

РЕЛАКСАЦИИ МНОГОГРАННИКА ОПТИМАЛЬНЫХ  
РАСПИСАНИЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ  
ОДНИМ ПРИБОРОМ С ПРЕРЫВАНИЯМИ \*)

*Н. Ю. Шерешик*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Омский гос. университет,  
пр. Мира, 55-а, 644077 Омск, Россия  
e-mail: m-m\_pikm@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается задача минимизации суммарного взвешенного времени обслуживания различных требований одним прибором с прерываниями. Построены два класса гиперплоскостей, содержащих многогранник оптимальных расписаний данной задачи. Проведён вычислительный эксперимент. Табл. 1, ил. 4, библиогр. 6.

**Ключевые слова:** теория расписаний, модель целочисленного линейного программирования, многогранник, полиэдр, правильное неравенство, релаксация.

**Введение**

В работе исследуется следующая задача теории расписаний. Задано множество требований  $V$ ,  $|V| = n$ , обслуживаемых одним прибором. Каждое требование имеет положительный вес  $w_i$ , длительности обслуживания одинаковы и равны  $p$ . Для каждого требования  $i \in V$  определён момент ожидания  $r_i$  — время, когда оно становится доступным для обработки. В обслуживании разрешены прерывания. Требуется найти расписание обслуживания такое, что взвешенная сумма моментов окончания обслуживания требований минимальна. В обозначениях, принятых в теории расписаний, эта задача имеет вид  $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$ . В целом задачи теории расписаний, в которых разрешены прерывания, характеризуются достаточно сложной структурой оптимального решения. В [1] подробно описаны актуальные проблемы, связанные с классом таких задач, в частности, задач на одном приборе. Вычислительная сложность

---

\*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-07-01141).

задачи зависит от типа ограничений (см., например, [4–6]). Рассматриваемая в данной статье задача является открытой с точки зрения теории сложности.

Количество требований и время их обслуживания конечны, значит, есть смысл говорить об общем директивном сроке  $d$  — моменте, к которому обслуживание всех требований будет завершено. Множество всех расписаний рассматриваемой задачи при заданном директивном сроке  $d$  обозначим через  $\Sigma_d$ . При этом очевидно, что если  $d$  выбрать слишком малым, то множество определённых выше расписаний может оказаться пустым. Очевидной нижней оценкой для  $d$  является величина  $np$ .

При условии рациональности величин  $r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и  $p$  в силу конечности количества требований весь период работы прибора в данной задаче можно считать разбитым на единичные полуоткрытые интервалы. При этом фраза «требование  $i \in V$  находится в обработке в момент времени  $k$ » будет означать, что требование  $i$  обрабатывается во временном интервале  $(k - 1, k]$ . Единичный момент времени, в который некоторое требование  $i$  находится в обработке, будем называть *юнитом* [2] требования  $i$ . В дальнейшем единичный временной интервал  $(k - 1, k]$  будем обозначать через  $k$ . Для удобства обозначим через  $D = \{1, 2, \dots, d\}$  множество всех моментов обслуживания требований.

Заметим, что если  $d < d'$ , то  $\Sigma_d \subset \Sigma_{d'}$ . В этой связи представляет интерес величина  $d_{\min}$  такая, что  $\Sigma_{d_{\min}} \neq \emptyset$  и  $\Sigma_{d_{\min}-1} = \emptyset$ . В [3] описана процедура дихотомии для нахождения  $d_{\min}$ , имеющая полиномиальную трудоёмкость. Поэтому далее везде будем полагать, что общий срок обслуживания всех требований минимален, т. е.  $d = d_{\min}$ .

*Разницей между юнитами  $k_1$  и  $k_2$*  будем называть разницу между моментами времени, соответствующими правым границам временных интервалов  $(k_1 - 1, k_1]$  и  $(k_2 - 1, k_2]$ , т. е. величину, равную  $k_2 - k_1$ .

Если требование  $i \in V$  имеет юниты  $k_1, k_2, \dots, k_p$ ,  $k_1 < k_2 < \dots < k_p$ , то момент времени  $S_i = k_1 - 1$  называется *моментом начала обработки* требования  $i$ .

*Многогранником* в конечномерном евклидовом пространстве будем называть выпуклую оболочку конечного множества точек, *полиэдром* — множество решений конечной системы уравнений и неравенств, если оно ограничено. Множество вершин многогранника  $P$  обозначим через  $\text{vert } P$ . Полиэдр, содержащий данный многогранник, будем называть *полиэдральной релаксацией многогранника*. Линейное неравенство называется *правильным относительно многогранника*, если любая точка многогранника ему удовлетворяет.

