ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2015. Том 22, № 5. С. 30–51

УДК 519.8 DOI: 10.17377/daio.2015.22.477

ЕДИНЫЙ ПОДХОД К НАХОЖДЕНИЮ РАДИУСОВ УСТОЙЧИВОСТИ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ О МАКСИМАЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ ГРАФА $^{*)}$

К. Г. Кузьмин[1]
[1]Белорусский гос. университет,
пр. Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь
e-mail: kuzminkg@mail.ru

Аннотация. Рассматривается многокритериальный вариант задачи о максимальном разрезе графа. Получены формулы и достижимые оценки радиусов устойчивости решений этой задачи, а также различных типов устойчивости самой задачи в случае, когда в пространствах возмущаемых параметров заданы метрики Гёльдера. Доказано, что задача нахождения радиусов любых типов устойчивости является труднорешаемой при P≠NP. Библиогр. 13.

Ключевые слова: многокритериальность, разрез графа, множество Парето, радиус устойчивости, метрика Гёльдера, труднорешаемость.

Введение

Исследование устойчивости в многокритериальных задачах дискретной оптимизации осуществляется преимущественно в двух направлениях [10]: качественном и количественном.

Качественное направление ориентировано на получение условий, при выполнении которых множеству эффективных решений задачи присуще некоторое наперёд заданное свойство, характеризующее устойчивость задачи к малым возмущениям исходных данных. Ряд результатов в этом направлении относится к отысканию необходимых и достаточных условий различных типов устойчивости многокритериальных булевых и целочисленных задач с различными принципами оптимальности (см., например, [6]).

$^{*)}$Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13К–078) и European Community Mobility Programme (проект 204289–EM–1–2011–1–FI–ERA MUNDUS–EMA21).

Количественное направление связано с получением оценок допустимых изменений в исходных данных, сохраняющих некоторые наперёд заданные свойства оптимальных решений (см., например, [4, 9]), и разработкой алгоритмов вычисления этих оценок (см., например, [8, 12, 13]). Ключевым понятием здесь является определение радиуса устойчивости, под которым понимается радиус наибольшей из окрестностей исходных данных в пространстве параметров задачи, для которых любая возмущённая задача со значениями параметров из этой окрестности является в определённом смысле «близкой» к исходной задаче.

Предлагаемая статья относится к количественному направлению исследований. Она посвящена вопросам поиска общего подхода к исследованию различных типов устойчивости многокритериальных комбинаторных задач, который с общих позиций позволяет описывать разные виды устойчивости и количественные связи между ними. В данной работе для многокритериальной задачи о максимальном разрезе графа вводятся характеристики, показывающие насколько «близки» в смысле устойчивости друг к другу два допустимых решения, и на их основе конструируются утверждения о радиусах устойчивости. Также установлен факт труднорешаемости задачи нахождения радиуса любого из типов устойчивости при P≠NP. Отметим, что исследования устойчивости решений многокритериальной задачи о максимальном разрезе графа в предположении, что область возмущений неограничена, были проведены в [2, 3].

1. Постановка задачи и основные определения

Рассмотрим связный помеченный простой (n, m)-граф $G = (V, E)$ с множествами вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $n \geqslant 3$, и рёбер $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $m \geqslant 2$. Пусть задано разбиение множества V вершин графа G на два непустых непересекающихся подмножества S и $\overline{S}$. Тогда подмножество рёбер графа G, концевые вершины которых находятся в разных подмножествах, называется *разрезом графа* и обозначается через $(S, \overline{S})$. Если каждому ребру $\{v_i, v_j\} \in E$ поставлено в соответствие неотрицательное число $w_{\{i,j\}}$, называемое *весом ребра* $\{v_i, v_j\}$, то (однокритериальная) задача о максимальном разрезе неориентированного графа G состоит в отыскании такого разреза $(S, \overline{S})$, чтобы сумма весов рёбер была максимальной. Эту задачу легко свести к задаче булева квадратичного программирования. Для этого всякому разрезу $(S, \overline{S})$ графа G поставим в соответствие булев вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{E}^n = \{0, 1\}^n$ с компонентами

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \in S, \\ 0, & \text{если } v_i \in \overline{S}. \end{cases}$$

Ясно, что всякому вектору $x \in X = E^n \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ соответствует разрез $(S, \overline{S})$ с подмножествами $S = \{v_i \in V \mid x_i = 1\}$ и $\overline{S} = \{v_i \in V \mid x_i = 0\}$. В частности, вектору $\overline{x} = \mathbf{1} - x \in X$ соответствует разрез $(\overline{S}, S)$. Таким образом, каждый вектор $x \in X$ естественно считать разрезом графа (или допустимым решением задачи). В дальнейшем будем называть вектор x *разрезом* или *решением*, используя эти слова как синонимы.

Чтобы получить многокритериальный вариант нашей задачи, всякому ребру $\{v_i, v_j\} \in E$ сопоставим вектор $\big(w^1_{\{i,j\}}, w^2_{\{i,j\}}, \dots, w^s_{\{i,j\}}\big)^T$, где $w^k_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — вес ребра $\{v_i, v_j\}$, соответствующий критерию $k \in N_s$. Из этих m столбцов в соответствии с нумерацией рёбер графа G образуем матрицу $W = \big[w^k_{\{i,j\}}\big] \in \mathbb{R}^{s\times m}_+$ со строками $W_k \in \mathbb{R}^m_+$, $k \in N_s = \{1, 2, \dots, s\}$. Легко видеть, что квадратичная функция

$$f_k(x, W_k) = \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} w^k_{\{i,j\}} (x_i - x_j)^2,$$

заданная на множестве разрезов X, представляет собой суммарный вес разреза x по критерию k. В результате возникает s-критериальный вариант задачи о максимальном разрезе графа

$$Z^s(W): \quad f(x, W) = \big(f_1(x, W_1), f_2(x, W_2), \dots, f_s(x, W_s)\big) \to \max_{x \in X},$$

состоящей в поиске *множества Парето*, т. е. *множества эффективных решений* (эффективных разрезов) $P^s(W) = \{x \in X \mid \mathrm{Dom}(x, W) = \varnothing\}$, где $\mathrm{Dom}(x, W) = \{x' \in X \mid f(x, W) \leqslant f(x', W) \ \& \ f(x, W) \neq f(x', W)\}$. Так как $f(x, W) = f(\overline{x}, W)$, имеем $x \in P^s(W)$ тогда и только тогда, когда $\overline{x} \in P^s(W)$, тем самым $|P^s(W)|$ — чётное число.

Учитывая нумерацию рёбер графа G, далее будем использовать более простой способ индексации элементов матрицы W, а именно, будем полагать, что $W = [w_{kl}] \in \mathbb{R}^{s\times m}_+$. Тогда $W_k = (w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{km})$, $k \in N_s$.

2. Различные типы устойчивости задачи и её решений

Будем исследовать различные типы устойчивости задачи $Z^s(W)$ и её решений к возмущениям параметров (элементов матрицы W) векторной функции $f(x, W)$. Для этого в пространстве критериев $\mathbb{R}^s$ и решений $\mathbb{R}^m$ зададим, вообще говоря, различные нормы Гёльдера $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_r$ соответственно, где $p, r \in [1, \infty]$. Напомним, что под нормой Гёльдера $\|\cdot\|_p$ вектора $z = (z_1, z_2, \dots, z_d)$ размерности $d \in \mathbb{N}$ понимается число

$$\|z\|_p = \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i \in N_d} |z_i|^p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty, \\ \max_{i \in N_d} |z_i|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

В пространстве решений $\mathbb{R}^m$ наряду с нормой $\|\cdot\|_r$ будем использовать сопряжённую к ней норму $\|\cdot\|_{r'}$, где величины r и r' связаны равенством $1/r + 1/r' = 1$. Под нормой матрицы W будем понимать норму вектора, составленного из норм её строк: $\|W\| = \|(\|W_1\|_r, \|W_2\|_r, \ldots, \|W_s\|_r)\|_p$. Изменения элементов матрицы W будем моделировать, прибавляя к ней некоторую возмущающую матрицу $U \in \Omega(\varepsilon) = \{U \in \mathbb{R}^{s\times m} \mid W + U \in \mathbb{R}_+^{s\times m} \ \& \ \|U\| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$.

