Содержательный смысл этих определений состоит в следующем: диагностический (проверяющий) тест — это такой набор схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных N функциональных элементов, что по набору функций, реализуемых этими схемами, можно однозначно определить состояние (исправность или неисправность) каждого из N элементов. При этом проверяющий тест не обязан определять тип неисправности (0 или 1) каждого неисправного элемента.

Введём функции $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$, равные длинам самых коротких соответственно проверяющего и диагностического тестов для N функциональных элементов, реализующих в исправном состоянии функцию f, среди которых не более чем k неисправных.

Отметим, что для любых f, N и k выполняется соотношение

$$L_d(f, N, k) \geqslant L_c(f, N, k), \tag{1}$$

поскольку любой диагностический тест является проверяющим.

В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины N всегда можно взять множество из N схем, каждая из которых представляет собой один из заданных функциональных элементов. Отсюда и из [3, теорема 1] для любых f, N и k получаем

$$k \leqslant L_c(f, N, k) \leqslant N, \tag{2}$$

$$k \leqslant L_d(f, N, k) \leqslant N. \tag{3}$$

В [5] получена оценка $L_c(f, N, k) \leqslant 2k+1$ в случае, когда k достаточно мало по сравнению с N, а функция f отлична от конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Если при этом функция f нелинейна, то та же верхняя оценка $2k + 1$ получена и для величины $L_d(f, N, k)$. В [3, 6] для произвольного N найдены точные значения величин $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ в следующих случаях:

а) $k = 1$;

б) $k \in \{2, N - 1, N\}$ и выполнены некоторые ограничения на функцию f.

В [3] для величин $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ получена нижняя оценка $k+1$ в случае, когда функция f имеет специальный вид и выполнены некоторые условия на числа k и N. Если же функция f представляет собой конъюнкцию, дизъюнкцию или отрицание, то в [4] для указанных величин получены нижние оценки вида $ck(\log_2 N - \log_2 k)$.

2. Формулировка и доказательство основного результата

Основным результатом данной работы является следующая теорема, позволяющая улучшить нижние оценки для функций $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ в (2) и (3) и приблизить их к верхним в случае, когда максимальное допустимое число неисправных элементов k близко к числу всех элементов N. Напомним, что через n обозначается число входов каждого из заданных функциональных элементов.

Теорема 1. *Пусть* $k > \frac{2n}{2n+1}N$. *Тогда*

$$L_c(f, N, k) \geqslant \left(1 - \frac{n}{(2n+1)k - 2nN + 3n}\right)N,$$

$$L_d(f, N, k) \geqslant \left(1 - \frac{n}{(2n+1)k - 2nN + 3n}\right)N.$$

Замечание 1. В силу соотношения (1) достаточно доказать только первое неравенство.

Замечание 2. Оценки теоремы 1 во многих случаях являются улучшением нижних оценок для функций $L_c(f,N,k)$ и $L_d(f,N,k)$ в (2) и (3). Например, если $k=\frac{2n+a}{2n+1}N$ и $N\geqslant\frac{2bn^2+(3a+b-3)n}{a(1-a)}$, где $a\in(0,1)$ и $b>1$, то

$$\frac{n}{aN+3n}\leqslant\frac{n}{\frac{2bn^2+(3a+b-3)n}{1-a}+3n}=\frac{(1-a)n}{2bn^2+bn}=\frac{1-a}{b(2n+1)},$$

$$\left(1-\frac{n}{(2n+1)k-2nN+3n}\right)N=\left(1-\frac{n}{(2n+a)N-2nN+3n}\right)N$$
$$=\left(1-\frac{n}{aN+3n}\right)N\geqslant\left(1-\frac{1-a}{b(2n+1)}\right)N, \quad (4)$$

тогда из теоремы 1 и (2) следует, что

$$\left(1-\frac{1-a}{b(2n+1)}\right)N\leqslant L_c(f,N,k)\leqslant N.$$

Эти оценки лучше оценок из (2), поскольку правые концы отрезков $[k,N]$ и $\left[\left(1-\frac{1-a}{b(2n+1)}\right)N,N\right]$ совпадают, а отношение длин этих отрезков равно

$$\left(N-\left(1-\frac{1-a}{b(2n+1)}\right)N\right)\Big/(N-k)$$
$$=\left(\frac{1-a}{b(2n+1)}N\right)\Big/\left(N-\frac{2n+a}{2n+1}N\right)=\frac{1}{b}<1.$$

Пусть теперь выполнены следующие условия:

(i) $a\in[a_1,a_2]$, где $0<a_1<a_2<1$;

(ii) $b>1$;

(iii) $k=\frac{2n+a}{2n+1}N$;

(iv) $N\geqslant\frac{2bn^2+(3a_2+b-3)n}{\min(a_1(1-a_1),\,a_2(1-a_2))}$.

