

МНОГОКРАТНЫЕ ПОКРЫТИЯ КРУГАМИ
РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА,
КВАДРАТА И КРУГА

Ш. И. Галиев¹, А. В. Хорьков¹

¹Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А. Н. Туполева,
ул. К. Маркса, 10, 420011 Казань, Россия
e-mail: sh.galiev@mail.ru, aLex22fcrk@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрены задачи k -кратного, $k \geq 1$, покрытия равно-
стороннего треугольника, квадрата и круга n равными кругами
наименьшего возможного радиуса $r_{n,k}^*$. Представлены математиче-
ские модели задач покрытия и алгоритмы их решения. Найдены оп-
тимальные покрытия при некоторых значениях n и k , $1 < k \leq n$.
Численными методами получены значения $r_{n,k}$ радиусов кругов, при
которых обеспечивается требуемое k -кратное покрытие указанных
фигур для $n \leq 15$ и $1 < k \leq n$. Ил. 4, табл. 3, библиогр. 39.

Ключевые слова: многократное покрытие равными кругами, оп-
тимизация покрытий, равносторонний треугольник, квадрат, круг,
задача о минимальном покрытии.

Введение

Пусть G — ограниченное замкнутое множество на плоскости P . Мно-
жество n замкнутых кругов K_j , $1 \leq j \leq n$, одинакового радиуса образует
 k -кратное, $1 \leq k \leq n$, покрытие G , если каждая точка s из G принадле-
жит как минимум k таким кругам.

Задача Z1. Требуется выбрать расположение n кругов K_j , $1 \leq j \leq n$,
одинакового радиуса, образующих k -кратное покрытие G , таким обра-
зом, чтобы их радиус достигал наименьшего возможного значения $r_{n,k}^*$.

Задачи покрытия части плоскости находят многочисленные приложе-
ния при исследовании расположения станций различного назначения (со-
товой связи, беспроводного Интернета, скорой помощи) [4, 7, 13, 14, 22].

Важны задачи покрытия при проектировании сенсорных систем различного назначения [1–3, 17, 23, 26, 35]. В сенсорных сетях для компенсации выбывания (отказов) некоторых сенсоров предусматривается k -кратное покрытие заданной области при $k \geq 2$ [17, 26, 35].

Однократные покрытия равными кругами равностороннего треугольника рассмотрены в [30, 33], квадрата — в [4, 22, 31, 32, 34, 36, 39], а круга — в [19, 28, 37, 38]. Многократные покрытия ограниченной области, в частности, квадрата, рассмотрены в [7–10].

В данной работе представлены математические модели задач покрытия и алгоритмы их решения. Рассмотрены k -кратные, $1 < k \leq n$, покрытия указанных фигур n равными кругами наименьшего возможного радиуса $r_{n,k}^*$. Для $n \leq 15$, $1 < k \leq n$ представлены значения $r_{n,k}^*$ или достигнутые (возможно улучшаемые) значения $r_{n,k}$ радиусов кругов, при которых обеспечивается требуемое k -кратное покрытие указанных фигур.

В ряде случаев оптимальное k -кратное, $k > 1$, покрытие заданной области может быть получено путём дублирования кругов, входящих в её оптимальное 1-кратное покрытие с числом кругов n/k , но в общем случае это не так (см., например, теоремы 2–5 и табл. 1–3).

1. Математические модели задач покрытия

Пусть $c_j(x_j, y_j)$ — центры кругов K_j , $1 \leq j \leq n$. Пусть $\xi = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ и $d(s, t)$ — евклидово расстояние между точками s и t на плоскости P . Задача Z1, как известно, сводится при $k = 1$ к следующей задаче:

$$\min_{\xi} \max_{s \in G} \min_{1 \leq j \leq n} d(s, c_j). \quad (1)$$

Для k -кратного покрытия, $k \geq 1$, имеем задачу

$$\min_{\xi} \max_{s \in G} \min_{j \in J_k} d(s, c_j). \quad (2)$$

В (2) $j \in J_k$ означает, что выбирается k -я точка c_j , ближайшая к s . Формулировка задачи вида (1) введена в [13] при исследовании спутниковых систем непрерывного обзора поверхности Земли, а модель типа (2) представлена в [6] для исследования спутниковых систем многократного непрерывного обзора поверхности Земли. Задачи (1) и (2) в данной работе будем решать, используя области Вороного и дискретные аналоги этих задач.

Введём дискретную задачу покрытия. На покрываемом множестве G построим прямоугольную сетку с шагом Δ по осям Ox и Oy . Пусть $\Omega =$

$\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ — множество узлов построенной сетки такое, что $t_i \in G$, $1 \leq i \leq m$. Сформулируем следующую задачу.

Задача Z2. Требуется k -кратно, $k \geq 1$, покрыть конечное множество $\Omega = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ минимальным числом кругов заданного радиуса r так, чтобы центры покрывающих кругов находились в некоторых точках из Ω . Полагаем, что $m \gg k$.

Задачу Z1 будем считать непрерывной, а Z2 — дискретной задачей покрытия. Найденное покрытие множества Ω кругами радиуса r , как правило, не образует требуемого k -кратного покрытия всего множества G . Поэтому полученные решения задачи Z2 (расположения центров кругов) в дальнейшем используются как начальные расположения для задачи покрытия всего множества G .

Положим

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } d(t_i, t_j) \leq r, \\ 0, & \text{если } d(t_i, t_j) > r, \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (3)$$

Пусть z_i — число центров кругов, совпадающих с точкой t_i , $1 \leq i \leq m$. Теперь задача Z2 сводится к следующей (см., например, [7]):

$$\sum_{i=1}^m z_i \rightarrow \min, \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} z_j \geq k, \quad z_j \in \{0, 1\}, \quad (4)$$

которая является задачей k -кратного покрытия множества Ω минимальным числом кругов радиуса r , центры которых находятся в некоторых точках множества Ω . Задача (4) является частным случаем известной задачи покрытия дискретного множества (set covering problem):

$$\min_{Az \geq b, z_i \in \{0, 1\}} ez \quad \text{или} \quad \min\{ez : Az \geq b, z_i \in \mathbb{Z}^+\}, \quad (5)$$

где ez — скалярное произведение векторов $e = (e_1, \dots, e_m)$ и $z = (z_1, \dots, z_m)^T$, A — $(l \times m)$ -матрица с элементами 0 и 1, $b = (b_1, \dots, b_l)^T$ — заданный l -мерный вектор, \mathbb{Z}^+ — множество целых неотрицательных чисел. При $b_1 = b_2 = \dots = b_l = 1$ эта задача считается дискретной задачей покрытия конечного множества [18, 21, 25], а при $b_1 = b_2 = \dots = b_l = k$, $k \geq 1$, — многократного покрытия (multiple set covering problem [25]). Известно, что в общем случае задача (5) NP-трудная [24]. Вопросы сложности подобных задач обсуждаются в [11, 12, 15, 27, 29]. В данной работе задача Z2 рассматривается при специальном способе построения матрицы ограничений A (см. соотношение (3)).

В общем случае задачу Z2 можно строить, выбирая множество Ω произвольным образом на G . В данной работе для задачи покрытия единичного квадрата Q строилась указанная выше прямоугольная сетка. При решении задачи покрытия равностороннего треугольника T горизонтальные линии, порождающие сетку, параллельны оси Ox , а другие линии образуют с Ox угол 60 градусов. При решении задачи покрытия круга узлы сетки располагались на одинаковом расстоянии Δ на окружностях радиуса r , а радиус r изменялся от 0 до 1 с шагом Δ .