При этом рассмотрим пять традиционных [4, 6] типов устойчивости задачи. Задача $Z^s(W)$ называется T_1-*устойчивой* (*сильно устойчивой* в терминологии [4]), если непусто множество

$$\Xi_1 = \{\varepsilon > 0 \mid \forall U \in \Omega(\varepsilon)\ (P^s(W) \cap P^s(W+U) \neq \varnothing)\};$$

T_2-*устойчивой* (*сильно квазиустойчивой*), если непусто множество

$$\Xi_2 = \{\varepsilon > 0 \mid \exists x^* \in X\ \forall U \in \Omega(\varepsilon)\ (x^* \in P^s(W+U))\};$$

T_3-*устойчивой* (*устойчивой*), если непусто множество

$$\Xi_3 = \{\varepsilon > 0 \mid \forall U \in \Omega(\varepsilon)\ (P^s(W+U) \subseteq P^s(W))\};$$

T_4-*устойчивой* (*квазиустойчивой*), если непусто множество

$$\Xi_4 = \{\varepsilon > 0 \mid \forall U \in \Omega(\varepsilon)\ (P^s(W) \subseteq P^s(W+U))\};$$

T_5-*устойчивой* (*стабильной*), если непусто множество

$$\Xi_5 = \{\varepsilon > 0 \mid \forall U \in \Omega(\varepsilon)\ (P^s(W) = P^s(W+U))\}.$$

В дальнейшем будем использовать следующее обозначение для множества решений задачи $Z^s(W)$, не являющихся эффективными (неэффективных решений): $\overline{P}^s(W) = X \setminus P^s(W)$.

Помимо устойчивости задачи также изучается устойчивость одного решения (см., например, [2, 6, 9]).

Эффективное решение $x^0 \in P^s(W)$ называется *устойчивым*, если непусто множество $\Theta_P = \{\varepsilon > 0 \mid \forall U \in \Omega(\varepsilon)\ (x^0 \in P^s(W+U))\}$; неэффективное решение $x^0 \in \overline{P}^s(W)$ называется *устойчивым*, если непусто множество $\Theta_{\overline{P}} = \{\varepsilon > 0 \mid \forall U \in \Omega(\varepsilon)\ (x^0 \in \overline{P}^s(W+U))\}$. Отметим, что взаимосвязь между устойчивостью решений задачи ЦЛП и её T_2–T_5-устойчивостью установлена в [6]. В данной работе укажем аналогичные связи для радиусов устойчивости задачи $Z^s(W)$.

Будем полагать, что $\sup\varnothing = 0$. *Радиусом* $\rho_i(W)$ T_i-*устойчивости* задачи $Z^s(W)$, где $i \in N_5$, называется число $\rho_i(W) = \sup \Xi_i$. Пусть Π — это одно из множеств $P^s(W)$ или $\overline{P}^s(W)$. *Радиусом* $\rho(x^0, W)$ *устойчивости решения* $x^0 \in \Pi$ задачи $Z^s(W)$ называется число $\rho(x^0, W) = \sup \Theta_\Pi$.

Согласно этим определениям радиус T_i-устойчивости положителен тогда и только тогда, когда задача T_i-устойчива; радиус устойчивости решения положителен в том и только том случае, когда оно устойчиво. Заметим, что при $P^s(W) = X$ множества Ξ_1 и Ξ_3 не ограничены, поэтому $\rho_1(W) = \rho_3(W) = +\infty$.

Анализируя определения радиусов устойчивости решений и задачи, нетрудно понять, что верны следующие соотношения:

$$\rho_1(W) \geqslant \max\{\rho_2(W), \rho_3(W)\}, \quad \rho_2(W) = \max_{x \in P^s(W)} \rho(x, W), \tag{1}$$

$$\rho_3(W) = \min_{x \in \overline{P}^s(W)} \rho(x, W), \quad \rho_4(W) = \min_{x \in P^s(W)} \rho(x, W), \tag{2}$$

$$\rho_5(W) = \min_{x \in X} \rho(x, W) = \min\{\rho_3(W), \rho_4(W)\}. \tag{3}$$

3. Радиусы устойчивости решений

Введём характеристики, показывающие насколько «далеко» в смысле радиуса устойчивости находятся друг от друга два допустимых решения задачи $Z^s(W)$. Положим

$$\delta^\star(x, x', W) = \big(\delta_1^\star(x, x', W_1), \delta_2^\star(x, x', W_2), \ldots, \delta_s^\star(x, x', W_s)\big),$$

где $\star$ — один из знаков: либо $\geqslant$, либо $>$,

$$\delta_k^\star(x, x', W_k) = \sup\{\varepsilon > 0 \mid \forall u \in \Omega_k(\varepsilon)\ (f_k(x, W_k + u) \star f_k(x', W_k + u))\},$$

$$\Omega_k(\varepsilon) = \left\{u \in \mathbb{R}^m \mid W_k + u \in \mathbb{R}_+^m \ \&\ \|u\|_r < \varepsilon\right\}, \quad k \in N_s.$$

Очевидно, что для любого $k \in N_s$

$$\delta_k^{\geqslant}(x, x', W_k) \geqslant \delta_k^{>}(x, x', W_k) \geqslant 0. \tag{4}$$

В теореме 1 раскроем конкретное содержание величин $\delta_k^\star(x, x', W_k)$, $k \in N_s$, для задачи $Z^s(W)$. Общая идея этой теоремы заключается в том, что наибольшее возмущение неравенства $f_k(x, W_k) \star f_k(x', W_k)$ происходит, когда абсолютные значения определённых компонент вектора u как можно более близки между собой. Для того чтобы сформулировать теорему 1, введём ряд обозначений. Каждому решению $x \in X$ и всякому ребру $e_l = \{v_i, v_j\} \in E$ поставим в соответствие число $\gamma_l(x) = |x_i - x_j|$. Легко видеть, что $\gamma_l(x) = \gamma_l(\overline{x})$. Для любых x и x' положим

$$\sigma(x, x') = (\sigma_1(x, x'), \sigma_2(x, x'), \ldots, \sigma_m(x, x'))^T,$$

где $\sigma_l(x,x') = \gamma_l(x) - \gamma_l(x')$, $l \in N_m$. Всякому решению $x \in X$ поставим в соответствие множество $N(x) = \{l \in N_m \mid \gamma_l(x) = 1\}$. Пусть

$$\mu(x,x',\alpha_k) = (\mu_1(x,x',\alpha_k), \mu_2(x,x',\alpha_k), \dots, \mu_m(x,x',\alpha_k))^T,$$

где $\alpha_k \geqslant 0$ и для $l \in N_m$

$$\mu_l(x,x',\alpha_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } l \in N(x) \setminus N(x') \text{ и } w_{kl} < \alpha_k, \\ \sigma_l(x,x') & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если для некоторого $k^* \in N_s$ выполняется неравенство $f_{k^*}(x, W_{k^*}) > f_{k^*}(x', W_{k^*})$, то $N(x) \not\subseteq N(x')$. Тогда множество $N(x) \setminus N(x')$ содержит $t \geqslant 1$ элементов. Для каждого индекса $k \in N_s$ упорядочим элементы w_{kl}, $l \in N(x) \setminus N(x')$, по неубыванию: $0 \leqslant w_{kl_1} \leqslant w_{kl_2} \leqslant \dots \leqslant w_{kl_t}$. Будем также считать, что $w_{kl_0} = 0$. Заметим, что при $f_k(x, W_k) > f_k(x', W_k)$ для любого индекса $i \in N_t$ верны неравенства

$$w_{kl_0} < \frac{W_k\mu(x,x',w_{kl_i})}{\|\mu(x,x',w_{kl_i})\|_1} \leqslant \frac{\sum\limits_{j=i}^{t} w_{kl_j}}{\|\mu(x,x',w_{kl_i})\|_1} \leqslant \frac{(t-i+1)w_{kl_t}}{\|\mu(x,x',w_{kl_i})\|_1} \leqslant w_{kl_t}.$$