Под расписанием обслуживания требований понимается  $(0, 1)$ -вектор  $x \in R^{nd}$  с координатами  $x_{ik} \in \{0, 1\}$ ,  $i \in V$ ,  $k \in D$ . Единица означает, что требование  $i$  в момент времени  $k$  находится в обработке, иначе  $x_{ik} = 0$ . С множеством расписаний свяжем многогранник  $P_d$ , являющийся выпуклой оболочкой расписаний. Очевидно, что всякое расписание удовлетворяет следующей системе ограничений:

$$\sum_{k \in D} x_{ik} = p, \quad i \in V, \quad (1)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ik} \leq 1, \quad k \in D, \quad (2)$$

$$x_{ik} \geq 0, \quad i \in V, \quad k = r_i + 1, r_i + 2, \dots, d, \quad (3)$$

$$x_{ik} = 0, \quad i \in V, \quad k = 1, 2, \dots, r_i, \quad (4)$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\}, \quad i \in V, \quad k \in D. \quad (5)$$

Ограничения (1) гарантируют, что на обслуживание каждого требования необходимо ровно  $p$  единиц времени, (2) — что в каждый момент времени обслуживается не более одного требования, (4) — время ожидания требования  $i \in V$ . По сути дела полиэдр (1)–(4) является многогранником транспортной задачи с целыми правыми частями и, следовательно, целочисленный. Во введенных обозначениях задача  $1|pmtn; p_i = p, r_i| \sum w_i C_i$  может быть сформулирована как задача минимизации функции

$$f(x) = \sum_{i \in V} w_i C_i(x) \quad (6)$$

на множестве вершин полиэдра (1)–(4). Здесь  $C_i(x) = \max_{k \in D} x_{ik} = 1$ ,  $i \in V$ , — момент окончания обслуживания требования  $i$  при заданном расписании  $x$ . Задача (6) не является задачей целочисленного линейного программирования, поскольку целевая функция не линейна. Подобная трудность типична для многих задач теории расписаний при использовании аппарата целочисленного линейного программирования.

В [4] построена модель целочисленного линейного программирования, основанная на введении дополнительных булевых переменных. Модель имеет следующий вид.

Пусть  $Y$  — дубликат множества  $V$  (вспомогательное множество, с помощью которого будут подсчитываться моменты окончания обслуживания требований). При этом для множеств  $V$  и  $Y$  порядок элементов несуществен, множество  $D$  упорядочено. Так как множества  $V$  и  $Y$  фактически идентичны, в случаях, когда имеется в виду принадлежность элемента  $i$  множествам  $V$  и  $Y$  одновременно, использована запись  $i \in V (= Y)$ .

Введём переменные  $y_{ik}$ :

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если в момент } k \text{ обслуживание требования } i \\ & \text{ещё не завершено,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Добавим к ограничениям (1)–(4) следующую систему неравенств:

$$\sum_{l=k+1}^d x_{il} \leq p y_{ik}, \quad i \in V(=Y), \quad k = 1, 2, \dots, d-1, \quad (7)$$

$$y_{ik} \leq \sum_{l=k+1}^d x_{il}, \quad i \in V(=Y), \quad k = 1, 2, \dots, d-1, \quad (8)$$

$$y_{ik} \leq 1, \quad i \in Y, \quad k \in D. \quad (9)$$

Полученный полиэдр (1)–(4), (7)–(9) в пространстве  $R^{2nd}$  обозначим через  $M_d$ . Теперь под расписанием будем понимать  $(0,1)$ -вектор  $(x, y) \in R^{2nd}$ , удовлетворяющий ограничениям (1)–(4), (7)–(9). В [4] показано, что в этих терминах задача (6) может быть сформулирована так:

$$\min_{(x,y) \in M_d \cap Z^{2nd}} \left\{ h(x, y) = \sum_{i \in Y} \sum_{k \in D} w_i y_{ik} \right\}. \quad (10)$$

В настоящей работе в терминах описанной модели найдены два класса гиперплоскостей, содержащих многогранник оптимальных решений. Проведён вычислительный эксперимент по сравнению времени решения для модели, построенной в [4], и модели, усиленной полученными гиперплоскостями.