Пусть есть некоторая задача целочисленного линейного программирования, в которой переменные z_i , $1 \leq i \leq m$, принимают только значения из множества $\{0, 1\}$. Под релаксацией этой задачи понимается та же задача, в которой указанные условия целочисленности заменены условиями $0 \leq z_i \leq 1$, $1 \leq i \leq m$. Хорошо известно, что решение релаксированной задачи линейного программирования менее затратно по времени, чем решение исходной целочисленной задачи.

Ядерная задача строится для релаксированной задачи линейного программирования следующим образом. Пусть решена релаксированная задача линейного программирования и среди её решений z_j^* , $1 \leq j \leq m$, имеются нецелочисленные значения. Из переменных z_j , $1 \leq j \leq m$, выбираем p переменных z_j по некоторому критерию, например, для которых z_j^* не меньше остальных z_i^* . Таким образом, ядерная задача имеет только p переменных, которые будем полагать в дальнейшем целочисленными. Ограничения ядерной задачи получаются из ограничений исходной задачи с учётом только выделенных переменных. Ядерная задача строится так, чтобы её размерность позволяла решить построенную (целочисленную) задачу точными методами без эвристик и случайных процедур за приемлемое время.

2. Алгоритмы решения задач покрытия

Пусть покрываемое множество G является ограниченной замкнутой многоугольной областью на плоскости P .

В дальнейшем нам понадобятся многократные области Вороного (Дирихле или Дирихле — Вороного), поэтому приведём их определение. Для совокупности n точек c_j , $1 \leq j \leq n$, и заданного множества G k -кратной, $1 \leq k \leq n$, областью Вороного V_j^k с центром c_j назовём

$$V_j^k = \{s \in G \mid d(s, c_j) \leq \min_{i \in J_k} d(s, c_i)\}, \quad V_j^k \subseteq G, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Области Вороного широко используются многими авторами для решения задач покрытия (см., например, [4, 22] и библиографию в них).

Имеются различные варианты использования областей Вороного. В [5] проведён сравнительный анализ нескольких возможных вариантов использования (многократных) областей Вороного. Приведём лучший (геометрический) алгоритм из [5] для решения задач k -кратного, $k \geq 1$, покрытия n кругами наименьшего возможного радиуса, который обозначим через алгоритм A1 и используем при решении задачи Z1.

АЛГОРИТМ A1

ШАГ 1. Выбираем начальное расположение n центров $c_j(x_j, y_j)$ кругов K_j , $1 \leq j \leq n$, на P . Точки c_j порождают вектор $\xi(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$.

ШАГ 2. Строим области Вороного $V_j^k \subseteq G$ множества точек $\{c_j, 1 \leq j \leq n\}$.

ШАГ 3. Для каждой области V_j^k сдвигаем точку c_j к точке c_j^* , являющейся центром минимального круга, покрывающего всю область V_j^k , $1 \leq j \leq n$. Точки c_j^* , $1 \leq j \leq n$, порождают вектор ξ^* .

ШАГ 4. Если евклидово расстояние между ξ и ξ^* меньше заданного, то остановка, иначе полагаем $c_j := c_j^*$, $1 \leq j \leq n$, и идём к шагу 2.

При реализации шага 3 алгоритма используется процедура, аналогичная процедуре из [16]. Отметим, что все итерационные алгоритмы с использованием только областей Вороного не гарантируют нахождения глобального экстремума радиусов покрывающих кругов. При применении алгоритма A1 в данной работе начальное расположение центров кругов выбиралось случайным образом в предположении, что дальнейшие алгоритмы позволят уточнить получающийся радиус покрывающих кругов.

Рассмотрим задачу (4). Если число переменных и ограничений в (4) небольшое, то решаем её любым известным методом решения задач целочисленного линейного программирования. Для решения задач такого вида больших размерностей существует много методов (см., например, [21, 25]). Мы использовали модификацию достаточно распространённого подхода, состоящего в решении релаксированной задачи, построении ядерной задачи и её решении для целочисленных переменных. Построим алгоритм для решения задачи (4).

АЛГОРИТМ A2

ШАГ 1. Если число переменных и ограничений в (4) небольшое (для выбранного компьютера), то решаем её любым известным методом решения задач целочисленного линейного программирования. В результате находим n — наименьшее число кругов и завершаем алгоритм, иначе идём к шагу 2.

ШАГ 2. Если число переменных и ограничений в (4) большое (для выбранного компьютера), то для (4) решаем её релаксированную задачу. Пусть z_j^* , $1 \leq j \leq m$, — решение релаксированной задачи.

ШАГ 3. Если все значения z_j^* , $1 \leq j \leq m$, целочисленные, то задача решена, иначе для построения ядерной задачи выбираем qm , $q \in [0.02, 0.1]$, переменных z_j , $1 \leq j \leq m$, для которых z_j^* не меньше остальных.

ШАГ 3. Точно решаем построенную ядерную задачу, и её решения считаем решением исходной задачи.

Выбор величин 0.02 и 0.1 определялся возможностями компьютера. Мы решали релаксированную задачу, имеющую до 5000 переменных, и ядерную задачу с числом переменных 100–500, что обеспечивается выбором указанной величины q .

Методика решения исходной (начальной) задачи Z1 состоит в согласованном решении задач (2) и (4). Общий алгоритм решения задачи Z1 k -кратного, $k \geq 1$, покрытия n кругами множества G выглядит следующим образом.

АЛГОРИТМ А3

ШАГ 1. Приближённо решаем непрерывную задачу k -кратного покрытия области G n кругами наименьшего возможного радиуса r , используя алгоритм А1.

ШАГ 2. Выбираем шаг построения сетки и для найденного выше значения радиуса r получаем дискретную задачу (4), которую решаем с помощью алгоритма А2.

ШАГ 3. Если полученное на шаге 2 значение числа кругов больше или меньше n , то соответственно увеличиваем или уменьшаем величину радиуса кругов. С заданной точностью по радиусу добиваемся, чтобы число кругов для дискретной задачи совпало с величиной n . При этом получим некоторое расположение центров этих n кругов.

ШАГ 4. Найденное на шаге 3 расположение центров кругов используем как начальное, и алгоритмом А1 решаем непрерывную задачу покрытия. Полученное решение и принимаем за решение задачи Z1.

В алгоритме А3 первый шаг можно не использовать, а задавать значение r исходя из опыта решения задачи k -кратного покрытия множества G n кругами наименьшего возможного радиуса. В этом случае алгоритм, который обозначим через А3*, содержит только шаги 2, 3 и 4 алгоритма А3.

Представленные алгоритмы A1–A3 и A3* являются модификациями алгоритмов из [7, 8]. Здесь удалось упростить алгоритмы указанных работ, удалив некоторые сложности, в частности, убрана процедура кластеризации с помощью нечёткого метода средних и сделаны некоторые другие упрощения. Полученные алгоритмы оказались проще в реализации, при этом обоснование их результативности обсудим далее.

С помощью предложенных алгоритмов получены минимальные значения $r_{n,k}$ — радиусов n кругов, при которых обеспечивается требуемое k -кратное покрытие единичного квадрата, равностороннего треугольника и круга для $n \leq 15$, $1 < k \leq n$. Эти величины получены в том числе и для тех значений n и k , при которых в теоремах 1–5 данной работы установлены минимально возможные значения $r_{n,k}^*$ для радиусов $r_{n,k}$. В проведённых расчётах полученные значения $r_{n,k}$ отличались от $r_{n,k}^*$ не более, чем на 0.00001. Эти результаты демонстрируют успешность работы алгоритмов для рассмотренных случаев.