Тогда, так как минимум функции $y(x)=x(1-x)$ на отрезке $[a_1,a_2]$ достигается в одной из точек a_1,a_2 и при этом больше нуля, имеем

$$0<\min(a_1(1-a_1),a_2(1-a_2))\leqslant a(1-a),$$

$$N\geqslant\frac{2bn^2+(3a_2+b-3)n}{\min(a_1(1-a_1),a_2(1-a_2))}\geqslant\frac{2bn^2+(3a+b-3)n}{a(1-a)},$$

а в таком случае из теоремы 1 и (4) следует, что

$$L_c(f,N,k) \geqslant \left(1-\frac{1-a}{b(2n+1)}\right)N = \frac{b(2n+1)-1+a}{b(2n+1)}\cdot k\cdot\frac{2n+1}{2n+a}$$
$$= \frac{2bn+b+a-1}{2bn+ab}\cdot k = \left(1+\frac{b+a-1-ab}{2bn+ab}\right)k$$
$$= \left(1+\frac{(b-1)(1-a)}{2bn+ab}\right)k \geqslant \left(1+\frac{(b-1)(1-a_2)}{2bn+a_2b}\right)k = ck,$$

где $c=c(n,a_2,b)=1+\frac{(b-1)(1-a_2)}{2bn+a_2b}>1$ в силу того, что $0<a_2<1$ и $b>1$. Так как при увеличении параметра a с a_1 до a_2 число $k=\frac{2n+a}{2n+1}N$ увеличивается с $\frac{2n+a_1}{2n+1}N$ до $\frac{2n+a_2}{2n+1}N$, для каждого $k\in\left[\frac{2n+a_1}{2n+1}N, \frac{2n+a_2}{2n+1}N\right]$ выполняется оценка $L_c(f,n,k)\geqslant ck$, где $c>1$ не зависит от выбора числа k из указанного отрезка. Таким образом, при выполнении условий (i)–(iv) теорема 1 позволяет улучшить нижнюю оценку для функции $L_c(f,N,k)$ в (2) в $c>1$ раз.

Совершенно аналогичные рассуждения можно провести и для функции $L_d(f,N,k)$. Например, если взять $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{2}{3}$, $b=3$, то после вычислений получим, что при $N\geqslant 27n^2+9n$ для любого $k\in\left[\frac{6n+1}{6n+3}N, \frac{6n+2}{6n+3}N\right]$ выполняются неравенства

$$L_c(f,N,k)\geqslant\left(1+\frac{1}{9n+3}\right)k,\quad L_d(f,N,k)\geqslant\left(1+\frac{1}{9n+3}\right)k.$$

Приведём также конкретный

Пример. При $n=5$, $N=1000$, $k=930$ из теоремы 1 следуют оценки $L_c(f,N,k)\geqslant\left(1-\frac{5}{11\cdot930-10\cdot1000+15}\right)\cdot1000>979$ и $L_d(f,N,k)>979$.

Пусть h — произвольное натуральное число, $A_1,\ldots,A_h$ — произвольные множества. Через $A_1\sqcup\ldots\sqcup A_h$ будем обозначать объединение множеств $A_1,\ldots,A_h$ при условии, что эти множества попарно не пересекаются.

Доказательство теоремы 1. Пусть $l=L_c(f,N,k)$. Тогда существует набор схем $(S_1,\,\ldots,S_l)$, являющийся проверяющим тестом. В силу (2) и условия теоремы 1 имеем $\frac{2n}{2n+1}N<k\leqslant l\leqslant N$. Надо доказать, что

$$l\geqslant\left(1-\frac{n}{(2n+1)k-2nN+3n}\right)N.$$

При $l=N$ это неравенство с учётом того, что $(2n+1)k-2nN>0$, очевидно. В дальнейшем будем считать, что

$$\frac{2n}{2n+1}N<k\leqslant l\leqslant N-1. \tag{5}$$

Для каждой схемы $S_1, \dots, S_l$ назовём её *нижним слоем* множество, состоящее из выходного элемента этой схемы, а *вторым снизу слоем* — множество, состоящее из всех элементов, выход каждого из которых соединён в этой схеме хотя бы с одним входом её выходного элемента. Ясно, что нижний и второй снизу слои одной и той же схемы не пересекаются. Выход ни одной из схем $S_1, \dots, S_l$ не может совпадать с одним из её входов, так как в противном случае данная схема реализовывала бы одну и ту же тождественную функцию при любой неисправности системы элементов и её можно было бы удалить из теста, при этом оставшийся набор содержал бы уже $l-1$ схему и также был бы проверяющим тестом, что невозможно в силу неравенства $l-1 < L_c(f, N, k)$. Таким образом, в каждой из схем $S_1, \dots, S_l$ содержится выходной элемент. Среди выходных элементов схем $S_1, \dots, S_l$ может быть не более l различных, поэтому по крайней мере $N-l$ элементов не принадлежат нижнему слою ни одной из этих схем, где $N-l \geqslant 1$ в силу (5). Обозначим эти $N-l$ элементов через $E_1, \dots, E_{N-l}$. Введём определённую на декартовом произведении $\{1, \dots, N-l\} \times \{1, \dots, l\}$ функцию

$$\chi(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } E_i \text{ принадлежит второму снизу слою } S_j, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