Поэтому справедливо

Утверждение 1. *Если $f_k(x, W_k) > f_k(x', W_k)$, то существует единственный индекс $q \in N_t$, при котором верны неравенства*

$$w_{kl_{q-1}} < \frac{W_k\mu(x,x',w_{kl_q})}{\|\mu(x,x',w_{kl_q})\|_1} \leqslant w_{kl_q}.$$

Далее всюду будем полагать, что $q = q(k)$ — это индекс, определяемый утверждением 1. Отметим, что индекс q может быть также найден из равенства

$$q = \arg\max\left\{ \frac{\sum_{j=i}^{t} w_{kl_j}}{\|\mu(x,x',w_{kl_i})\|_1} \mid i \in N_t \right\}.$$

Пусть

$$g_k(x,x',i) = \frac{W_k\mu(x,x',w_{kl_q})}{\|\mu(x,x',w_{kl_q})\|_i}$$

и $\widetilde{W}_k$ — вектор с элементами $\widetilde{w}_{kl}$, $l \in N_m$, где

$$\widetilde{w}_{kl} = \begin{cases} w_{kl}, & \text{если } l \in N(x) \setminus N(x') \text{ и } w_{kl} < g_k(x,x',1), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Для любых* $x, x' \in X$, $k \in N_s$ *и* $r \in [1, \infty]$ *выполняются равенства*

$$\delta_k^{>}(x, x', W_k) = \begin{cases} \|(g_k(x, x', r'), \|\widetilde{W}_k\|_r)\|_r & \text{при } f_k(x, W_k) > f_k(x', W_k), \\ 0 & \text{при } f_k(x, W_k) \leqslant f_k(x', W_k), \end{cases}$$

$$\delta_k^{\geqslant}(x, x', W_k) = \begin{cases} \delta_k^{>}(x, x', W_k) & \text{при } N(x) \not\supseteq N(x'), \\ +\infty & \text{при } N(x) \supseteq N(x'). \end{cases}$$

Доказательство. Для краткости величину $\|(g_k(x, x', r'), \|\widetilde{W}_k\|_r)\|_r$ обозначим через φ. Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1: $N(x) \supseteq N(x')$. Поскольку $f_k(x, W_k) \geqslant f_k(x', W_k)$ для любого вектора $W_k \in \mathbb{R}^m_+$, имеем $\delta_k^{\geqslant}(x, x', W_k) = +\infty$. Кроме того, если $f_k(x, W_k) = f_k(x', W_k)$, то равенство $\delta_k^{>}(x, x', W_k) = 0$ очевидно. Тем самым остаётся доказать, что $\delta_k^{>}(x, x', W_k) = \varphi$ при $f_k(x, W_k) > f_k(x', W_k)$. Заметим, что в этой ситуации φ есть норма $\|\cdot\|_r$ вектора, составленного из элементов w_{lk}, $l \in N(x) \setminus N(x')$. С другой стороны, вектор $u^* \in \mathbb{R}^m$ с компонентами

$$u_l^* = \begin{cases} -w_{lk}, & \text{если } l \in N(x) \setminus N(x'), \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

имеет наименьшую норму среди всех векторов u, порождающих равенство $f_k(x, W_k + u) = f_k(x', W_k + u)$, причём эта норма как раз равна φ. Следовательно, $\delta_k^{>}(x, x', W_k) = \varphi$ при $f_k(x, W_k) > f_k(x', W_k)$.

Случай 2: $N(x) \not\supseteq N(x')$ и $f_k(x, W_k) \leqslant f_k(x', W_k)$. Тогда очевидно, что $\delta_k^{>}(x, x', W_k) = 0$, а если $f_k(x, W_k) < f_k(x', W_k)$, то $\delta_k^{\geqslant}(x, x', W_k) = 0$. Итак, нужно показать, что $\delta_k^{\geqslant}(x, x', W_k) = 0$ при $f_k(x, W_k) = f_k(x', W_k)$.

Пусть $0 < \lambda < \varepsilon$ и $l_0 \in N(x') \setminus N(x)$. Компоненты u_l^*, $l \in N_m$, вектора u^* зададим по правилу

$$u_l^* = \begin{cases} \lambda, & \text{если } l = l_0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $\|u^*\|_r = \lambda$, $u^* \in \Omega_k(\varepsilon)$ и верны соотношения

$$f_k(x, W_k + u^*) = f_k(x, W_k) = f_k(x', W_k) < f_k(x', W_k) + \lambda = f_k(x', W_k + u^*).$$

Таким образом, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой возмущающий вектор $u^* \in \Omega_k(\varepsilon)$, что $f_k(x, W_k + u^*) < f_k(x', W_k + u^*)$, т. е. $\delta_k^{\geqslant}(x, x', W_k) = 0$.

Случай 3: $N(x) \not\supseteq N(x')$ и $f_k(x, W_k) > f_k(x', W_k)$. Заметив, что в этом случае множества $N(x) \setminus N(x')$ и $N(x') \setminus N(x)$ непусты, докажем справедливость соотношений $\delta_k^{>}(x, x', W_k) = \delta_k^{\geqslant}(x, x', W_k) = \varphi$.

Пусть $u^* = u^*(\lambda) \in \mathbb{R}^m$ — возмущающий вектор с компонентами $u^*_l(\lambda)$, $l \in N_m$, заданными по правилу

$$u^*_l(\lambda) = \begin{cases} -w_{kl}, & \text{если } l \in N(x) \setminus N(x') \text{ и } w_{kl} < g_k(x, x', 1), \\ -g_k(x, x', 1), & \text{если } l \in N(x) \setminus N(x') \text{ и } w_{kl} \geqslant g_k(x, x', 1), \\ g_k(x, x', 1) + \lambda, & \text{если } l \in N(x') \setminus N(x), \\ 0 & \text{в иных случаях.} \end{cases}$$

Тогда для любого $\lambda \geqslant 0$ верно включение

$$W_k + u^*(\lambda) \in \mathbb{R}^m_+ \tag{5}$$

и выполняются равенства

$$\begin{aligned} f_k(x, W_k + u^*) - f_k(x', W_k + u^*) &= f_k(x, W_k) - f_k(x', W_k) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{q-1} w_{kl_i} - g_k(x, x', 1)\|\mu(x, x', w_{kl_q})\|_1 - \lambda|N(x') \setminus N(x)| \\ &= W_k\mu(x, x', w_{kl_q}) - g_k(x, x', 1)\|\mu(x, x', w_{kl_q})\|_1 - \lambda|N(x') \setminus N(x)|. \end{aligned}$$

Поэтому при $\lambda = 0$ имеем $f_k(x, W_k + u^*) = f_k(x', W_k + u^*)$ и ввиду $N(x') \setminus N(x) \neq \varnothing$ при всяком $\lambda > 0$ получаем

$$f_k(x, W_k + u^*) < f_k(x', W_k + u^*). \tag{6}$$

С другой стороны, в силу $g_k(x, x', 1)\|\mu(x, x', w_{kl_q})\|_r = g_k(x, x', r')$ находим $\|u^*(0)\|_r = \|(g_k(x, x', 1)\|\mu(x, x', w_{kl_q})\|_r, \|\widetilde{W}_k\|_r)\|_r = \varphi$. Кроме того, ясно, что для любого $\varepsilon > \varphi$ найдётся $\lambda^* > 0$, при котором верно включение $u^*(\lambda^*) \in \Omega_k(\varepsilon)$. Отсюда, принимая во внимание (5) и (6), заключаем, что для любого $\varepsilon > \varphi$ существует вектор $u^* \in \Omega_k(\varepsilon)$, порождающий неравенство $f_k(x, W_k + u^*) < f_k(x', W_k + u^*)$. Следовательно, $\delta^{\geqslant}_k(x, x', W_k) \leqslant \varphi$, что в силу (4) даёт $\delta^{>}_k(x, x', W_k) \leqslant \delta^{\geqslant}_k(x, x', W_k) \leqslant \varphi$.