## 1. Классы правильных неравенств

В [4] описаны классы неравенств, правильных относительно многогранника  $P_d$ . Эти классы усиливают ограничения полиэдра  $M_d$  в том смысле, что в  $M_d$  существуют отсекаемые ими точки. Построены три класса правильных неравенств.

Первый класс  $S1$  состоит из множества гиперплоскостей, целиком содержащих многогранник  $P_d$ :

$$\sum_{k=1}^{r_i+p-1} y_{ik} = r_i + p - 1, \quad i \in V.$$

Второй класс  $S2$  неравенств составлен из неравенств, правильных относительно  $P_d$ :

$$x_{ik} \leq y_{i(k-1)} \quad \text{для любых } i \in V \text{ и } k \in \{2, 3, \dots, d\}.$$

Третий класс  $S3$  также состоит из правильных неравенств:

$$\sum_{i \in V} y_{ik} \geq n - \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor \quad \text{при любом } k \in \{1, 2, 3, \dots, d-1\}.$$

Так как количество ограничений в каждом классе полиномиально по  $n$ , присоединение этих классов неравенств (полностью или частично) к ограничениям полиэдра  $M_d$  даёт различные полиэдральные релаксации многогранника  $P_d$ . На этом основан вычислительный эксперимент, проведённый в [4].

## 2. Многогранник оптимальных расписаний

Среди всех расписаний выделим множество оптимальных расписаний, т. е. множество таких  $(x^*, y^*)$ , что  $h(x^*, y^*) \leq h(x, y)$ , для любых  $(x, y) \in \text{vert } P_d$ . Выпуклую оболочку множества всех оптимальных расписаний обозначим через  $P_d^*$  (рис. 1).

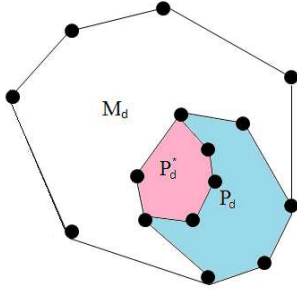


Рис. 1

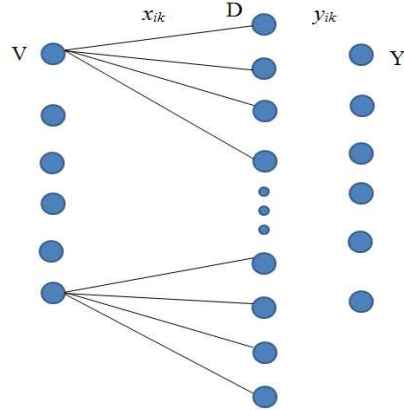


Рис. 2

В [2] приведены результаты, касающиеся структурных свойств оптимальных расписаний задачи  $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$ . В частности, показано, что при любом оптимальном расписании если  $S_i < S_j$ , то выполняется либо  $C_i \leq S_j$ , либо  $C_i > C_j$  для всех  $i, j \in V$ .

Следовательно, существуют два возможных варианта относительно обслуживания двух требований:

(i) одно требование полностью обслуживается до момента начала или после окончания обработки другого требования (рис. 2);

(ii) если одно требование поступило в обработку раньше второго и первое не было окончательно обработано к моменту начала второго, то второе требование должно быть полностью обработано до момента окончания обработки первого (рис. 3).

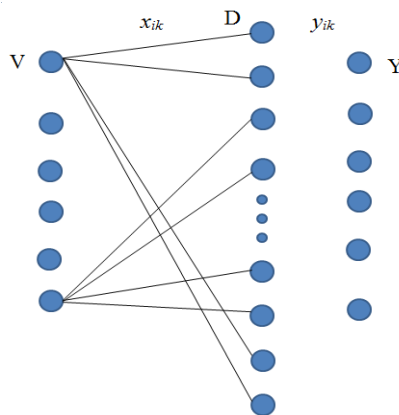


Рис. 3

Другими словами, при любом оптимальном расписании юниты двух произвольных требований не могут «перемешаться» между собой. В противном случае расписание можно улучшить.