В каждой схеме S_j, $j = 1, \dots, l$, входы её выходного элемента могут быть соединены с выходами не более чем n элементов, так как каждый элемент, в том числе выходной, имеет n входов; поэтому мощность второго снизу слоя схемы S_j не превосходит n и $\sum_{i=1}^{N-l} \chi(i,j) \leqslant n$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{N-l} \sum_{j=1}^{l} \chi(i,j) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{N-l} \chi(i,j) \leqslant nl.$$

Из последнего соотношения заключаем, что выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{l} \chi(m,j) \leqslant \frac{nl}{N-l} \tag{6}$$

хотя бы для одного $m \in \{1, \dots, N-l\}$, т. е. некоторый элемент E_m принадлежит второму снизу слою не более чем $\frac{nl}{N-l}$ схем из $S_1, \dots, S_l$. Пусть

$$t = \sum_{j=1}^{l} \chi(m,j). \tag{7}$$

Если $t \geqslant k$, то из (6), (7) заключаем, что $\frac{nl}{N-l} \geqslant k$. В силу (5) имеем

$$0 < (2n+1)k - 2nN + 3n = k + n - 2n(N-k-1) \leqslant k + n.$$

Из двух последних соотношений следует, что

$$l \geqslant \frac{Nk}{k+n} = \left(1 - \frac{n}{k+n}\right) N \geqslant \left(1 - \frac{n}{(2n+1)k - 2nN + 3n}\right) N,$$

и утверждение теоремы выполнено. В дальнейшем будем предполагать, что

$$t \leqslant k - 1. \tag{8}$$

Пусть

$$N' = N - t - 1, \tag{9}$$

$$l' = l - t. \tag{10}$$

Тогда в силу (5), (8)

$$N' \geqslant N - (k-1) + 1 = (N-k-1) + 1 \geqslant 1, \tag{11}$$

$$l' \geqslant l - (k-1) = (l-k) + 1 \geqslant 1. \tag{12}$$

Соотношения (7), (8) означают, что элемент E_m принадлежит второму снизу слою ровно t схем из $S_1, \ldots, S_l$, где $t \leqslant k-1$. Обозначим эти t схем через $S'_1, \ldots, S'_t$, а оставшиеся $l - t = l'$ схем из $S_1, \ldots, S_l$ — через $S''_1, \ldots, S''_{l'}$, где $l' \geqslant 1$ в силу (12). Пусть M — множество выходных элементов схем $S'_1, \ldots, S'_t$, тогда

$$|M| \leqslant t \tag{13}$$

(некоторые элементы могут быть выходными более чем в одной схеме).

Условимся для упрощения записи в дальнейшем элемент E_m обозначать через E. Заметим, что данный элемент не является выходным элементом ни одной из схем $S_1, \ldots, S_l$ в силу определения элементов $E_1, \ldots,$ E_{N-l}; в частности, $E \notin M$. Таким образом, выполнено следующее свойство (*): элемент E не принадлежит ни нижнему, ни второму снизу слою схем $S''_1, \ldots, S''_{l'}$. Через B будем обозначать множество всех заданных функциональных элементов.

Пусть S — произвольная схема из $S''_1, \ldots, S''_{l'}$, A — некоторое подмножество множества B. Будем говорить, что множество A *забивает* схему S, если в множестве A содержится либо выходной элемент схемы S, либо все элементы её второго снизу слоя.

Лемма 1. *Пусть при некоторой неисправности системы элементов подмножество A множества B состоит целиком из неисправных элементов и забивает схему S, а элемент E не принадлежит A. Тогда функция, реализуемая схемой S при данной неисправности, не зависит от состояния элемента E.*

Доказательство. Если элемент E не содержится в схеме S, то утверждение леммы очевидно. Пусть E содержится в S. Из свойства (*) следует, что любая цепь, связывающая E с выходом схемы S, проходит через какой-то элемент второго снизу слоя этой схемы и через её выходной элемент, а значит, хотя бы через один элемент из A, который по условию неисправен. Отсюда следует, что в любой цепи, связывающей элемент E с выходом этой схемы, будет присутствовать неисправный элемент, реализующий константу, а в таком случае любое изменение состояния элемента E никак не отразится на функции, реализуемой схемой S. Лемма 1 доказана.

Пусть $B' = B \setminus (M \sqcup \{E\})$, тогда

$$|B| = N, \quad |B'| = |B| - |M| - 1 \geqslant N - t - 1 = N' \geqslant 1$$

в силу (9), (11), (13). Выберем в B' произвольное подмножество B_0 такое, что

$$|B_0| = N'. \tag{14}$$

Обозначим N' элементов, принадлежащих множеству B_0, через $E'_1, \ldots, E'_{N'}$. Введём определённую на декартовом произведении $\{1, \ldots, N'\} \times \{1, \ldots, N'\}$ функцию

$$\psi(r, j) = \begin{cases} 1, & \text{если найдётся такая схема из } S''_1, \ldots, S''_{l'}, \text{ что один из} \\ & \text{элементов } E'_r,\ E'_j \text{ принадлежит нижнему, а другой —} \\ & \text{второму снизу слою этой схемы,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отметим, что функция ψ симметрична по своим аргументам (хотя это свойство в дальнейшем не понадобится).