Остаётся показать, что $\delta^{\geqslant}_k(x, x', W_k) \geqslant \delta^{>}_k(x, x', W_k) \geqslant \varphi$. Для этого ввиду (4) достаточно доказать неравенство $\delta^{>}_k(x, x', W_k) \geqslant \varphi$. Поскольку при $r = 1$ (т. е. в случае метрики $\|\cdot\|_1$ в пространстве $\mathbb{R}^m$) верны равенства $\varphi = \|(W_k\mu(x, x', w_{kl_q}), \|\widetilde{W}_k\|_1)\|_1 = f_k(x, W_k) - f_k(x', W_k)$, для любого вектора $u \in \Omega_k(\varphi)$ находим

$$\begin{aligned} f_k(x, W_k + u) - f_k(x', W_k + u) &= f_k(x, W_k) - f_k(x', W_k) + f_k(x, u) - f_k(x', u) \\ &\geqslant f_k(x, W_k) - f_k(x', W_k) - \|u\|_1 > f_k(x, W_k) - f_k(x', W_k) - \varphi = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\delta_k^{>}(x, x', W_k) \geqslant \varphi$ при $r = 1$.

Теперь докажем неравенство $\delta_k^{>}(x, x', W_k) \geqslant \varphi$ для $r \in (1, \infty]$. Предположим, что оно неверно. Среди всех векторов $u' \in \Omega_k(\varphi)$, удовлетворяющих неравенству $f_k(x, W_k + u') \leqslant f_k(x', W_k + u')$, выберем вектор u^0, имеющий наименьшую норму. Кроме того, не ограничивая общности, будем полагать, что $u_l^0 \leqslant 0$, $l \in N(x) \setminus N(x')$, и $u_l^0 \geqslant 0$, $l \in N(x') \setminus N(x)$, поскольку в противном случае можно заменить знаки элементов противоположными, сохранив при этом как норму вектора, так и неравенство $f_k(x, W_k + u^0) \leqslant f_k(x', W_k + u^0)$.

Пусть $\widetilde{u}^0$ — вектор, составленный из элементов $u_{l_i}^0$, $i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, где $u_{l_0}^0$ полагаем равным нулю. Пусть $\widehat{u}^0$ — вектор u^0, у которого все элементы $u_{l_i}^0$, $i \in N_{q-1}$, заменены нулями. Тогда $\|u^0\|_r = \|(\|\widehat{u}^0\|_r, \|\widetilde{u}^0\|_r)\|_r$, и потому ввиду $\|u^0\|_r < \varphi$ должно выполняться хотя бы одно из неравенств $\|\widehat{u}^0\|_r < g_k(x, x', r')$ или $\|\widetilde{u}^0\|_r < \|\widetilde{W}_k\|_r$. Однако первое из них выполняться не может. Более того, имеем

$$\|\widehat{u}^0\|_r > g_k(x, x', r'), \tag{7}$$

поскольку в противном случае благодаря неравенству Гёльдера выводим

$$f_k(x, W_k + u^0) - f_k(x', W_k + u^0) = \sum_{i=0}^{q-1} \left(w_{kl_i} + u_{l_i}^0\right) + (W_k + \widehat{u}^0)\mu(x, x', w_{kl_q})$$
$$\geqslant \sum_{i=0}^{q-1} \left(w_{kl_i} + u_{l_i}^0\right) + W_k\mu(x, x', w_{kl_q}) - \|\widehat{u}^0\|_r \|\mu(x, x', w_{kl_q})\|_{r'} > 0.$$

Неравенство (7) свидетельствует о том, что существует индекс $h \in N_{q-1} \neq \varnothing$ с условием $u_{l_h}^0 > -w_{kl_h}$ и среди элементов вектора $\widehat{u}^0$ найдётся хотя бы один элемент, абсолютное значение которого больше $g_k(x, x', 1)$.

Пусть M — множество максимальных по абсолютному значению элементов вектора $\widehat{u}^0$. К каждому такому элементу прибавим или вычтем некоторое число $\alpha > 0$ так, чтобы их абсолютные значения уменьшились, однако они все ещё принадлежали множеству M. Элемент $u_{l_h}^0$ уменьшим на величину β, где $0 < \beta \leqslant w_{kl_h} + u_{l_h}^0$. Тем самым построим вектор $u^* = u^*(\alpha, \beta)$.

Поскольку $w_{kl_h} < g_k(x, x', 1)$, можно выбрать такие числа α и β, что $\|u^0\|_r > \|u^*\|_r$ и $f_k(x, u^0) - f_k(x', u^0) \geqslant f_k(x, u^*) - f_k(x', u^*)$. Это означает, что вектор u^* удовлетворяет условию $f_k(x, W_k + u^*) \leqslant f_k(x', W_k + u^*)$ и имеет меньшую норму, чем вектор u^0. Полученное противоречие убеждает нас в справедливости неравенства $\delta_k^{>}(x, x', W_k) \geqslant \varphi$ при $r \in (1, \infty]$. Теорема 1 доказана.

Отметим, что в ряде случаев формула для $\delta_k^{>}(x, x', W_k)$ существенно упрощается. В частности, справедливы следующие два следствия.

Для действительного числа $y \in \mathbb{R}$ положим $[y]^+ = \max\{0, y\}$.

Следствие 1. *Если каждая строка W_k, $k \in N_s$, матрицы W состоит из равных между собой чисел, то*

$$\delta_k^{>}(x, x', W_k) = \frac{[W_k \sigma(x, x')]^+}{\|\sigma(x, x')\|_{r'}}.$$

Следствие 2. *Если в пространстве $\mathbb{R}^m$ задана норма $\|\cdot\|_1$, то при любом $k \in N_s$ верно равенство*

$$\delta_k^{>}(x, x', W_k) = [W_k \sigma(x, x')]^+.$$

Связь между величинами $\delta_k^{\star}(x, x^0, W_k)$, $k \in N_s$, и радиусами устойчивости решений задачи $Z^s(W)$ описывается следующими несложно проверяемыми утверждениями.

Утверждение 2. *Пусть $x^0 \in P^s(W)$. Тогда справедливо равенство*

$$\rho(x^0, W) = \min_{x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}} \|\delta^{\geqslant}(x^0, x, W)\|_p.$$

Утверждение 3. *Пусть $x^0 \in \overline{P}^s(W)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\rho(x^0, W) \geqslant \max_{x \in \mathrm{Dom}(x^0, W)} \min\big\{ \min_{k \in N_s} \delta_k^{\geqslant}(x, x^0, W_k), \|\delta^{>}(x, x^0, W)\|_p \big\}.$$

Здесь следует заметить, что с теоретической точки зрения отыскание радиуса устойчивости для эффективного решения более простая задача, чем для неэффективного. Это связано с тем, что для потери оптимальности эффективного решения исходной задачи $Z^s(W)$ в возмущённой задаче $Z^s(W+U)$ достаточно наличия одного доминирующего решения. Для того чтобы неэффективное решение задачи $Z^s(W)$ стало эффективным, необходимо, чтобы все доминирующие его решения перестали быть таковыми в возмущённой задаче $Z^s(W+U)$. Конечно, это замечание касается не только рассматриваемой нами задачи, но и вообще любой задачи многокритериальной оптимизации с паретовским принципом оптимальности. Именно поэтому большинство результатов, относящихся к нахождению радиусов устойчивости эффективных решений (а также T_2- и T_4-устойчивости задачи), представляют собой точные формулы (см., например, [2, 9]), а результаты по T_3-устойчивости задачи — лишь достижимые оценки (см., например, [3, 4]).