Известно, что для задачи p -центров, в которой требуется найти наименьший радиус p равных кругов, образующих покрытие произвольно заданного конечного множества точек на плоскости, если $P \neq NP$, невозможно гарантированно получать решение даже с точностью 15% [29]. Важно, что это имеет место для произвольно расположенных точек на плоскости и при минимизации радиусов (равных) кругов. Для задачи Z2 точки из множества Ω расположены достаточно равномерно и радиус покрывающих кругов фиксирован. По мнению авторов именно эти два фактора позволяют получать хорошие результаты с помощью алгоритмов A1–A3 и A3*.

Отметим, что в [20] при решении задачи о p -медиане авторы считают главной идеей алгоритм, использующий сначала дискретный подход (с построением сетки), а затем непрерывный. В данной работе в алгоритме A3 используется сначала непрерывный геометрический подход (использование областей Вороного), далее дискретный подход (решение задачи целочисленного линейного программирования, возможно, с использованием релаксации) и затем вновь непрерывный геометрический подход (использование областей Вороного). Алгоритм A3* состоит в использовании дискретного, а затем непрерывного подходов. Таким образом, метод, основанный на использовании непрерывного и дискретного подходов, является достаточно универсальным, позволяющим решать как задачи покрытия, так и задачи о p -медиане.

3. Некоторые оценки радиусов кругов для многократного покрытия равностороннего треугольника

Рассмотрим k -кратное, $1 \leq k \leq n$, покрытие равностороннего треугольника T n равными кругами минимально возможного радиуса $r_{n,k}^*$. Пусть длины сторон треугольника T равны единице.

Теорема 1. Пусть n равных кругов образуют k -кратное покрытие равностороннего треугольника T . Тогда

$$r_{n,n}^* = \sqrt{3}/3. \quad (6)$$

Пусть $n = 3m + q$, $m \geq 1$, q равно 0, 1 или 2. Тогда

$$r_{n,m+1}^* = r_{n,m+2}^* = \dots = r_{n,m+m}^* = 1/2. \quad (7)$$

Для нечётных значений $k \geq 3$ при $n = k + (k + 1)/2$ имеем

$$r_{n,k}^* = 1/2. \quad (8)$$

Пусть $n = 3m + q^*$, $m \geq 1$, q^* равно 1, 2 или 3 и $k = n - 1, n - 2, \dots, n - m$. Тогда

$$r_{n,k}^* = \sqrt{3}/3. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (6) тривиально. Выбором возможных положений центров покрывающих кругов можно доказать (7) и (8).

Докажем (9). Если разместить все центры покрывающих кругов в центре описанной окружности треугольника T , то при радиусе $r = \sqrt{3}/3$ очевидно осуществляется требуемое покрытие T .

Допустим, что $r < \sqrt{3}/3$, а рассматриваемый треугольник T обозначим через ABC . Пусть вершину A треугольника T покрывают k кругов. Эти круги могут покрыть вершину B s -кратно, а C — l -кратно, $s + l \leq k$.

Если $k = 3m + q^* - m$ чётно, то наилучшее расположение покрывающих кругов будет, когда $(3m + q^* - m)/2$ кругов покрывают вершину B и столько же кругов покрывают вершину C . Тогда для k -кратного покрытия всех вершин требуется ещё $(3m + q^* - m)/2$ кругов. Следовательно, общее число покрывающих кругов должно быть не меньше чем $3m + q^* - m + (3m + q^* - m)/2 = 3m + q^* + q^*/2$. Общее число кругов равно $3m + q^*$. Стало быть, допущение $r < \sqrt{3}/3$ в рассматриваемом случае неверно.

Если $k = 3m + q^* - m$ нечётно, то наилучшее расположение покрывающих кругов будет, когда $(3m + q^* - m + 1)/2$ кругов покрывают,

положим, вершину B и $(3m + q^* - m - 1)/2$ кругов покрывают вершину C . Тогда для k -кратного покрытия всех вершин требуется ещё $3m + q^* - m - (3m + q^* - m - 1)/2$ кругов. Тем самым общее число покрывающих кругов должно быть не меньше чем $3m + q^* - m + (3m + q^* - m) - (3m + q^* - m - 1)/2 = 3m + q^* + (q^* + 1)/2$. Полученное число больше имеющегося числа кругов. Таким образом, утверждение (9) доказано. Теорема 1 доказана.

Отметим, что в ряде случаев утверждения (7) и (8) дублируют друг друга, но не всегда. Например, $r_{n,k}^*$ при $n=5$ и $k=3$ получаются согласно (8), но не следуют из (7).

Теорема 2. Пусть n равных кругов образуют k -кратное покрытие равностороннего треугольника T . Тогда если $n = 3k$, $k \geq 1$, то

$$r_{3k,k}^* = r_{3k+1,k}^* = \dots = r_{3k+k-1,k}^* = \sqrt{3}/6, \quad (10)$$

если k чётно, $k \geq 2$, то

$$r_{n,k}^* = 1/4 \quad \text{при} \quad n = 3k + 3k/2, 3k + 3k/2 + 1, \dots, 6k - 1, \quad (11)$$

если k нечётно, $k \geq 3$, то

$$r_{n,k}^* = 1/4 \quad \text{при} \quad n = 5k - 1, 5k, 5k + 1, \dots, 6k - 1. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ABC — треугольник T и точка D является центром описанной окружности треугольника T . Выберем точки C_1 , C_2 и C_3 посередине отрезков AD , BD и CD соответственно. Тогда $AC_1 = BC_1 = CC_1 = \sqrt{3}/6$. Построим в точках C_1 , C_2 и C_3 по m кругов радиуса $\sqrt{3}/6$, тем самым осуществив m -кратное покрытие T . Допустим, что радиус r покрывающих кругов меньше $\sqrt{3}/6$. Для m -кратного покрытия вершин A , B и C нужно, чтобы от каждой из этих вершин до m центров покрывающих кругов было расстояние не более чем r . При этом каждый из указанных кругов не покрывает точку D , а оставшихся $m - 1$ кругов недостаточно для m -кратного покрытия точки D . Таким образом, допущение неверно, и выполняется соотношение (10).

Докажем (11). Поместим $k/2$ кругов радиуса $1/4$ вместо каждого круга, изображенного на рис. 1(а). В результате получим k -кратное покрытие треугольника T . Допустим, что радиус кругов меньше $1/4$. Для k -кратного покрытия трёх вершин треугольника требуется не менее $3k$ кругов. Эти $3k$ кругов не могут покрыть любую из точек E , F и G (E , F и G являются серединами сторон треугольника T , на рис. 1(а) они

выделены маленькими квадратами). Круг радиуса $r < 1/4$ не может покрыть любую пару из точек E , F и G . Следовательно, для k -кратного покрытия E , F и G необходимо не менее чем $3k$ кругов. Однако имеется только n кругов, где n определяется по формуле (11) и $n < 6k - 1$. Следовательно, допущение неверно, и выполняется (11).