Пусть M_1 — подмножество множества B_0. Будем говорить, что для множества M_1 выполняется условие (**), если для любых двух различных элементов E'_r и E'_j из M_1 выполняется равенство $\psi(r, j) = 0$.

Лемма 2. *Пусть $M_1 \subseteq B_0$ — множество, для которого выполняется условие (**). Тогда множество $B \setminus (M_1 \cup \{E\})$ забивает каждую из схем $S''_1, \ldots, S''_{l'}$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что $E \notin M_1$, так как $M_1 \subseteq B_0 \subseteq B' = B \setminus (M \sqcup \{E\})$. Поэтому знак $\cup$ в условии леммы можно заменить на $\sqcup$. Рассмотрим произвольную схему S из $S''_1, \ldots, S''_{l'}$. Пусть E'_r — её выходной элемент. Если $E'_r \in B \setminus (M_1 \sqcup \{E\})$, то утверждение леммы для схемы S выполняется по определению забивающего множества. Пусть $E'_r \notin B \setminus (M_1 \sqcup \{E\})$. Тогда $E'_r \in B \setminus (B \setminus (M_1 \sqcup \{E\})) = M_1 \sqcup \{E\}$, а значит, в силу свойства (*) $E'_r \in M_1$. Покажем, что любой элемент E'_j второго снизу слоя схемы S принадлежит множеству $B \setminus (M_1 \sqcup \{E\})$. Элемент E'_j не может совпадать с элементом E, опять же в силу свойства (*); если $E'_j \in M_1$, то $\psi(r, j) = 1$ по определению ψ, что противоречит условию леммы. Таким образом, каждый элемент второго снизу слоя схемы S принадлежит множеству $B \setminus (M_1 \sqcup \{E\})$, а это означает, что данное множество забивает схему S. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $M_1 \subseteq B_0$ — множество, для которого выполняется условие* (**). *Тогда $|M_1| \leqslant N - k - 1$.*

Доказательство. Предположим, что $|M_1| \geqslant N - k$. Тогда множество $B \setminus (M_1 \sqcup \{E\})$ имеет мощность $|B| - (|M_1| + 1) \leqslant N - (N - k + 1) = k - 1$ и по лемме 2 забивает каждую из схем $S''_1, \ldots, S''_{l'}$. Предположим, что все элементы из множества $B \setminus (M_1 \sqcup \{E\})$ неисправны (и, для определённости, выдают нуль). Тогда, взяв это множество в качестве A в условии леммы 1, получим, что функции, реализуемые каждой из схем $S''_1, \ldots, S''_{l'}$, не зависят от состояния элемента E. Это означает, что при неисправности всех элементов из множества $B \setminus (M_1 \sqcup \{E\})$ изменение состояния элемента E с исправного на неисправное (для определённости, типа 0) никак не отразится на функциях, реализуемых схемами $S''_1, \ldots, S''_{l'}$, причём в обоих случаях неисправны будут не более $k - 1 + 1 = k$ элементов. Однако это изменение никак не отразится и на функциях, реализуемых схемами $S'_1, \ldots, S'_t$, поскольку их выходные элементы принадлежат множеству M, а $M_1 \sqcup \{E\} \subseteq B_0 \sqcup \{E\} \subseteq B' \sqcup \{E\} = B \setminus (M \sqcup \{E\}) \sqcup \{E\} = B \setminus M$, поэтому $M = B \setminus (B \setminus M) \subseteq B \setminus (M_1 \sqcup \{E\})$, т. е. все выходные элементы схем $S'_1, \ldots, S'_t$ неисправны и выдают нуль, а значит, каждая из этих схем реализует тождественный нуль вне зависимости от состояния элемента E. Таким образом, при указанных двух неисправностях системы элементов наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_l$, будут совпадать, что противоречит тому, что $(S_1, \ldots, S_l)$ — проверяющий тест. Лемма 3 доказана.

Идея дальнейших рассуждений состоит в том, чтобы построить множество $M_1 \subseteq B_0$ «достаточно большой» мощности, удовлетворяющее условию (**). Из леммы 3 и алгоритма построения этого множества бу-

дет получено некоторое неравенство между числами N', l', N, k и n, а с учётом (9), (10) — неравенство между числами N, l, t, k и n. В свою очередь, используя (6), (7), из последнего неравенства можно получить соотношение между числами N, l, k и n, а из него — требуемую в доказательстве теоремы нижнюю оценку для l.