Очевидно, что эффективное решение x^0 имеет бесконечный радиус устойчивости в том и только том случае, когда $N(x^0) \supseteq N(x)$ для всякого $x \in X$, т. е. разрез x^0 содержит все рёбра графа. Это означает, что бесконечный радиус устойчивости может быть лишь у одной пары эффективных решений: x^0 и $\overline{x^0}$, причём это возможно лишь в двудольных графах. Неэффективные решения всегда имеют конечный радиус устойчивости. Более того, справедлива

Теорема 2. *Пусть $x^0 \in P^s(W)$ и существует хотя бы одно решение $x^* \in X$ такое, что $N(x^0) \not\supseteq N(x^*)$. Тогда $\rho(x^0, W) \leqslant \|W\|$.*

Пусть $x^0 \in \overline{P}^s(W)$. Тогда $\rho(x^0, W) \leqslant \|W\|$. При этом если для любого решения $x \in \mathrm{Dom}(x^0, W)$ верно соотношение $N(x^0) \not\supseteq N(x)$, то

$$\rho(x^0, W) \leqslant \min_{k \in N_s} \|W_k\|_r.$$

Доказательство. Пусть $x^0 \in P^s(W)$. Поскольку $N(x^0) \not\supseteq N(x^*)$, существует индекс $l^* \in N(x^*) \setminus N(x^0)$. Поэтому возможно построить возмущающую матрицу $U^0 = U^0(\lambda)$ с элементами

$$u^0_{kl} = \begin{cases} \lambda - w_{kl}, & \text{если } l = l^*,\ k \in N_s, \\ -w_{kl}, & \text{если } l \in N_m \setminus \{l^*\},\ k \in N_s. \end{cases}$$

Тогда при любом $\lambda > 0$ для всякого индекса $k \in N_s$ верны соотношения

$$f_k\big(x^0, W_k + U^0_k\big) = 0 < \lambda = f_k\big(x^*, W_k + U^0_k\big),$$

свидетельствующие о том, что $x^0 \notin P^s(W + U^0)$. Также легко видеть, что для каждого $\varepsilon > \|W\|$ найдётся такое положительное число λ^*, что $U^*(\lambda^*) \in \Omega(\varepsilon)$. Таким образом, неравенство $\rho(x^0, W) \leqslant \|W\|$ доказано.

Пусть теперь $x^0 \in \overline{P}^s(W)$. Справедливость неравенства $\rho(x^0, W) \leqslant \|W\|$ легко проверяется, если в качестве возмущающей матрицы U взять матрицу $-W$. Остаётся рассмотреть случай, когда для каждого решения $x \in \mathrm{Dom}(x^0, W)$ верно соотношение $N(x^0) \not\supseteq N(x)$. Пусть $k^* \in N_s$ — индекс, при котором достигается минимум величины $\|W_k\|_r$. Построим возмущающую матрицу $U^* = U^*(\lambda)$ с элементами

$$u^*_{kl} = \begin{cases} -w_{kl} + \lambda, & \text{если } l \in N(x^0),\ k = k^*, \\ -w_{kl}, & \text{если } l \in N_m \setminus N(x^0),\ k = k^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $x^0 \in P^s(W + U^*(\lambda))$ при любом $\lambda > 0$. Кроме того, очевидно, что для всякого $\varepsilon > \min\limits_{k \in N_s} \|W_k\|_r$ найдётся такое положительное число λ^*, при котором верно включение $U^*(\lambda^*) \in \Omega(\varepsilon)$. Следовательно, $\rho(x^0, W) \leqslant \min\limits_{k \in N_s} \|W_k\|_r$. Теорема 2 доказана.

4. Радиусы устойчивости задачи

Пользуясь теоремами 1 и 2 с учётом утверждений 2, 3 и соотношений (1), (2), легко получить следующие формулы и оценки для радиусов T_1–T_5-устойчивости задачи $Z^s(W)$.

Теорема 3. *Пусть* $P^s(W) \neq X$. *Тогда*

$$\rho_1(W) \geqslant \max_{x \in P^s(W)} \min_{x' \in \overline{P}^s(W)} \|\delta^{\geqslant}(x, x', W)\|_p,$$

$$\rho_1(W) \geqslant \min_{x \in \overline{P}^s(W)} \max_{x' \in \mathrm{Dom}(x,W)} \min_{k \in N_s} \delta_k^{\geqslant}(x', x, W_k).$$

При этом $\rho_1(W) = +\infty$ *тогда и только тогда, когда для каждого* $x \in \overline{P}^s(W)$ *найдётся* $x^* \in P^s(W)$ *такой, что* $N(x^*) \supset N(x)$. *В противном случае* $\rho_1(W) \leqslant \|W\|$.

Теорема 4. *Имеет место равенство*

$$\rho_2(W) = \max_{x \in P^s(W)} \min_{x' \in X \setminus \{x, \overline{x}\}} \|\delta^{\geqslant}(x, x', W)\|_p.$$

При этом $\rho_2(W) = +\infty$ *тогда и только тогда, когда существует такое решение* $x^0 \in P^s(W)$, *что* $N(x^0) \supseteq N(x)$ *для каждого* $x \in X$. *В противном случае* $\rho_2(W) \leqslant \|W\|$.

Теорема 5. *Пусть* $P^s(W) \neq X$. *Тогда* $\rho_3(W) \leqslant \|W\|$ *и*

$$\rho_3(W) \geqslant \min_{x \in \overline{P}^s(W)} \max_{x' \in \mathrm{Dom}(x,W)} \min\big\{ \min_{k \in N_s} \delta_k^{\geqslant}(x', x, W_k), \|\delta^{>}(x', x, W)\|_p \big\}.$$

При этом $\rho_3(W) \leqslant \min\limits_{k \in N_s} \|W_k\|_r$ *тогда и только тогда, когда существует такое решение* $x^* \in \overline{P}^s(W)$, *что* $N(x) \not\supseteq N(x^*)$ *для любого* $x \in \mathrm{Dom}(x^*, W)$.

Теорема 6. *Имеет место равенство*

$$\rho_4(W) = \min_{x \in P^s(W)} \min_{x' \in X \setminus \{x, \overline{x}\}} \|\delta^{\geqslant}(x, x', W)\|_p.$$

При этом $\rho_4(W) = +\infty$ *тогда и только тогда, когда* $P^s(W) = \{x^0, \overline{x^0}\}$ *и для каждого* $x \in X$ *верно включение* $N(x^0) \supseteq N(x)$. *В противном случае* $\rho_4(W) \leqslant \|W\|$.

Заметим, что благодаря равенству (3) на основании теорем 5 и 6 также легко получить оценки и для радиуса T_5-устойчивости задачи $Z^s(W)$.

Отметим также, что в теоремах 3 и 5 вместо множества $\mathrm{Dom}(x, W)$ можно использовать множество $\mathrm{Dom}(x, W) \cap P^s(W)$, при этом не изменяется значение нижних оценок соответствующих радиусов устойчивости, но может сократиться комбинаторный перебор при их вычислении.

При $P^s(W) = \{x^0, \overline{x^0}\}$ можно указать точные формулы для всех рассматриваемых типов устойчивости задачи $Z^s(W)$. Поскольку в этом случае радиусы T_1-, T_2- и T_4-устойчивости совпадают, в силу теоремы 6 справедливо

Следствие 3. *Если* $P^s(W) = \{x^0, \overline{x^0}\}$, *то*

$$\rho_1(W) = \rho_2(W) = \rho_4(W) = \rho(x^0, W) = \min_{x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}} \|\delta^{\geqslant}(x^0, x, W)\|_p.$$

Следствие 4. *Если* $P^s(W) = \{x^0, \overline{x^0}\}$, *то*

$$\rho_3(W) = \rho_5(W) = \min_{x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}} \min\big\{ \min_{k \in N_s} \delta_k^{\geqslant}(x^0, x, W_k), \|\delta^{>}(x^0, x, W)\|_p \big\}.$$

Доказательство. Для краткости выражение в правой части формулы следствия 4 обозначим через ψ. Исходя из определения величин $\delta^{>}(x^0, x, W)$ и $\delta_k^{\geqslant}(x^0, x, W_k)$ для всякого решения $x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}$ при любой возмущающей матрице $U \in \Omega(\psi)$ верно соотношение $f(x, W + U) \neq f(x^0, W + U)$ и ни для какого из индексов $k \in N_s$ не выполняется неравенство $f_k(x, W_k + U_k) > f_k(x^0, W_k + U_k)$. Поэтому $\rho_3(W) \leqslant \psi$, что в силу теоремы 5 даёт равенство $\rho_3(W) = \psi$.