Осталось доказать (12). Расположим $(k-1)/2$ кругов радиуса $1/4$ вместо каждого круга, представленного на рис. 1(b), и ещё круги с центрами в точках f , g , h и s (выделены на рис. 1(b) маленькими кружками). Тогда получим k -кратное покрытие треугольника T . Если допустить, что круги имеют радиус меньше $1/4$, то аналогично изложенному выше получим, что числа кругов, приведённого в (12), недостаточно для k -кратного покрытия T . Стало быть, такое предположение неверно, и выполняется соотношение (12). Теорема 2 доказана.

4. Некоторые оценки радиусов кругов для многократного покрытия единичного квадрата

Частные случаи многократного покрытия единичного квадрата рассмотрены в [7–10]. Для полноты изложения приведём результаты, полученные в указанных работах, в виде теоремы 3.

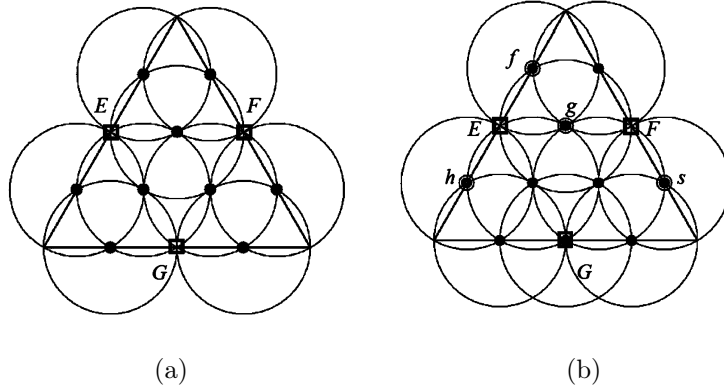


Рис. 1. К доказательству теоремы 2

Теорема 3. Для минимально возможного радиуса $r_{n,k}^*$ k -кратного, $k \geq 2$, покрытия n равными кругами квадрата S имеют место следующие соотношения:

при нечётном k

$$r_{2k,k}^* = r_{2k+1,k}^* = \dots = r_{2k+(k-1)/2,k}^* = \sqrt{5}/4,$$

$$r_{k,k}^* = r_{k,k-1}^* = \dots = r_{k,k-(k-1)/2}^* = \sqrt{2}/2,$$

при чётном k

$$r_{2k,k}^* = r_{2k+1,k}^* = \dots = r_{2k+k/2-1,k}^* = \sqrt{5}/4,$$

$$r_{k,k}^* = r_{k,k-1}^* = \dots = r_{k,k+1-k/2}^* = \sqrt{2}/2,$$

при любом $k \geq 1$

$$1/2 \leq r_{3k,k}^*, r_{3k+1,k}^*, \dots, r_{3k+k-1,k}^* \leq r_{3,1}^*,$$

$$r_{4k,k}^* = r_{4k+1,k}^* = \dots = r_{4k+k-1,k}^* = \sqrt{2}/4,$$

в частности, $r_{5,2}^* = \sqrt{10}/6$, $r_{8,3}^* = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $r_{10,4}^* = \sqrt{10}/6$.

Теорема 4. $r_{6,2}^* = \sqrt{65}/16$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см., например, [34]), что однократное покрытие тремя кругами осуществляется при $r_{3,1}^* = \sqrt{65}/16$ (рис. 2). Заменяя каждый круг двумя такими же кругами, получим двукратное покрытие квадрата S шестью кругами. Следовательно, $r^* = r_{6,2}^* \leq \sqrt{65}/16$. Легко убедиться, что $r^* > 1/2$.

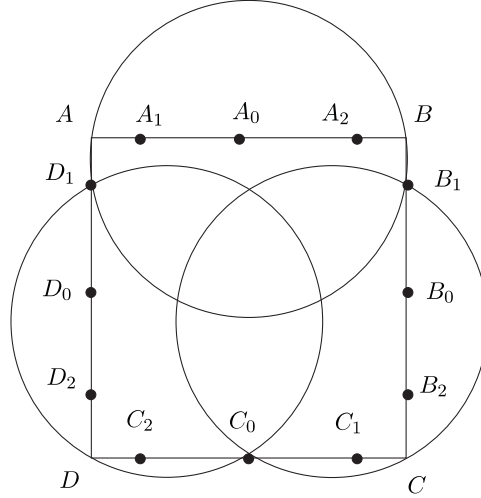


Рис. 2. Двукратное покрытие шестью кругами

Допустим, что радиус кругов r меньше чем $\sqrt{65}/16$ (но не меньше чем $1/2$). Каждый круг такого радиуса может покрывать не более двух вершин квадрата. Пусть t кругов K_1, K_2, \dots, K_t таковы, что каждый из них покрывает две вершины S , а каждый из оставшихся $6 - t$ кругов покрывает не более одной вершины S . При $t \leq 1$ число покрытых

вершин с учётом кратности покрытия будет не более $2m + 6 - m$, что меньше требуемого числа 8. Стало быть, $m \geq 2$. Рассмотрим различные варианты значений m .

Пусть K — круг радиуса r^* , покрывающий сторону AB , и он сдвинут как можно ближе к центру квадрата. Точки B_1 и D_1 являются точками пересечения K со сторонами BC и AD соответственно. Аналогичным образом получают точки A_1, A_2, C_1, C_2, B_2 и D_2 (рис. 2).

1. Пусть $m = 2$ и каждый из кругов K_1 и K_2 покрывает одну из сторон квадрата, положим сторону (отрезок) AB , а каждый из отрезков BC , CD и DA не покрывается целиком одним кругом. Такой вариант расположения кругов обозначим через 2–0–0–0. Круг, покрывающий вершину D , не может покрывать окрестность точки B_1 , а круг, покрывающий вершину C , не может покрывать окрестность точки D_1 . Пусть круги K_3 и K_4 покрывают точки B_1 и C , а K_5 и K_6 покрывают точки D_1 и D . При этом круги K_3 и K_4 не могут покрывать никакую часть отрезка D_1D , а круги K_5 и K_6 не могут покрывать никакую часть отрезка B_1C . Пусть C_0 — середина отрезка CD . Можно убедиться, что $AA_1 = BA_2 = 1/8 - \alpha$, где α — малая (неизвестная) величина, $\alpha > 0$. Тогда при $r < r^*$ имеем

$$B_1C_0 = \sqrt{(1/2)^2 + (1 - (1/8 - \alpha))^2} = \sqrt{65/64 + 7\alpha/4 + \alpha^2} = \sqrt{65}/8 + \beta,$$

где $\beta > 0$. Следовательно, круги, покрывающие точку B_1 , не могут покрывать точку C_0 , а круги, покрывающие точку D_1 , не могут покрывать точку C_0 . Значит, рассматриваемый вариант неприемлем.

2. В варианте 1–1–0–0 для двукратного покрытия вершины C нужен ещё один круг, пусть это будет K_3 , а для двукратного покрытия вершины D нужны ещё два круга, пусть K_4 и K_5 . Ни один из кругов K_3 , K_4 и K_5 не может покрыть интервал A_1A и вершину A , поэтому нужен ещё один круг K_6 , покрывающий их. Круг K_6 не может покрывать окрестность точки B_1 (какой бы малой эта окрестность ни была). Пусть точку B_1 покрывает круг K_3 , тогда K_3 не может покрыть точку C_0 — середину отрезка CD .

Пусть точку C_0 покрывает круг K_4 , тогда этот круг не может покрыть точку D_1 . Пусть K_6 покрывает окрестность точки D_1 , и для обеспечения двукратного покрытия привлечём ещё круг K_5 , но тогда не обеспечивается двукратное покрытие точки C_0 . Если точку C_0 покрывают круги K_4 и K_5 , то не обеспечивается двукратность покрытия точки D_1 . Таким образом, этот вариант тоже исключен.