Алгоритм построения множества M_1 «достаточно большой» мощности опишем по индукции. Пусть уже сделаны $i-1$ шагов данного алгоритма, где $i \geqslant 1$, тем самым определено подмножество B_{i-1} множества B_0 (при $i = 1$ это условие, очевидно, выполнено). Если $B_{i-1} = \varnothing$, то завершаем алгоритм; в противном случае определим его i-й шаг следующим образом. Среди элементов из множества B_{i-1} выберем элемент E'_{r_i} такой, что значение выражения $\sum\limits_{j | E'_j \in B_{i-1}} \psi(r_i, j)$ минимально (если таких элементов несколько, берём любой из них). Элемент E'_{r_i} отнесём к множеству $R_{i,1}$, а все элементы E'_j из B_{i-1}, для которых $\psi(r_i, j) = 1$, — к множеству $R_{i,2}$. Тогда

$$|R_{i,1}| = 1, \tag{15}$$

$$|R_{i,2}| = \Bigl| \bigcup_{\substack{j | E'_j \in B_{i-1}, \\ \psi(r_i,j)=1}} E'_j \Bigr| = \sum_{\substack{j | E'_j \in B_{i-1}, \\ \psi(r_i,j)=1}} 1 = \sum_{j | E'_j \in B_{i-1}} \psi(r_i, j). \tag{16}$$

Отметим, что $R_{i,1} \cap R_{i,2} = \varnothing$, так как $\psi(r_i, r_i) = 0$ в силу определения функции ψ. Положим $B_i = B_{i-1} \setminus (R_{i,1} \sqcup R_{i,2})$. Тогда

$$B_{i-1} = R_{i,1} \sqcup R_{i,2} \sqcup B_i. \tag{17}$$

На этом i-й шаг алгоритма считаем завершённым и заменяем i на $i + 1$.

Поясним содержательный смысл указанного правила выбора элемента E'_{r_i} и определения множеств $R_{i,1}$ и $R_{i,2}$. Элемент E'_{r_i} будет предполагаться принадлежащим множеству M_1, т. е. $R_{i,1} \subseteq M_1$. Для того чтобы выполнялось условие (**), необходимо, чтобы ни один элемент из множества $R_{i,2}$ не принадлежал M_1. Таким образом, $R_{i,2}$ играет роль множества, которое мы «выкидываем» из рассмотрения на i-м шаге, так как нашей целью является построение множества M_1, удовлетворяющего условию (**). Условие на минимальность значения выражения $\sum\limits_{j | E'_j \in B_{i-1}} \psi(r_i, j)$ означает в силу (16), что $|R_{i,2}|$ должно быть минимально возможным, т. е. элемент E'_{r_i} выбирается так, что число элементов, которые после этого выбора точно не принадлежат M_1 и «выкидываются» из рассмотрения, минимально возможное. Это позволяет надеяться,

что описанный алгоритм проработает «достаточно много» шагов (пока очередное множество B_{i-1} не окажется пустым). Так как на i-м шаге алгоритма к M_1 добавляется один элемент (E'_{r_i}), общее число шагов алгоритма q будет равно мощности построенного множества M_1. Из алгоритма следует, что множество M_1 удовлетворяет условию (**). Действительно, рассмотрим два элемента $E'_{r_{i'}}$ и $E'_{r_{i''}}$, выбранные на i'-м и i''-м шагах алгоритма соответственно, где i' и i'' — произвольные различные индексы от 1 до q (без ограничения общности $i' < i''$). Тогда на i'-м шаге все элементы E'_j из множества $B_{i'-1}$, для которых $\psi(r_{i'}, j) = 1$, окажутся в множестве $R_{i',2}$, следовательно, для каждого элемента E'_s из множества $B_{i'} = B_{i'-1} \setminus (R_{i',1} \sqcup R_{i',2})$ выполняется равенство $\psi(r_{i'}, s) = 0$, а элемент $E'_{r_{i''}}$ принадлежит множеству $B_{i''-1} \subseteq B_{i''-2} \subseteq \dots \subseteq B_{i'}$. Таким образом, $\psi(r_{i'}, r_{i''}) = 0$ для любых двух различных элементов $E'_{r_{i'}}$ и $E'_{r_{i''}}$ из множества M_1, т. е. множество M_1 удовлетворяет условию (**). Из алгоритма также следует, что $M_1 \subseteq B_0$. Тогда в силу леммы 3 заключаем, что $q = |M_1| \leqslant N - k - 1$. С другой стороны, хотя бы один шаг алгоритма будет выполнен, так как множество B_0 непусто (см. (11), (14)). Таким образом, указанный алгоритм завершится после q шагов, где

$$1 \leqslant q \leqslant N - k - 1. \tag{18}$$

К этому моменту будут построены попарно не пересекающиеся множества $R_{1,1}, R_{1,2}, \dots, R_{q,1}, R_{q,2}$. Причиной остановки алгоритма после q шагов может быть только выполнение равенства $B_q = \varnothing$, тогда в силу (17)

$$\begin{aligned} B_0 = R_{1,1} \sqcup R_{1,2} \sqcup B_1 = R_{1,1} \sqcup R_{1,2} \sqcup R_{2,1} \sqcup R_{2,2} \sqcup B_2 = \dots \\ = R_{1,1} \sqcup R_{1,2} \sqcup \dots \sqcup R_{q,1} \sqcup R_{q,2} \sqcup B_q \\ = R_{1,1} \sqcup R_{1,2} \sqcup \dots \sqcup R_{q,1} \sqcup R_{q,2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Отсюда и из (14), (15) заключаем, что

$$N' = |B_0| = |R_{1,1}| + |R_{1,2}| + \dots + |R_{q,1}| + |R_{q,2}| = q + \sum_{i=1}^{q} |R_{i,2}|. \tag{20}$$