Пусть имеется некоторое расписание работы прибора и требование  $i$  обслуживается в моменты  $k_1, k_2, \dots, k_p$  ( $k_m < k_{m+1}$ ). Заметим, что юниты  $k_1, k_2, \dots, k_p$  не обязательно идут непосредственно один за другим. Покажем, что в оптимальном расписании для любого  $m$  разница между двумя любыми соседними юнитами  $k_{m+1}$  и  $k_m$  имеет вид  $pl + 1$ , где  $l \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ . Предположим, что разница между юнитами  $k_{m+1}$  и  $k_m$  не может быть представлена в виде  $pl + 1$ . Это означает, что в данном временном интервале количество юнитов (не обязательно юнитов одного требования) не кратно  $p$ . Тогда найдётся требование  $j$ , которое не будет полностью обработано между юнитами  $k_{m+1}$  и  $k_m$ . Следовательно, найдётся юнит требования  $j$ , стоящий либо раньше  $k_m$ , либо позже  $k_{m+1}$ . Значит, юниты требований  $i$  и  $j$  «перемешаны». Тем самым это расписание оптимально. Таким образом, доказана

**Теорема 1.** В оптимальном расписании различные моменты обработки одного требования различны по модулю  $p$ .

Ниже приведён пример расписания обслуживания трёх требований при  $p = 4$  и  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ , иллюстрирующий тот факт, что неоптимальное расписание не удовлетворяет теореме 1.

ПРИМЕР.

$x_{ik}$	№	$\omega_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	12	1	1	1		1							
	2	7								1	1	1		1
	3	10				1		1	1				1	

$y_{ik}$	№	$\omega_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	12	1	1	1	1								
	2	7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	3	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

Значение целевой функции  $h(x, y)$  в данном расписании равно 225. Нетрудно показать, что существует расписание с меньшим значением целевой функции: например, при  $C_1 = 4$ ,  $C_2 = 8$ ,  $C_3 = 12$  значение целевой функции  $h(x, y)$  равно 195. Таким образом, расписание, представленное в примере, не удовлетворяет теореме 1 и неоптимально.

На основе теоремы 1 можно добавить к системе ограничений, задающих  $M_d$ , два класса уравнений, которым будут удовлетворять все точки многогранника оптимальных расписаний  $P_d^*$ . Опишем эти классы.

Для начала определим следующие подмножества множества  $D$ :  $T_1 = \{1, p + 1, \dots, pl - (p - 1)\}$ ,  $T_2 = \{2, p + 2, \dots, pl - (p - 2)\}$ , ...,  $T_p = \{p, 2p, \dots, pl\}$ , где  $l = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Теорема 2.** Для каждого  $i \in V$  гиперплоскости

$$\sum_{k \in T_1} x_{ik} = 1, \sum_{k \in T_2} x_{ik} = 1, \dots, \sum_{k \in T_p} x_{ik} = 1.$$

содержат многогранник  $P_d^*$ .

Обозначим этот класс гиперплоскостей через  $S_4$ .

Пусть имеется некоторое расписание работы прибора. Рассмотрим все требования, для которых  $r_i = 0$ , где  $i \in V$ . В силу теоремы 1 в оптимальном расписании момент начала обработки  $S_i$  у любого из этих требований можно представить в виде  $pl$ , где  $l \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ . Соответственно первый юнит таких требований будет равен 1 по модулю  $p$ . Значит, опять же в силу теоремы 1 заключительный юнит, т. е. момент окончания обработки, для любого такого требования будет равен 0 по

модулю  $p$ . Следовательно,  $C_i(x) = pt$ , где  $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ , другими словами,  $C_i(x) \in T_p$ .

**Теорема 3.** Для всех  $i$  таких, что  $r_i = 0$ , гиперплоскости

$$\sum_{k \in T_p} (x_{ik} \cdot k) = 1 + \sum_{k \in D} y_{ik}$$

содержат многогранник  $P_d^*$ .

Обозначим этот класс гиперплоскостей через  $S5$ .

Так как количество ограничений в классах  $S4$  и  $S5$  полиномиально по  $n$ , их добавление к ограничениям полиэдра  $M_d$  даёт различные полиэдральные релаксации многогранника оптимальных расписаний  $P_d^*$ .

### 3. Вычислительный эксперимент

В процессе выполнения работы проведён вычислительный эксперимент, целью которого было сравнение построенной в [4] ЦЛП-модели с добавленными классами  $S1$ ,  $S2$ ,  $S3$ , а также когда к ним добавлены классы  $S4$  и  $S5$ . Сравнение проводилось по времени решения задачи пакетом прикладных программ.

Для проведения эксперимента разработана программа на языке C++. Модели вносились в программу при помощи языка Math-Prog из пакета GNU Linear Programming Kit. Для хранения входных данных и результатов запусков использовалась база данных на основе СУБД MySQL.