3. Пусть имеем вариант 1–0–1–0. Тогда каждая вершина квадрата покрыта, скажем, кругами K_1 и K_2 однократно. Построим круги радиуса r^* с центрами в вершинах квадрата. Пересечения этих кругов, содержащиеся в квадрате, обозначим через S_1, S_2, S_3 и S_4 . Центры кругов K_1, K_2, K_3 и K_4 не могут быть в области $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, иначе они покрывали бы две вершины квадрата. Пусть круг K_3 покрывает точку B , K_4 — точку C , K_5 — точку D и K_6 — точку A . Окрестность точки B_1 , лежащую в квадрате, могут покрыть только круги K_3 и K_4 , а окрестность точки D_1 , лежащую в квадрате, — только круги K_5 и K_6 , но тогда точка C_0 покрыта только одним кругом K_2 . Таким образом, этот вариант тоже исключается.

Случаи $m = 3, 4, 5, 6$ рассматриваются аналогично. В результате $r_{6,2}^* = \sqrt{65}/16$, что и требовалось. Теорема 4 доказана.

5. Некоторые оценки радиусов кругов для многократного покрытия единичного круга

Теорема 5. Для n равных кругов, обеспечивающих k -кратное покрытие единичного круга, выполняются следующие соотношения:

$$r_{k,k}^* = 1, \quad 1 \leq k \leq n, \quad r_{7k,k}^* = 0.5, \quad k \geq 1, \quad (13)$$

$$r_{2k,k}^* = r_{2k,k+1}^* = \dots = r_{2k,2k-1}^* = 1, \quad k \geq 1, \quad (14)$$

$$r_{2k-1,k}^* = r_{2k-1,k+1}^* = \dots = r_{2k-1,2k-2}^* = 1, \quad k \geq 1, \quad (15)$$

$$r_{n,k}^* = \sin(k\pi/n), \quad 2k+1 \leq n \leq 4k, \quad k \geq 1. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (13) очевидны.

Докажем (14). Если радиус покрывающих кругов равен 1 и их центры расположить в центре покрываемого круга K , то обеспечивается $2k$ -кратное покрытие K . Допустим, что радиус r покрывающих кругов меньше единицы ($r < 1$). Пусть $K_r(C)$ обозначает круг радиуса r с центром в точке C и L — граница покрываемого единичного круга K (рис. 3). Точка C находится в середине хорды AB , величину угла AOB обозначим через α , пусть радиус r круга $K_r(C)$ равен длине отрезка AC .

Так как по предположению $r < 1$, каждый круг $K_r(C)$ может покрыть как максимум часть L , содержащуюся в секторе AOB с центральным углом $2\alpha < \pi$. Тогда $2k$ таких кругов могут покрыть L угловой длины: $2k \times 2\alpha < k \times 2\pi$. Следовательно, не обеспечивается k -кратное покрытие L . Итак, $r_{2k,k}^* = 1$. Тогда, очевидно, выполняются и все соотношения (14).

Соотношения (15) очевидным образом следуют из (14), доказательство (16) аналогично доказательству (14). Теорема 5 доказана.

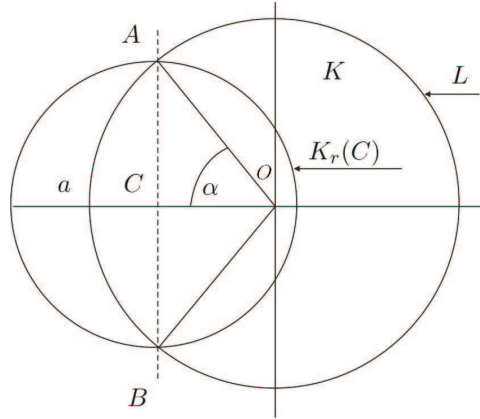


Рис. 3. К доказательству теоремы 5

6. Численные результаты

Для нахождения многократных покрытий равностороннего треугольника, квадрата и круга использовались представленные в данной работе алгоритмы. Была разработана программа, реализующая указанные алгоритмы. При решении дискретной задачи в алгоритме A2 применялась библиотека ILOG CPLEX 11.2. Строились релаксированные задачи размерности до 5000×5000 , а ядерные — размерности $q \times 5000$, где $q \approx 100-500$.

В данной работе для k -кратного покрытия радиусы кругов получены либо теоретическими рассуждениями (см. теоремы 1–5), либо с помощью указанных алгоритмов и программы.

Радиусы кругов, обеспечивающих k -кратное покрытие равностороннего треугольника для $n \leq 15$ и $1 < k \leq n$, полученные в данной работе, представлены в табл. 1. В данной и последующих таблицах экстремальные значения радиусов (которые нельзя уменьшить) выделены жирным шрифтом. Другие результаты, возможно, улучшаемы. Все результаты приведены с точностью 0.00001. В таблицах для полноты приводятся известные радиусы кругов однократного покрытия. В случае однократного покрытия равностороннего треугольника n кругами наименьшего возможного радиуса $r_{n,1}^*$ величины $r_{n,1}^*$ при $n \leq 3$ получаются очевидным образом. Для $n = 4, 5, 6$ и 9 экстремальные значения установлены в [30]. Для других значений n ($n \leq 30$) численными методами радиусы $r_{n,1}$ (возможно улучшаемые) кругов и расположение центров кругов

найденны в [30, 33].

Т а б л и ц а 1

Радиусы n кругов, обеспечивающих k -кратное покрытие треугольника T

n	k -кратность						
	1	2	3	4	5	6	7
1	$\sqrt{3}/3$						
2	$1/2$	$\sqrt{3}/3$					
3	$\sqrt{3}/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$				
4	$\frac{1}{2+\sqrt{3}}$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$			
5	$1/4$	$1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$		
6	$1/(3\sqrt{3})$	$\sqrt{3}/6$	$1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	
7	0.18525	$\sqrt{3}/6$	$1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$
8	0.17699	0.26343	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$
9	0.16667	$1/4$	$\sqrt{3}/6$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$
10	0.14434	$1/4$	$\sqrt{3}/6$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$
11	0.14105	$1/4$	$\sqrt{3}/6$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
12	0.13732	0.19245	0.26795	$\sqrt{3}/6$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
13	0.13266	0.18968	0.25957	$\sqrt{3}/6$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
14	0.12752	0.18525	$1/4$	$\sqrt{3}/6$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
15	0.11547	0.17810	$1/4$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/6$	$1/2$	$1/2$

Полученные в [8–10] радиусы кругов обеспечивают k -кратное покрытие единичного квадрата S для $n \leq 15$ и $1 < k \leq n$ и представлены в табл. 2. Для однократного покрытия единичного квадрата n кругами наименьшего возможного радиуса $r_{n,1}^*$ величины $r_{n,1}^*$ при $n \leq 2$ получаются очевидным образом. Для $n = 3, 4, 5, 6, 7$ экстремальные значения $r_{n,1}^*$ см., например, в [31]. Для других значений n ($n \leq 50$) численными методами радиусы $r_{n,1}$ (возможно улучшаемые) и расположение центров кругов найдены в [4, 31, 32, 34, 36, 37].