С другой стороны, принимая во внимание следствие 3, легко видеть, что $\rho_4(W) \geqslant \psi$. Тем самым на основании равенства (3) заключаем, что $\rho_3(W) = \rho_5(W)$. Следствие 4 доказано.

В однокритериальном случае теоремы 4–6 превращаются в следующие утверждения.

Следствие 5. *Пусть* $s = 1$. *Если существует такое решение* $x^0 \in P^1(W)$, *что для всякого* $x \in P^1(W)$ *выполняется включение* $N(x^0) \supseteq N(x)$, *то*

$$0 < \rho_2(W) = \rho(x^0, W) = \min_{x \in \overline{P^1}(W)} \delta_1^{\geqslant}(x^0, x, W_1).$$

В противном случае $\rho_2(W) = 0$.

Следствие 6. *Пусть* $s = 1$ *и* $P^1(W) \neq X$. *Тогда*

$$0 < \min_{x \in \overline{P^1}(W)} \max_{x' \in P^1(W)} \delta_1^{>}(x', x, W_1) \leqslant \rho_3(W) \leqslant \|W_1\|_r.$$

Следствие 7. *Пусть* $s = 1$. *Если* $P^1(W) = \{x^0, \overline{x^0}\}$, *то*

$$0 < \rho_4(W) = \rho(x^0, W) = \min_{x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}} \delta_1^{\geqslant}(x^0, x, W_1).$$

В противном случае $\rho_4(W) = 0$.

На основании следствий 6 и 7 приходим к выводу, что $\rho_3(W) \leqslant \rho_4(W)$ при $P^1(W) = \{x^0, \overline{x^0}\}$. Поэтому справедливо

Следствие 8. *Пусть* $s = 1$. *Если* $P^1(W) = \{x^0, \overline{x^0}\}$, *то*

$$0 < \rho_5(W) = \min_{x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}} \delta_1^{>}(x^0, x, W_1) \leqslant \|W_1\|_r.$$

В противном случае $\rho_5(W) = 0$.

В заключение отметим, что все результаты разд. 3 и 4 справедливы также и для задачи $Z^s_{\mathrm{mod}}(W)$, где $W \in \mathbb{R}^{s \times m}$, с множеством возмущающих матриц $\Omega(\varepsilon) = \{U \in \mathbb{R}^{s \times m} \mid \|U\| < \varepsilon\}$ и частными критериями вида MAXSUM MODUL:

$$f_k(x, W_k) = \sum_{l \in N_m} |w_{kl}| x_l \to \max_{x \in X}, \qquad k \in N_s.$$

5. Сложность вычисления радиусов устойчивости

Следуя [1], задачу назовём *труднорешаемой*, если не существует полиномиального алгоритма её решения. В [13] рассмотрена однокритериальная задача нахождения допустимых изменений весов рёбер, при которых выбранное наперёд оптимальное решение сохраняет свою оптимальность. Там доказано, что для широкого класса комбинаторных задач в предположении P≠NP невозможно построить полиномиальный алгоритм для отыскания этих допустимых изменений. Покажем, что несмотря на то, что радиусы устойчивости дают меньше информации о допусках рёбер, задача их отыскания также труднорешаема при P≠NP.

Пусть $Z^1(\mathbf{1})$ — однокритериальная задача поиска максимального разреза в графе G, все рёбра которого имеют единичный вес. Широко известно, что задача $Z^1(\mathbf{1})$ является NP-трудной. Кроме того, в [11] установлено, что инверсная к $Z^1(\mathbf{1})$ задача $Z^1_{\mathrm{in}}(x, \mathbf{1})$, заключающаяся в проверке факта, будет ли данный разрез x максимальным, NP-полна.

Следующий алгоритм показывает, как найти решение задачи $Z^1(\mathbf{1})$, вычисляя радиусы устойчивости оптимальных решений для последовательности, состоящей не более чем из m^2 задач $Z^1(W)$. На протяжении работы алгоритма веса рёбер будут модифицироваться, пока все не станут равными 1. Этот изменяющийся вектор весов обозначим через w.

Алгоритм 1. Свед́ение задачи $Z^1(\mathbf{1})$ к задаче поиска радиуса устойчивости оптимального решения.

Шаг 0. Выберем разрез x^0, удовлетворяющий условию

$$\forall x \in X \ (N(x) \not\supset N(x^0)). \tag{8}$$

Если при этом $N(x^0) = N_m$, то задача $Z^1(\mathbf{1})$ решена и x^0 — её максимальный разрез.

Шаг 1. Веса рёбер разреза x^0 положим равными 1, а веса всех остальных рёбер — нулю (при этом величина $\rho(x^0, w)$ станет положительной).

Шаг 2. Если $\rho(x^0, w) > 0$, в задаче $Z^1(w)$ есть хотя бы одно ребро с нулевым весом, то перейдём к шагу 3, иначе — к шагу 4.

Шаг 3. Произвольным образом выберем ребро с нулевым весом и придадим ему вес, равный 1. Перейдём к шагу 2.

Шаг 4. Если в задаче $Z^1(w)$ больше нет рёбер с нулевым весом, то задача $Z^1(\mathbf{1})$ решена и x^0 — её максимальный разрез.

Шаг 5. Произвольным образом выберем ребро e с нулевым весом. Проверим, повлечёт ли увеличение веса ребра e до 1 потерю оптимальности разреза x^0. Если да, то перейдём к шагу 6. Если нет, то положим вес ребра e равным 1 и перейдём к шагу 4.

Шаг 6. В предположении, что ребро e имеет вес 1, найдём новый максимальный разрез x^*. После чего веса всех рёбер этого разреза (включая ребро e) положим равными 1. Переобозначив x^* через x^0, перейдём к шагу 2.

Оценки для радиусов устойчивости, указанные в утверждениях 2 и 3, позволяют заключить, что в случае, когда рёбра графа имеют веса 0 или 1, любой положительный радиус устойчивости не меньше, чем $1/m$ при любой норме $\|\cdot\|_r$, $r \in [1, \infty]$. Этот факт будет использоваться при доказательстве теорем 7 и 8 без дополнительных упоминаний.

Теорема 7. *При любой норме $\|\cdot\|_r$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ алгоритм 1 решает задачу $Z^1(\mathbf{1})$ за $O(m^2\zeta)$ операций, где $O(\zeta)$ — сложность нахождения радиуса устойчивости оптимального решения.*

Доказательство. Прежде всего убедимся, что шаг 0 можно осуществить в любой задаче $Z^1(\mathbf{1})$, иными словами, всегда возможно выбрать разрез x^0, удовлетворяющий условию (8). Для этого в графе G выделим некоторое остовное дерево T и окрасим все его вершины в белый и чёрный цвета. Пусть каждая вершина, получающая при поиске в ширину нечётную метку, окрашивается в белый цвет, а всякая вершина с чётной меткой — в чёрный цвет. Такое разбиение вершин графа задаёт разрез x^0, содержащий (в том числе) все рёбра дерева T. При этом всякий разрез $x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}$ определяет перекраску вершин такую, что хотя бы одно ребро e дерева T инцидентно двум вершинам одного цвета. Это означает, что ребро e не входит в разрез x. Итак, разрез x^0 не содержится как собственный ни в каком другом разрезе, т. е. удовлетворяет условию (8). При этом шаг 0 может быть завершён за $O(m)$ операций.