Для решения задач ЦЛП вызывались программы из пакета IBM ILOG CPLEX, реализующие алгоритмы поиска оптимального решения.

Эксперимент проводился на компьютере с двухядерным процессором Intel Pentium P6200 с тактовой частотой 2,13 ГГц под управлением ОС Windows 7 (32bit). При подсчёте времени решения задачи учитывалось процессорное время, т. е. время, которое процессор тратил непосредственно на решение задачи.

Обозначим следующим образом ЦЛП-модели, построенные в предыдущих разделах:  $M$  — полиэдр  $M_d$  с целевой функцией (10) и дополнительными ограничениями  $S1$ ,  $S2$  и  $S3$ ,  $M^*$  — модель  $M$  с дополнительными ограничениями  $S4$  и  $S5$ .

В ходе эксперимента генерировались серии задач с предварительно заданными значениями параметров  $n$  и  $p$ . Параметры  $\omega_i$  выбирались случайным образом из интервала от 1 до 100. Значения  $r_i$  выбирались так, что для каждой задачи  $d_{\min} = pn$ .



Сгенерированные задачи запускались поочерёдно на различных моделях. Задача считалась нерешённой, если время решения превышало 60 минут.

В табл. 1 представлены результаты запусков решения задач  $M$  и  $M^*$  при различных входных данных. Число требований  $n$  менялось от 10 до 140, время обработки  $p$  равно 3 и 5. Для каждой модели и набора параметров  $n$  и  $p$  в таблице дано среднее время нахождения значения целевой функции в секундах.

Т а б л и ц а 1

Результаты запусков решения задач  $M$  и  $M^*$  на различных входных данных

$n$	$p$	$M$ (сек)	$M^*$ (сек)
10	3	0.10	0.07
10	5	0.41	0.20
15	3	1.05	0.66
15	5	1.59	1.01
20	3	3.91	2.53
20	5	11.24	8.47
30	3	9.30	6.06
30	5	156.34	90.87
40	3	63.19	40.15
40	5	206.27	132.12
50	3	74.27	51.27
50	5	308.27	212.15
60	3	232.66	161.85
60	5	630.14	358.77
70	3	705.45	435.65
70	5	1153.22	501.44
80	3	1513.57	804.10
80	5	1836.08	1052.7
90	3	1974.15	1355.17
90	5	2413.71	1732.23
100	3	2965.54	1971.32
100	5	3318.12	2292.67
110	3	3543.83	2443.76
110	5	—	2602.89
120	3	—	2780.63
120	5	—	2984.74
130	3	—	3167.11
130	5	—	3351.47
140	3	—	3570.20
140	5	—	—

Для каждого  $n$  было решено 25 задач с различными параметрами  $p, r_i, \omega_i$ . На рис. 4 представлено сравнение моделей  $M$  и  $M^*$  по среднему времени решения. По горизонтальной оси отложены значения  $n$ , по вертикальной — среднее время решения. Нетрудно видеть, что при больших  $n$  разрыв во времени решения увеличивается.

Таким образом, построенная в данной работе модель  $M^*$  при равных входных параметрах ( $n$  и  $p$ ) существенно превосходит модель  $M$  по времени решения. Кроме того, использование модели  $M^*$  позволяет за то же время решать задачи большей размерности в сравнении с моделью  $M$ .