Для любого $i \in \{1, \dots, q\}$ в силу (16) имеем

$$|R_{i,2}| = \sum_{j | E'_j \in B_{i-1}} \psi(r_i, j) = \phi(r_i, i), \tag{21}$$

где

$$\phi(r, i) = \sum_{j | E'_j \in B_{i-1}} \psi(r, j). \tag{22}$$

Далее, для любого элемента $E'_{r'_i}$ из множества B_{i-1} имеем

$$\phi(r'_i,i)=\sum_{j|E'_j\in B_{i-1}}\psi(r'_i,j)\geqslant\sum_{j|E'_j\in B_{i-1}}\psi(r_i,j)=\phi(r_i,i), \tag{23}$$

поскольку в ходе описанного алгоритма элемент E'_{r_i} выбран среди элементов из множества B_{i-1} так, что значение выражения $\sum\limits_{j|E'_j\in B_{i-1}}\psi(r_i,j)$ минимально возможное. Из определения элементов $E'_1,\ldots,E'_{N'}$ следует соотношение

$$B_0=\bigcup_{j=1}^{N'}\{E'_j\}, \tag{24}$$

а из (19) для любого $i\in\{1,\ldots,q\}$ — соотношение

$$B_{i-1}\subseteq B_0. \tag{25}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{N'}\sum_{j=1}^{N'}\psi(r,j)\overset{(19),(24)}{=}\sum_{i=1}^{q}\sum_{\substack{r'_i|\\ E'_{r'_i}\in R_{i,1}\sqcup R_{i,2}}}\sum_{j=1}^{N'}\psi(r'_i,j)\\
&\overset{(24),(25)}{\geqslant}\sum_{i=1}^{q}\sum_{\substack{r'_i|\\ E'_{r'_i}\in R_{i,1}\sqcup R_{i,2}}}\sum_{j|E'_j\in B_{i-1}}\psi(r'_i,j)\overset{(22)}{=}\sum_{i=1}^{q}\sum_{\substack{r'_i|\\ E'_{r'_i}\in R_{i,1}\sqcup R_{i,2}}}\phi(r'_i,i)\\
&\overset{(23)}{\geqslant}\sum_{i=1}^{q}\sum_{r'_i|E'_{r'_i}\in R_{i,1}\sqcup R_{i,2}}\phi(r_i,i)=\sum_{i=1}^{q}\phi(r_i,i)\cdot|R_{i,1}\sqcup R_{i,2}|\\
&=\sum_{i=1}^{q}\phi(r_i,i)\cdot(|R_{i,1}|+|R_{i,2}|)\overset{(15),(21)}{=}\sum_{i=1}^{q}|R_{i,2}|\cdot(1+|R_{i,2}|)\\
&=\sum_{i=1}^{q}\left(\left(|R_{i,2}|+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)=\sum_{i=1}^{q}\left(|R_{i,2}|+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{q}{4}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Введём определённую на декартовом произведении $\{1,\ldots,N'\}\times\{1,\ldots,N'\}\times\{1,\ldots,l'\}$ функцию

$$\theta(r,j,j')=\begin{cases}1, & \text{если один из элементов } E'_r,\ E'_j \text{ принадлежит}\\ & \text{нижнему, а другой — второму снизу слою схемы } S''_{j'},\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Из определений функций $\psi(r,j)$, $\theta(r,j,j')$ следует, что

$$\psi(r,j) \leqslant \sum_{j'=1}^{l'} \theta(r,j,j') \tag{27}$$

для любых $r, j \in \{1, \dots, N'\}$; кроме того, если фиксировано число j', то число таких пар (r,j), для которых $\theta(r,j,j') = 1$, равно удвоенному произведению мощностей нижнего и второго снизу слоёв схемы $S''_{j'}$ (так как либо элемент E'_r должен принадлежать её нижнему, а элемент E'_j — второму снизу слою, либо наоборот) и, как следствие, не превосходит $2n$, поскольку мощность нижнего слоя схемы $S''_{j'}$ равна 1, а выше показано, что мощность второго снизу слоя любой схемы из $S_1, \dots, S_l$ не превосходит n. Поэтому

$$\sum_{r=1}^{N'} \sum_{j=1}^{N'} \theta(r,j,j') \leqslant 2n. \tag{28}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{N'} \sum_{j=1}^{N'} \psi(r,j) &\overset{(27)}{\leqslant} \sum_{r=1}^{N'} \sum_{j=1}^{N'} \sum_{j'=1}^{l'} \theta(r,j,j') \\ &= \sum_{j'=1}^{l'} \sum_{r=1}^{N'} \sum_{j=1}^{N'} \theta(r,j,j') \leqslant \sum_{j'=1}^{l'} 2n = 2nl'. \end{aligned} \tag{29}$$