Реализация шагов 1–4 не вызывают затруднений. Покажем, как можно сделать шаг 5. Обозначим через w^0 вектор весов рёбер, образовавшийся к моменту выполнения шага 5, а через w^1 — вектор w^0, в котором вес ребра e полагаем равным 1. При этом $\rho(x^0, w^0) = 0$. Нужно проверить, будет ли разрез $x^0 \in P^1(w^0)$ максимальным в задаче $Z^1(w^1)$. Поскольку к этому моменту шаг 3 был выполнен хотя бы однажды, существует $m' \geqslant 1$ рёбер, имеющих вес 1 и не принадлежащих x^0. Веса всех таких рёбер уменьшим на $1/2m$. Тогда поскольку разрез x^0 удовлетворяет условию (8), согласно утверждению 2 радиус устойчивости $\rho(x^0, w)$ станет положительным. Вычислим его. Затем будем увеличивать вес ребра e на $1/2m$ до тех пор, пока радиус устойчивости не уменьшится или вес ребра e не станет больше $m'/2m$. Рассмотрим эти два возможных случая, заметив, что в силу $\rho(x^0, w^0) = 0$ на основании утверждения 2 множество эквивалентных решений $Q(x^0, w^0) = \{x \in X \mid f(x^0, w^0) = f(x, w^0)\}$ содержит разрез, отличный от x^0 или $\overline{x^0}$.

Случай 1: вес ребра e стал равен $m'/2m$, а радиус устойчивости не изменился. Тогда ребро e не содержится ни в одном из разрезов, входящих в множество $Q(x^0, w^0)$. Стало быть, увеличение веса ребра e до 1 не повлечёт нарушения неравенства $f(x^0, w) \geqslant f(x, w)$ для любого $x \in X$. Итак, разрез x^0 останется максимальным в задаче $Z^1(w^1)$. Вектор w положим равным w^1 и перейдём к шагу 4.

Случай 2: когда ребро e стало весить $m^*/2m \leqslant m'/2m$, радиус устойчивости уменьшился. Тогда ребро e содержится хотя бы в одном из разрезов, принадлежащих множеству $Q(x^0, w^0) \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}$. Следовательно, всякое увеличение веса ребра e в задаче $Z^1(w^0)$ влечёт потерю оптимальности разреза x^0. Не изменяя вектора w, перейдём к шагу 6.

Ясно, что шаг 5 может быть осуществлен за $O(m\zeta)$ операций.

Наконец, обсудим выполнение шага 6. Если мы перешли к этому шагу, то разрез x^0 перестаёт быть максимальным в задаче $Z^1(w^1)$. Покажем, как в этой ситуации найти новый максимальный разрез x^*. При этом в процессе поиска будем сохранять оптимальность разреза x^0.

Придадим ребру e вес $(m^* - 1)/2m$, а веса всех остальных рёбер оставим такими же, какими они стали после выполнения шага 5. Поскольку ребро e входит во всякий максимальный разрез в задаче $Z^1(w^1)$, включим его в разрез x^*. После чего будем экзаменовать каждое из рёбер $e' \in E \setminus \{e\}$ на принадлежность разрезу x^*. При этом будем использовать следующее свойство задачи $Z^1(w)$. Пусть ребро e' содержится в максимальном разрезе в задачи $Z^1(w^1)$. Тогда всякое достаточно малое увеличение его веса, повлечёт уменьшение радиуса устойчивости $\rho(x^0, w)$, если e' не содержалось в разрезе x^0. В противном случае радиус устойчивости $\rho(x^0, w)$ останется неизменным.

Сначала проверим рёбра, не принадлежащие разрезу x^0. Если при увеличении веса ребра на $1/2m^2$ радиус устойчивости уменьшается, то это ребро включим в разрез x^*, оставив его вес увеличенным, а если радиус устойчивости не изменяется, то вернём ребру его начальный вес и не будем включать его в разрез x^*.

Затем проверим ребра, принадлежащие разрезу x^0. Если при увеличении веса ребра на $1/2m^2$ радиус устойчивости не изменяется, то это ребро включим в разрез x^*, оставив его вес увеличенным, а если радиус устойчивости увеличивается, то вернём ребру его начальный вес и не будем включать его в разрез x^*.

Нетрудно понять, что полученный после проверки всех рёбер из множества $E \setminus \{e\}$ разрез x^* будет максимальным в задаче $Z^1(w^1)$ и не будет содержаться как собственный ни в каком другом разрезе. Тем самым разрез x^* может быть использован в качестве разреза x^0 в ходе дальнейшего выполнения алгоритма 1. Понятно, что шаг 6 может быть проделан за $O(m\zeta)$ операций.

Когда все рёбра приобретут единичный вес, будет найден максимальный разрез в задаче $Z^1(\mathbf{1})$. Поскольку при переходе от шага с бо́льшим номером к шагу с меньшим номером хотя бы одно из рёбер получает единичный вес, в процессе выполнения алгоритма 1 таких переходов будет сделано не больше чем m. Легко видеть, что самыми трудоёмкими этапами алгоритма 1 являются шаги 5 и 6 со сложностью $O(m\zeta)$. Таким образом, алгоритм 1 имеет сложность $O(m^2\zeta)$. Теорема 7 доказана.

Следствие 9. *Если* P$\neq$NP, *то задачи поиска радиусов T_2-, T_4- и T_5-устойчивости однокритериальной задачи $Z^1(W)$ труднорешаемы.*

Действительно, ввиду теоремы 7 для доказательства следствия 9 нужно лишь убедиться, что в алгоритме 1 вместо $\rho(x^0, w)$ можно использовать величины $\rho_2(w)$, $\rho_4(w)$ и $\rho_5(w)$. Очевидно, что разрез x^0 удовлетворяет условию (8) и никакой другой максимальный разрез $x \in P^1(w) \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}$ не содержится в разрезе x^0. Поэтому, принимая во внимание следствия 5, 7 и 8, заключаем, что верны равенства $\rho(x^0, w) = \rho_2(w) = \rho_4(w) = \rho_5(w)$.

Следующий алгоритм показывает, как получить решение для задачи $Z^1_{\text{in}}(x, \mathbf{1})$, находя радиусы устойчивости неоптимальных решений для последовательности, состоящей не более чем из m задач $Z^1(W)$. На протяжении работы алгоритма веса рёбер будут модифицироваться, пока все не станут равными 1. Этот изменяющийся вектор весов, как и ранее, будем обозначать через w.

Алгоритм 2. Сведе́ние задачи $Z^1_{\text{in}}(x, \mathbf{1})$ к задаче поиска радиуса устойчивости неоптимального решения.

Шаг 0. Если разрез x^0 содержит все рёбра графа, то он максимальный. Стоп.

Шаг 1. Веса всех рёбер, не принадлежащих разрезу x^0, положим равными 1, а веса всех рёбер, принадлежащих разрезу x^0, — равными 0.

Шаг 2. Если в задаче $Z^1_{\text{in}}(x, w)$ существует хотя бы одно ребро с нулевым весом, то перейдём к шагу 3. В противном случае разрез x^0 не является максимальным.

Шаг 3. Произвольным образом выберем ребро e с нулевым весом и придадим ему вес $1 - 1/2m$. Если при этом $\rho(x^0, w) \leqslant 1/2m$, то x^0 — максимальный разрез. Если $\rho(x^0, w) > 1/2m$, то перейдём к шагу 4.

Шаг 4. Ребру e придадим единичный вес и перейдём к шагу 2.

Теорема 8. *При любой норме $\|\cdot\|_r$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ алгоритм 2 решает задачу $Z^1_{\text{in}}(x, \mathbf{1})$ за $O(m\eta)$ действий, где $O(\eta)$ — сложность нахождения радиуса устойчивости неоптимального решения.*

Доказательство. Исключая из рассмотрения тривиальный случай, когда x^0 содержит все рёбра графа, будем полагать, что в ходе работы алгоритма 2 мы перешли к шагу 3. Обозначим через w^* вектор весов рёбер, образовавшийся при задании ребру e веса $1 - 1/2m$, а через w^1 — вектор w^*, в котором вес ребра e полагаем равным 1.

Легко видеть, что разрез x^0 не может быть максимальным в задаче $Z^1_{\text{in}}(x, w^*)$. Однако, если в задаче $Z^1_{\text{in}}(x, w^1)$ разрез x^0 становится максимальным, то его радиус устойчивости не может превышать $1/2m$, поскольку в противном случае увеличение веса e до 1 оставляло бы разрез x^0 неоптимальным. Таким образом, $x^0 \in P^1(w^1)$, если и только если на шаге 3 верно неравенство $\rho(x^0, w^*) \leqslant 1/2m$. Кроме того, очевидно, что дальнейшее изменение нулевых весов единичными не приведёт к потере оптимальности разреза x^0. Следовательно, если $\rho(x^0, w^*) \leqslant 1/2m$, то x^0 — максимальный разрез в задаче $Z^1_{\text{in}}(x, \mathbf{1})$.