Полученные радиусы кругов, обеспечивающие k -кратное покрытие единичного круга для $n \leq 15$ и $1 < k \leq n$, представлены в табл. 3. Для однократного покрытия круга единичного радиуса n кругами наименьшего возможного радиуса величины $r_{n,1}^*$ при $n \leq 4$ получаются очевидным образом. Для $n = 5, 6$ экстремальные значения $r_{n,1}^*$ установлены в [19], а при $n=8, 9$ и 10 — в [38]. Для других значений n в [28, 37] численными методами найдены радиусы $r_{n,1}$ (возможно улучшаемые) и расположение центров кругов.

Из табл. 1–3 видно, что большинство значений радиусов покрывающих кругов экстремальны (неулучшаемы). Отметим, что в ряде случаев

минимальные радиусы покрывающих кругов в данной работе вначале получены численными методами, а затем установлена их экстремальность.

Т а б л и ц а 2

Радиусы n кругов, обеспечивающих k -кратное покрытие квадрата S

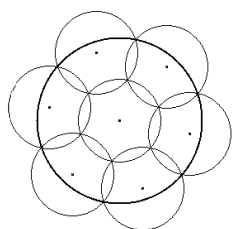
n	k -кратность						
	1	2	3	4	5	6	7
1	$\sqrt{2}/2$						
2	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{2}/2$					
3	$\sqrt{65}/16$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$				
4	$\sqrt{2}/4$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$			
5	0.32616	$\sqrt{10}/6$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$		
6	0.29873	$\sqrt{65}/16$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	
7	0.27429	0.50389	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
8	0.26030	$\sqrt{2}/4$	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
9	0.23064	$\sqrt{2}/4$	0.50389	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
10	0.21823	0.32616	0.50048	$\sqrt{10}/6$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
11	0.21252	0.31280	0.50000	0.51764	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
12	0.20228	0.29873	$\sqrt{2}/4$	0.50389	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{2}/2$
13	0.19431	0.29106	$\sqrt{2}/4$	0.50389	0.52705	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{2}/2$
14	0.18551	0.27429	$\sqrt{2}/4$	0.50398	0.51764	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}/4$
15	0.17966	0.26650	0.32616	0.50100	0.50389	0.52705	$\sqrt{5}/4$

Очевидно, что $r_{n,k}^* \leq r_{n,1}^*$. При построении k -кратных покрытий в ряде случаев можно взять однократное покрытие и заменить каждый круг k кругами. В некоторых приложениях, например, при проектировании сенсорных сетей или навигационных систем расположение двух и более устройств в одной точке теряет смысл. Поэтому желательно располагать центры кругов в разных точках. Иногда это легко реализовать. Например, для построения двукратного покрытия круга 8-ю кругами, достаточно расположить центры кругов равномерно на окружности радиуса $1/\sqrt{2}$. Как известно, при оптимальном покрытии круга 7-ю кругами ($r_{7,1}^* = 0.5$) центр одного из них совпадает с центром покрываемого круга (рис. 4(а)). При построении двукратного покрытия удвоением числа кругов, представленных на рис. 4(а), будут совпадающие центры. С помощью алгоритмов А1–А3 можно добиться того, что центры кругов не совпадают (рис. 4(б)). При оптимальном покрытии круга 8-ю кругами, так же, как для $n=7$, один круг оказывается в центре и 7 кругов покрывают границу [38]. Для двукратного покрытия круга 16-ю кругами получаем расположение кругов, представленное на рис. 4(с).

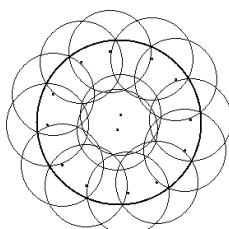
Т а б л и ц а 3

Радиусы n кругов, обеспечивающих k -кратное покрытие единичного круга
кругами наименьшего возможного радиуса

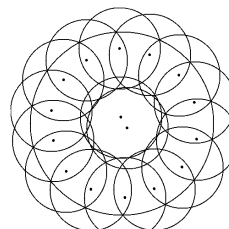
n	k -кратность покрытия						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	$\sqrt{3}/2$	1	1				
4	$\sqrt{2}/2$	1	1	1			
5	0.60938	$\sin \frac{2\pi}{5}$	1	1	1		
6	0.55591	$\sqrt{3}/2$	1	1	1	1	
7	1/2	$\sin \frac{2\pi}{7}$	$\sin \frac{3\pi}{7}$	1	1	1	1
8	0.44504	$\sqrt{2}/2$	$\sin \frac{3\pi}{8}$	1	1	1	1
9	0.41421	0.64906	$\sqrt{3}/2$	$\sin \frac{4\pi}{9}$	1	1	1
10	0.39493	0.60714	$\sin \frac{3\pi}{10}$	$\sin \frac{4\pi}{10}$	1	1	1
11	0.38059	0.57671	$\sin \frac{3\pi}{11}$	$\sin \frac{4\pi}{11}$	$\sin \frac{5\pi}{11}$	1	1
12	0.36188	0.55324	$\sin \frac{3\pi}{12}$	$\sin \frac{4\pi}{12}$	$\sin \frac{5\pi}{12}$	1	1
13	0.34727	0.53475	0.66659	$\sin \frac{4\pi}{13}$	$\sin \frac{5\pi}{13}$	$\sin \frac{6\pi}{13}$	1
14	0.33222	1/2	0.63549	$\sin \frac{4\pi}{14}$	$\sin \frac{5\pi}{14}$	$\sin \frac{6\pi}{14}$	1
15	0.31861	0.46730	0.60786	$\sin \frac{4\pi}{15}$	$\sin \frac{5\pi}{15}$	$\sin \frac{6\pi}{15}$	$\sin \frac{7\pi}{15}$



(a)



(b)



(c)

Рис. 4. Покрытие круга: (a) однократное 7-ю кругами радиуса 0.5,
(b) двукратное 14-ю кругами радиуса 0.5,
(c) двукратное 16-ю кругами радиуса 0.444318.

З а к л ю ч е н и е

Предложены алгоритмы решения задач многократного покрытия равностороннего треугольника, квадрата и круга заданным числом равных кругов минимально возможного радиуса. Доказана экстремальность получаемых покрытий при некоторых значениях n и $k \leq n$. Численными методами получены значения радиусов кругов, при которых обеспечивается k -кратное покрытие треугольника, квадрата и круга для $n \leq 15$

и $1 < k \leq n$. Алгоритмы, представленные в работе, позволяют находить многократные покрытия не только указанных фигур, но и произвольных выпуклых ограниченных областей на плоскости. Результативность алгоритмов продемонстрирована для выбранных фигур.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту за замечания и полезные рекомендации, позволившие улучшить работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алдын-оол Т. А., Ерзин А. И., Залюбовский В. В. Покрытие плоской области случайно распределенными сенсорами // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 7–25.
2. Астраков С. Н., Ерзин А. И., Залюбовский В. В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 3. С. 3–19.
3. Астраков С. Н., Ерзин А. И. Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов // Вычисл. технологии. 2010. Т. 17, № 1. С. 26–34.
4. Брусов В. С., Пиявский С. А. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия плоских областей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 2. С. 304–312.
5. Галиев Ш. И. Направления убывания для минимаксиминных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 3. С. 323–343.
6. Галиев Ш. И., Заботин В. И. О непрерывном обзоре поверхности Земли // Исслед. Земли из космоса. 1983. № 1. С. 117–120.
7. Галиев Ш. И., Карпова М. А. Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 4. С. 757–769.
8. Галиев Ш. И., Карпова М. А. Многократные покрытия квадрата кругами. I // Вестн. КГТУ им. А. Н. Туполева. 2013. № 1. С. 86–93.
9. Галиев Ш. И., Карпова М. А. Многократные покрытия квадрата кругами. II // Вестн. КГТУ им. А. Н. Туполева. 2013. № 2-1. С. 88–92.
10. Галиев Ш. И., Хорьков А. В. Некоторые экстремальные многократные покрытия квадрата кругами // Вестн. КГТУ им. А. Н. Туполева. 2014. № 2. С. 154–159.
11. Еремеев А. В., Заозёрская Л. А., Колоколов А. А. Задача о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2009. Т. 7, № 2. С. 22–46.
12. Кузюрин Н. Н. О сложности построения асимптотически оптимальных покрытий и упаковок // Докл. РАН. 1998. Т. 363, № 1. С. 11–13.
13. Можяев Г. В. Задача о непрерывном обзоре поверхности Земли и кинематически правильные спутниковые системы // Косм. исслед. 1972. Т. 10, № 6. С. 833–840.