Сравнивая соотношения (26) и (29), находим, что

$$2nl' \geqslant \sum_{i=1}^{q} \left(|R_{i,2}| + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{q}{4},$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{q} a_i^2 \leqslant 2nl' + \frac{q}{4}, \tag{30}$$

где

$$a_i = |R_{i,2}| + \frac{1}{2}. \tag{31}$$

Согласно известному неравенству между средними арифметическим и квадратичным n чисел (оно следует, например, из n-мерного варианта

неравенства Коши при $b_1 = \ldots = b_n = \frac{1}{n}$, см. [1, с. 84, (4.45)]) имеет место неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{q} a_i\right)/q \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{q} a_i^2\right)/q}.$$

Из этого неравенства и (30) заключаем, что

$$\sum_{i=1}^{q} a_i \leqslant \sqrt{q\left(2nl' + \frac{q}{4}\right)}.$$

Отсюда следует, что

$$N' \overset{(20)}{=} q + \sum_{i=1}^{q} |R_{i,2}| \overset{(31)}{=} q + \sum_{i=1}^{q} \left(a_i - \frac{1}{2}\right) = \frac{q}{2} + \sum_{i=1}^{q} a_i$$
$$\leqslant \frac{q}{2} + \sqrt{q\left(2nl' + \frac{q}{4}\right)} \overset{(18)}{\leqslant} \frac{N-k-1}{2} + \sqrt{(N-k-1)\left(2nl' + \frac{N-k-1}{4}\right)},$$

$$N - t - 1 - \frac{N-k-1}{2} \overset{(9)}{\leqslant} \sqrt{(N-k-1)\left(2nl' + \frac{N-k-1}{4}\right)},$$
$$\frac{N+k+1}{2} - t - 1 \leqslant \sqrt{(N-k-1)\left(2nl' + \frac{N-k-1}{4}\right)}.$$

Левая часть полученного неравенства неотрицательна в силу (5), (8), поэтому

$$\left(\frac{N+k+1}{2} - t - 1\right)^2 \leqslant (N-k-1)\left(2nl' + \frac{N-k-1}{4}\right),$$
$$\left(\frac{N+k+1}{2} - t - 1\right)^2 - \left(\frac{N-k-1}{2}\right)^2 \leqslant (N-k-1)\cdot 2nl',$$
$$(k-t)(N-t-1) \leqslant (N-k-1)\cdot 2nl',$$
$$l' \overset{(5)}{\geqslant} \frac{(k-t)(N-t-1)}{2n(N-k-1)},$$
$$l - t \overset{(10)}{\geqslant} \frac{(k-t)(N-t-1)}{2n(N-k-1)},$$

$$N - t - 1 \overset{(5)}{\geqslant} l - t \geqslant \frac{(k-t)(N-t-1)}{2n(N-k-1)},$$

$$1 \overset{(9),(11)}{\geqslant} \frac{(k-t)}{2n(N-k-1)},$$

$$2n(N-k-1) \overset{(5)}{\geqslant} k - t,$$

$$t \geqslant (2n+1)k - 2nN + 2n,$$

$$\frac{nN}{N-l} - n = \frac{nl}{N-l} \overset{(6),(7)}{\geqslant} t \geqslant (2n+1)k - 2nN + 2n,$$

$$\frac{nN}{(2n+1)k - 2nN + 3n} \overset{(5)}{\geqslant} N - l,$$

$$l \geqslant \left(1 - \frac{n}{(2n+1)k - 2nN + 3n}\right) N.$$

Теорема 1 доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Н. П. Редькину за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Беккенбах Э., Беллман Р.** Введение в неравенства. М.: Мир, 1965. 168 с.
2. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984. 139 с.
3. **Попков К. А.** Оценки длин проверяющих и диагностических тестов для функциональных элементов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 6. С. 73–89.
4. **Попков К. А.** Проверяющие и диагностические тесты для конъюнкторов, дизъюнкторов и инверторов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2014. № 6. С. 40–44.
5. **Попков К. А.** Проверяющие и диагностические тесты для функциональных элементов // Дискрет. математика. 2014. Т. 26, вып. 2. С. 83–99.
6. **Попков К. А.** О единичных тестах для функциональных элементов // Дискрет. математика. 2015. Т. 27, вып. 2. С. 73–93.
7. **Редькин Н. П.** О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1986. № 1. С. 72–74.
8. **Редькин Н. П.** О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Мат. вопросы кибернетики. 1989. Вып. 2. С. 198–222.