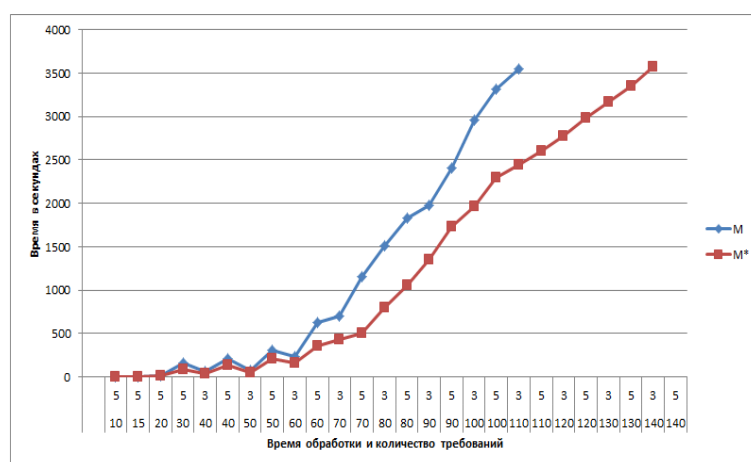


Рис. 4. Сравнение моделей  $M$  и  $M^*$  по среднему времени решения

## ЛИТЕРАТУРА

1. Баптист Ф., Карлье Ж., Керан М., Кононов А. В., Севастьянов С. В., Свириденко М. И. Структурные свойства оптимальных расписаний с прерыванием операций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 1. С. 3–36.
2. Лазарев А. А., Кварацхелия А. Г. Свойства оптимальных расписаний задачи теории расписаний минимизации суммарного взвешенного момента окончания для одного прибора // Автоматика и телемеханика. 2010. № 10. С. 80–89.
3. Симанчѳв Р. Ю., Шерешик Н. Ю. Схема дихотомии для поиска минимального директивного срока в задаче обслуживания различных требований одним прибором // Вестн. ОмГУ. 2013. № 2. С. 48–50.
4. Симанчѳв Р. Ю., Шерешик Н. Ю. Целочисленные модели задачи обслуживания требований одним прибором с прерываниями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 4. С. 89–101.

5. **Bouma W. H., Goldengorin B.** A polytime algorithm based on a primal LP model for scheduling problem  $1|pmtn; p_i = 2; r_i| \sum \omega_i C_i$  // Recent Advances in Applied Mathematics. Proc. Amer. Conf. Appl. Math. (AMERICAN-MATH'10). (Cambridge, MA, Jan. 27–29, 2010). Athens: WSEAS Press, 2010. P. 415–420.
6. **Brucker P., Knust S.** Complexity results for scheduling problems // <http://www.informatik.uni-osnabrueck.de/knust/class/>. Accessed Oct. 13, 2015.

*Шерешик Николай Юрьевич*

Статья поступила  
11 апреля 2015 г.

Исправленный вариант —  
16 августа 2015 г.

DISKRETNYYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII  
November–December 2015. Volume 22, No. 6. P. 78–90

UDC 519.1

DOI: 10.17377/daio.2015.22.486

RELAXATIONS FOR THE POLYHEDRON OF OPTIMAL SCHEDULES  
FOR THE PROBLEM OF INTERRUPT-ORIENTED  
SERVICE OF JOBS WITH A SINGLE MACHINE

N. Yu. Shereshik<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Omsk State University,  
55-a Mir Ave., 644077 Omsk, Russia  
e-mail: m-m\_pikm@mail.ru

**Abstract.** We consider the problem of minimizing the total service time of different jobs from one device preemption. We construct two classes of hyperplanes containing polyhedron of optimal schedules for this problem and describe computer experiments. Ill. 4, tab. 1, bibliogr. 6.

**Keywords:** scheduling theory, integer programming model, polytope, polyhedron, valid inequality, relaxation.

REFERENCES

1. Ph. Baptiste, J. Carlier, A. V. Kononov, M. Queyranne, S. V. Sevastyanov, and M. I. Sviridenko, Structural properties of optimal schedules with preemption, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **16**, No. 1, 3–36, 2009. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **4**, No. 4, 455–474, 2010.
2. A. A. Lazarev and A. G. Kvaratskhelia, Properties of optimal schedules for the minimization total weighted completion time in preemptive equal-length job with release dates scheduling problem on a single machine, *Avtom. Telemekh.*, No. 10, 80–89, 2010. Translated in *Autom. Remote Control*, **71**, No. 10, 2085–2092, 2010.
3. R. Yu. Simanchev and N. Yu. Shereshik, Use of dichotomy scheme for minimum directive algorithm in various requirements satisfaction by single machine, *Vestn. Omsk. Univ.*, No. 2, 48–50, 2013.
4. R. Yu. Simanchev and N. Yu. Shereshik, Integer models for the interrupt-oriented services of jobs by single machine, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **21**, No. 4, 89–101, 2014.
5. H. W. Bouma and B. Goldengorin, A polytime algorithm based on a primal LP model for the scheduling problem  $1|pmtn; p_i = 2; r_i| \sum \omega_i C_i$ , in *Recent Advances in Applied Mathematics (Proc. 2010 Am. Conf. Appl. Math., Cambridge, USA, Jan. 27–29, 2010)*, pp. 415–420, WSEAS Press, Stevens Point, USA, 2010.

**6. P. Brucker** and **S. Knust**, Complexity results for scheduling problems, Available at <http://www.informatik.uni-osnabrueck.de/knust/class/>. Accessed Oct. 13, 2015.

*Nikolay Yu. Shereshik*

Received

11 April 2015

Revised

16 August 2015