14. **Тахонов И. И.** О некоторых задачах покрытия плоскости кругами // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 1. С. 84–102.
15. **Хачай М. Ю., Поберий М. И.** Вычислительная сложность и аппроксимируемость серии геометрических задач о покрытии // Тр. ин-та математики и механики УРО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 247–260.
16. **Шенмайер В. В.** Задача о минимальном шаре, охватывающем k точек // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 1. С. 93–99.
17. **Ammari H. M.** Challenges and opportunities of connected k -covered wireless sensor networks. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2009. 342 p.
18. **Bertsimas D., Vohra R.** Rounding algorithms for covering problems // Math. Program. Ser. A. 1998. Vol. 80, No. 1. P. 63–89.
19. **Bezdek K.** Über einige Kreisüberdeckungen // Beitr. Algebra Geom. 1983. Vol. 14. P. 7–13.
20. **Brimberg J., Drezner Z.** A new heuristic for solving the p -median problem in the plane // Comput. Oper. Res. 2013. Vol. 40, No. 1. P. 427–437.
21. **Chvatal V.** A greedy heuristic for the set covering // Math. Oper. Res. 1979. Vol. 4, No. 1. P. 233–235.
22. **Drezner Z.** Facility location: A survey of applications and methods. New York: Springer-Verl., 1995. 571 p.
23. **Erzin A. I., Astrakov S. N.** Min-density stripe covering and applications in sensor networks // Proc. 2011 Int. Conf. Comput. Sci. Its Appl. (Santander, Spain, June 20–23, 2011). Pt. III. Heidelberg: Springer-Verl., 2011. P. 152–162. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 6784).
24. **Garey M. R., Johnson D. S.** Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco: Freeman, 1979. 339 p.
25. **Hall N. G., Hochbaum D. S.** A fast approximation algorithm for the multicovering problem // Discrete Appl. Math. 1986. Vol. 15, No. 1. P. 35–40.
26. **Hefeeda M., Bagheri M.** Randomized k -coverage algorithms for dense sensor networks // Proc. 26th IEEE Int. Conf. Comput. Commun. INFOCOM-2007 (Anchorage, AK, May 6–12, 2007). Piscataway: IEEE, 2007. P. 2376–2380.
27. **Kononov A., Sevastianov S., Sviridenko M.** A complete 4-parametric complexity classification of short shop scheduling problems // J. Scheduling. 2012. Vol. 15. P. 427–446.
28. **Krotoszyński S.** Covering a disk with smaller disks // Stud. Sci. Math. Hung. 1993. Vol. 28, No. 3–4. P. 277–283.
29. **Megiddo N., Supowit K. J.** On the complexity of some common geometric location problems // SIAM J. Comput. 1984. Vol. 13, No. 1. P. 182–196.
30. **Melissen H.** Loosest circle coverings of an equilateral triangle // Math. Mag. 1997. Vol. 70, No. 2. P. 119–125.
31. **Melissen J. B. M., Schuur P. C.** Improved coverings of a square with six and eight equal circles // Electron. J. Comb. 1996. Vol. 3, No. 1/R32. P. 1–10.

32. **Melissen J. B. M., Schuur P. C.** Covering a rectangle with six and seven circles // *Discrete Appl. Math.* 2000. Vol. 99, No. 1–3. P. 149–156.
33. **Nurmela K. J.** Conjecturally optimal coverings of an equilateral triangle with up to 36 equal circles // *Exp. Math.* 2000. Vol. 9, No. 2. P. 241–250.
34. **Nurmela K. J., Östergard P. R. J.** Covering a square with up to 30 equal circles // *Res. Rep. A62 Lab. Technology Helsinki Univ.* 2000. Available at <http://www.tcs.hut.fi/old/reports/A62abstract.html>. Accessed Oct. 20, 2015.
35. **Tabirca T., Yang L. T., Tabirca S.** Smallest number of sensors for k -covering // *Int. J. Comput. Commun. Control.* 2013. Vol. 8, No. 2. P. 312–319.
36. **Tarnai T., Gáspár Zs.** Covering a square by equal circles // *Elem. Math.* 1995. Vol. 50. P. 167–170.
37. **Tóth G. F.** Packing and covering // *Handbook of discrete and computational geometry.* Boca Raton, FL: CRC Press, 1997. P. 19–41.
38. **Tóth G. F.** Thinnest covering of circle by eight, nine and ten congruent circles // *Comb. Comput. Geom.* New York: Cambridge Univ. Press, 2005. P. 361–376. (*Math. Sci. Res. Inst. Publ.*; Vol. 52).
39. **Verblunsky S.** On the least number of unit circles which can cover a square // *J. London Math. Soc.* 1949. Vol. 24, No. 3. P. 164–170.

Галиев Шамиль Ибрагимович,
Хорьков Александр Владимирович

Статья поступила
17 марта 2015 г.
Исправленный вариант —
20 августа 2015 г.

DISKRETNYYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
November–December 2015. Volume 22, No. 6. P. 5–28

UDC 519.7

DOI: 10.17377/daio.2015.22.482

MULTIPLE CIRCLE COVERINGS
OF AN EQUILATERAL TRIANGLE, SQUARE, AND CIRCLE

Sh. I. Galiev¹, A. V. Khorkov¹

¹Kazan National Research Technological University,
10 K. Marx St., 420011 Kazan, Russia
e-mail: sh.galiev@mail.ru, aLex22ferk@yandex.ru

Abstract. We study k -fold coverings of an equilateral triangle, square, and circle with n congruent circles of the minimum possible radius $r_{n,k}^*$. We describe mathematical models for these problems and algorithms for their solving. We also prove optimality of the constructed coverings for certain n and k , $1 < k \leq n$. For $n \leq 15$ and $1 < k \leq n$, we present the best found (possibly, improvable) values of circles radii ensuring the k -fold covering of the equilateral triangle, square or a circle. Ill. 4, tab. 3, bibliogr. 39.

Keywords: multiple covering with congruent circles, equilateral triangle, square, circle, minimum covering problem.