9. **Редькин Н. П.** Надёжность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992. 191 с.
10. **Романов Д. С.** О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов // Дискрет. математика. 2013. Т. 25, вып. 2. С. 104–120.
11. **Романов Д. С.** Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискрет. математика. 2014. Т. 26, вып. 2. С. 100–130.
12. **Чегис И. А., Яблонский С. В.** Логические способы контроля работы электрических схем // Тр. МИАН. 1958. Т. 51. С. 270–360.
13. **Яблонский С. В.** Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюз. семинара по дискрет. математике и её прил. М.: Изд-во МГУ. 1986. С. 7–12.
14. **Яблонский С. В.** Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Мат. вопросы кибернетики. 1988. Вып. 1. С. 5–25.
15. **Reddy S. M.** Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. Vol. 21, No. 1. P. 124–141.

Попков Кирилл Андреевич

Статья поступила
13 февраля 2015 г.

Исправленный вариант —
22 июля 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
September–October 2015. Volume 22, No. 5. P. 52–70

UDC 519.718.7 DOI: 10.17377/daio.2015.22.476

ESTIMATIONS ON LENGTHS OF TESTS OF FUNCTIONAL ELEMENTS UNDER A LARGE NUMBER OF PERMISSIBLE FAULTS

K. A. Popkov[1]
[1]Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, 119991 Moscow, Russia
e-mail: kirill-formulist@mail.ru

Abstract. The problems of check of operability and state diagnosis of N logic gates which realize a given Boolean function $f(x_1, \dots, x_n)$ in their perfect states are studied by means of composition of one-output logic circuits of them and observation of values produced by these circuits on any value sets of input variables. Random constant faults on outputs of gates are permitted; at the same time, it is assumed that not more than k gates are faulted, where k is a given natural number that does not rank over N. It is needed to minimize a number of circuits required for check of operability and determination of states of all gates. A lower bound on a number of these circuits is obtained when k is close to N. As a corollary from this bound it is derived that, under some condition for N and belonging of k to some segment, the number of circuits mentioned cannot be less than ck, where $c > 1$ is a constant which does not depend on choice of k from this segment. Bibliogr. 15.

Keywords: logic gate, fault, logic circuit, check test, diagnostic test.

REFERENCES

1. **E. F. Beckenbach** and **R. Bellman,** *An Introduction to Inequalities,* Random House, New York, 1961. Translated under the title *Vvedenie v neravenstva,* Mir, Moscow, 1965.
2. **O. B. Lupanov,** *Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem* (Asymptotic Bounds on Complexity of Control Systems), Izd. MGU, Moscow, 1984.
3. **K. A. Popkov,** Bounds on lengths of check and diagnostic tests for logic gates, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **21**, No. 6, 73–89, 2014.
4. **K. A. Popkov,** Fault detection and diagnostic tests for AND, OR, and NOT gates, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1,* No. 6, 40–44, 2014. Translated in *Mosc. Univ. Math. Bull.,* **69**, No. 6, 267–271, 2014.

5. **K. A. Popkov,** Fault detection and diagnostic tests for logic gates, *Diskretn. Mat.,* **26**, No. 2, 83–99, 2014. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **24**, No. 4, 213–225, 2014.
6. **K. A. Popkov,** On single tests for logic gates, *Diskretn. Mat.,* **27**, No. 2, 73–93, 2015.
7. **N. P. Red'kin,** On complete checking tests for circuits of functional elements, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1,* No. 1, 72–74, 1986.
8. **N. P. Red'kin,** On complete checking tests for circuits of functional elements, in S. V. Yablonskii, ed., *Matematicheskie voprosy kibernetiki* (Mathematical Problems of Cybernetics), Vol. 2, pp. 198–222, Nauka, Moscow, 1989.
9. **N. P. Red'kin,** *Nadezhnost' i diagnostika skhem* (Reliability and Diagnosis of Circuits), Izd. MGU, Moscow, 1992.
10. **D. S. Romanov,** On the synthesis of circuits admitting complete fault detection test sets of constant length under arbitrary constant faults at the outputs of the gates, *Diskretn. Mat.,* **25**, No. 2, 104–120, 2013. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **23**, No. 3–4, 343–362, 2013.
11. **D. S. Romanov,** Method of synthesis of easily testable circuits admitting single fault detection tests of constant length, *Diskretn. Matem.,* **26**, No. 2, 100–130, 2014. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **24**, No. 4, 227–251, 2014.
12. **I. A. Chegis** and **S. V. Yablonskii,** Logical methods for control of electric circuits, *Tr. MIAN SSSR,* **51**, 270–360, 1958.
13. **S. V. Yablonskii,** Reliability and monitoring of control systems, in *Materialy Vsesoyuznogo seminara po diskretnoi matematike i ee prilozheniyam* (Proc. All-Union Seminar on Discrete Mathematics and Its Applications), pp. 7–12, Izd. MGU, Moscow, 1986.
14. **S. V. Yablonskii,** Certain questions of reliability and monitoring of control systems, in S. V. Yablonskii, ed., *Matematicheskie voprosy kibernetiki* (Mathematical Problems of Cybernetics), Vol. 1, pp. 5–25, Nauka, Moscow, 1988.
15. **S. M. Reddy,** Easily testable realization for logic functions, *IEEE Trans. Comput.,* **21**, No. 1, 124–141, 1972.

Kirill A. Popkov

Received
13 February 2015

Revised
22 July 2015