Ясно, что шаг 3 может быть проделан за $O(\eta)$ операций, а сам алгоритм 2 — за $O(m\eta)$ операций. Теорема 8 доказана.

Отметим, что по аналогии с алгоритмом 2 несложно построить алгоритмы сведе́ния задачи $Z^1_{\text{in}}(x, \mathbf{1})$ к задаче поиска радиуса T_1- или T_3-устойчивости.

Резюмируя доказанное, заключаем, что в предположении P≠NP нахождение любого из радиусов устойчивости задачи $Z^1(W)$ о максимальном разрезе графа является труднорешаемой задачей. Такое же утверждение можно сделать и относительно s-критериальной ($s \geqslant 2$) задачи $Z^s(W)$, поскольку отыскание радиусов устойчивости в $Z^s(W)$ не проще, чем в однокритериальной задаче $Z^1(W)$. В частности, для любого из радиусов устойчивости легко предложить такое биективное соответствие однокритериальной и многокритериальной задач, что знание радиуса устойчивости многокритериальной задачи гарантирует его знание и для однокритериальной задачи. Так, например, если к однокритериальной задаче добавить произвольное число критериев, в которых все рёбра имеют нулевые веса, то множества оптимальных решений и радиусы $\rho_1(W)$, $\rho_2(W)$, $\rho_4(W)$, а также радиус устойчивости $\rho(x^0, W)$ оптимального решения x^0 для однокритериальной и многокритериальной задач будут совпадать.

Итак, для однокритериальной и многокритериальной задач о максимальном разрезе графа крайне маловероятно наличие полиномиального алгоритма вычисления любого из радиусов устойчивости. В этой связи перспективными направлениями при построении эффективных алгоритмов для вычисления радиусов устойчивости задачи $Z^s(W)$, $s \geqslant 1$, могут быть приближённые вероятностные и генетические алгоритмы. Определённый прогресс также возможен при ослаблении понятия радиуса устойчивости наподобие того, как это сделано в [5, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
2. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Оценки радиуса устойчивости векторной задачи о максимальном разрезе графа // Дискрет. математика. 2013. Т. 25, вып. 2. С. 5–12.

3. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Анализ устойчивости эффективного решения векторной задачи о максимальном разрезе графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 4. С. 27–35.
4. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8, № 1. С. 47–69.
5. **Козлов И. В.** Устойчивость в задаче поиска минимального разреза в графе // Моделирование и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 54–63.
6. **Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И.** Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Кибернетика и систем. анализ. 2008. № 3. С. 142–148.
7. **Bilu Y., Daniely A., Linial N., Saks M.** On the practically interesting instances of MAXCUT // Proc. 30th Int. Symp. Theoret. Aspects Computer Sci. (Kiel, Germany, Feb. 27 – Mar. 2, 2013). Dagstuhl: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, 2013. P. 526–537.
8. **Chakravarti N., Wagelmans A. P. M.** Calculation of stability radii for combinatorial optimization problem // Oper. Res. Lett. 1998. Vol. 23, No. 1–2. P. 1–7.
9. **Emelichev V. A., Podkopaev D. P.** Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming // Discrete Optim. 2010. Vol. 7, No. 1–2. P. 48–63.
10. **Greenberg H. J.** An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer programming and combinatorial optimization // Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming and Heuristic Search. Norwell: Kluwer Acad. Publ., 1998. P. 97–147.
11. **Hohmann Chr., Kern W.** Optimization and optimality test for the Max-Cut problem // Z. Oper. Res. 1990. Vol. 34, No. 3. P. 195–206.
12. **Roland J., De Smet Y., Figueira J. R.** On the calculation of stability radius for multi-objective combinatorial optimization problems by inverse optimization // 4OR. 2012. Vol. 10, No. 4. P. 379–389.
13. **Van Hoesel S., Wagelmans A.** On the complexity of postoptimality analysis of 0/1 programs // Discrete Appl. Math. 1999. Vol. 91, No. 1–3. P. 251–263.

Кузьмин Кирилл Геннадьевич

Статья поступила
16 февраля 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
September–October 2015. Volume 22, No. 5. P. 30–51

UDC 519.8 DOI: 10.17377/daio.2015.22.477

A UNITED APPROACH TO FINDING THE STABILITY RADII IN A MULTICRITERIA PROBLEM OF A MAXIMUM CUT

K. G. Kuzmin[1]
[1]Belarusian State University,
4 Nezavisimosti' Ave., 220030 Minsk, Belarus
e-mail: kuzminkg@mail.ru

Abstract. A multicriteria variant of the maximum cut problem is considered. The lower and upper achievable bounds on the radii of various types of stability are obtained assuming that the Hölder metrics are set in the parameters space. It is shown that to calculate any of the stability radii is an intractable problem unless P=NP. Bibliogr. 13.

Keywords: multi-objectiveness, graph cut, Pareto set, stability radius, Hölder metric, intractability.

REFERENCES

1. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness,* Freeman, San Francisco, 1979. Translated under the title *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi,* Mir, Moscow, 1982.
2. **V. A. Emelichev** and **K. G. Kuzmin,** Estimating the stability radius of the vector MAX-CUT problem, *Diskretn. Mat.,* **25**, No. 2, 5–12, 2013. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **23**, No. 2, 145–152, 2013.
3. **V. A. Emelichev** and **K. G. Kuzmin,** Stability analysis of the efficient solution to a vector problem of a maximum cut, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **20**, No. 4, 27–35, 2013.
4. **V. A. Emelichev** and **D. P. Podkopaev,** Stability and regularization of vector integer linear programming problems, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **8**, No. 1, 47–69, 2001.
5. **I. V. Kozlov,** On stable instances of the MIN-CUT problem, *Model. Anal. Inf. Sist.,* **21**, No. 4, 54–63, 2014.
6. **T. T. Lebedeva** and **T. I. Sergienko,** Different types of stability of vector integer optimization problem: General approach, *Kibern. Sist. Anal.,* No. 3, 142–148, 2008. Translated in *Cybern. Syst. Anal.,* **44**, No. 3, 429–433, 2008.

7. Y. Bilu, A. Daniely, N. Linial, and **M. Saks,** On the practically interesting instances of MAXCUT, in N. Portier and Th. Wilke, eds., *Proc. 30th Int. Symp. Theor. Aspects Computer Sci., Kiel, Germany, Feb. 27 – Mar. 2, 2013*, pp. 526–537, Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Dagstuhl, Germany, 2013.

8. N. Chakravarti and **A. P. M. Wagelmans,** Calculation of stability radii for combinatorial optimization problem, *Oper. Res. Lett.,* **23**, No. 1–2, 1–7, 1998.

9. V. A. Emelichev and **D. P. Podkopaev,** Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming, *Discrete Optim.,* **7**, No. 1–2, 48–63, 2010.

10. H. J. Greenberg, An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer programming and combinatorial optimization, in D. L. Woodruff, ed., *Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming and Heuristic Search,* pp. 97–147, Kluwer Acad. Publ., Norwell, 1998.

11. Chr. Hohmann and **W. Kern,** Optimization and optimality test for the Max-Cut Problem, *Z. Oper. Res.,* **34**, No. 3, 195–206, 1990.

12. J. Roland, Y. De Smet, and **J. R. Figueira,** On the calculation of stability radius for multi-objective combinatorial optimization problems by inverse optimization, *4OR,* **10**, No. 4, 379–389, 2012.

13. S. van Hoesel and **A. Wagelmans,** On the complexity of postoptimality analysis of 0/1 programs, *Discrete Appl. Math.,* **91**, No. 1–3, 251–263, 1999.

Kirill G. Kuzmin

Received
16 February 2015