REFERENCES

1. T. A. Aldyn-ool, A. I. Erzin, and V. V. Zalyubovskiy, The coverage of a planar region by randomly deployed sensors, *Vestn. NGU, Ser. Mat. Mekh. Inform.*, **10**, No. 4, 7–25, 2010.
2. S. N. Astrakov, A. I. Erzin, and V. V. Zalyubovskiy, Sensor networks and covering of plane by discs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **16**, No. 3, 3–19, 2009.
3. S. N. Astrakov and A. I. Erzin, Construction of efficient covering models in the monitoring of extended objects, *Vychisl. Tekhnol.*, **17**, No. 1, 26–34, 2012.
4. V. S. Brusov and S. A. Piyavskii, A computational algorithm for optimally covering a plane region, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **11**, No. 2, 304–312, 1971. Translated in *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **11**, No. 2, 17–27, 1971.
5. Sh. I. Galiev, The directions of decrease for minmaxmin problems, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **34**, No. 3, 323–343, 1994. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.*, **34**, No. 3, 271–286, 1994.

6. **Sh. I. Galiev** and **V. I. Zabolotn**, On continuous surveys of Earth's surface, *Issled. Zemli Kosm.*, No. 1, 117–120, 1983.
7. **Sh. I. Galiev** and **M. A. Karpova**, Optimization of multiple covering of a bounded set with circles, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **50**, No. 4, 757–769, 2010. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**, No. 4, 721–732, 2010.
8. **Sh. I. Galiev** and **M. A. Karpova**, Multiple circle coverings of a square. I, *Vestn. KGTU Tupoleva*, No. 1, 86–93, 2013.
9. **Sh. I. Galiev** and **M. A. Karpova**, Multiple circle coverings of a square. II, *Vestn. KGTU Tupoleva*, No. 2-1, 88–92, 2013.
10. **Sh. I. Galiev** and **A. V. Khorkov**, Some extreme multiple circle coverings of a square, *Vestn. KGTU Tupoleva*, No. 2, 154–159, 2014.
11. **A. V. Ereemeev**, **L. A. Zaozerskaya**, and **A. A. Kolokolov**, The set covering problem: Complexity, algorithms, and experimental investigations, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2*, **7**, No. 2, 22–46, 2000.
12. **N. N. Kuzyurin**, On the complexity of asymptotically optimal coverings and packing, *Dokl. Akad. Nauk*, **363**, No. 1, 11–13, 1998. Translated in *Dokl. Math.*, **58**, No. 3, 345–346, 1998.
13. **G. V. Mozhaev**, Problem of continuous survey of Earth's surface and kinematic regular satellite systems, *Kosm. Issled.*, **10**, No. 6, 833–840, 1972.
14. **I. I. Takhonov**, On some problems of covering the plane with circles, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **21**, No. 1, 84–102, 2014.
15. **M. Yu. Khachai** and **M. I. Poberii**, Computational complexity and approximability of a series of geometric covering problems, *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, **18**, No. 3, 247–260, 2012. Translated in *Proc. Steklov Inst. Math.*, **284**, Suppl. 1, S87–S95, 2014.
16. **V. V. Shenmaier**, The smallest k -enclosing ball problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **20**, No. 1, 93–99, 2013.
17. **H. M. Ammari**, *Challenges and Opportunities of Connected k -Covered Wireless Sensor Networks: From Sensor Deployment to Data Gathering*, Springer, Heidelberg, 2009 (Stud. Comput. Intell., Vol. 215).
18. **D. Bertsimas** and **R. Vohra**, Rounding algorithms for covering problems, *Math. Program., Ser. A*, **80**, No. 1, 63–89, 1998.
19. **K. Bezdek**, Über einige Kreisüberdeckungen, *Beitr. Algebra Geom.*, **14**, 7–13, 1983 [German].
20. **J. Brimberg** and **Z. Drezner**, A new heuristic for solving the p -median problem in the plane, *Comput. Oper. Res.*, **40**, No. 1, 427–437, 2013.
21. **V. Chvatal**, A greedy heuristic for the set-covering problem, *Math. Oper. Res.*, **4**, No. 1, 233–235, 1979.
22. **Z. Drezner**, ed., *Facility Location: A Survey of Applications and Methods*, Springer, New York, 1995 (Springer Ser. Oper. Res. Financ. Eng.).

23. **A. I. Erzin** and **S. N. Astrakov**, Min-density stripe covering and applications in sensor networks, in *Computational Science and Its Applications — ICCSA 2011* (Proc. 2011 Int. Conf. Comput. Sci. Its Appl., Santander, Spain, June 20–23, 2011), Pt. III, pp. 152–162, Springer, Heidelberg, 2011 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 6784).
24. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson**, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, 1979. Translated under the title *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi*, Mir, Moscow, 1982.
25. **N. G. Hall** and **D. S. Hochbaum**, A fast approximation algorithm for the multicovering problem, *Discrete Appl. Math.*, **15**, No. 1, 35–40, 1986.
26. **M. Hefeeda** and **M. Bagheri**, Randomized k -coverage algorithms for dense sensor networks, in *Proc. 26th IEEE Int. Conf. Comput. Commun., Anchorage, AK, USA, May 6–12, 2007*, pp. 2376–2380, IEEE, Piscataway, 2007.
27. **A. Kononov**, **S. Sevastianov**, and **M. Sviridenko**, A complete 4-parametric complexity classification of short shop scheduling problems, *J. Scheduling*, **15**, 427–446, 2012.
28. **S. Krotoszyński**, Covering a disk with smaller disks, *Stud. Sci. Math. Hung.*, **28**, No. 3–4, 277–283, 1993.
29. **N. Megiddo** and **K. J. Supowit**, On the complexity of some common geometric location problems, *SIAM J. Comput.*, **13**, No. 1, 182–196, 1984.
30. **H. Melissen**, Loosest circle coverings of an equilateral triangle, *Math. Mag.*, **70**, No. 2, 118–124, 1997.
31. **J. B. M. Melissen** and **P. C. Schuur**, Improved coverings of a square with six and eight equal circles, *Electron. J. Comb.*, **3**, No. 1/R32, 1–10, 1996.
32. **J. B. M. Melissen** and **P. C. Schuur**, Covering a rectangle with six and seven circles, *Discrete Appl. Math.*, **99**, No. 1–3, 149–156, 2000.
33. **K. J. Nurmela**, Conjecturally optimal coverings of an equilateral triangle with up to 36 equal circles, *Exp. Math.*, **9**, No. 2, 241–250, 2000.
34. **K. J. Nurmela** and **P. R. J. Östergård**, Covering a square with up to 30 equal circles, *Res. Rep. 62*, Helsinki Univ. Technol., Helsinki, Finland, 2000. Available at <http://www.tcs.hut.fi/old/reports/A62abstract.html>. Accessed Oct. 20, 2015.
35. **T. Tabirca**, **L. T. Yang**, and **S. Tabirca**, Smallest number of sensors for k -covering, *Int. J. Comput. Commun. Control*, **8**, No. 2, 312–319, 2013.
36. **T. Tarnai** and **Zs. Gáspár**, Covering a square by equal circles, *Elem. Math.*, **50**, 167–170, 1995.
37. **G. F. Tóth**, Packing and covering, in J. E. Goodman and J. O'Rourke, eds., *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, pp. 19–41, CRC Press, Boca Raton, 1997.

- 38. G. F. Tóth**, Thinnest covering of a circle by eight, nine, or ten congruent circles, in J. E. Goodman, J. Pach, and E. Welzl, eds., *Combinatorial and Computational Geometry*, pp. 361–376, Cambridge Univ. Press, New York, 2005 (Math. Sci. Res. Inst. Publ., Vol. 52).
- 39. S. Verblunsky**, On the least number of unit circles which can cover a square, *J. London Math. Soc.*, **24**, No. 3, 164–170, 1949.

Shamil I. Galiev,
Alexander V. Khorkov

Received
17 March 2015

Revised
20 August 2015