ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2015. Том 22, № 6. С. 29–42

УДК 519.176 DOI: 10.17377/daio.2015.22.509

ПОИСК РЕКОРДНЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА *)

Э. А. Монахова[1], *О. Г. Монахов*[1]
[1]Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН, пр. Лаврентьева, 6,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: emilia@rav.sscc.ru

Аннотация. Рассматривается решение задачи построения больших неориентированных циркулянтных графов (сетей) с заданными степенью и диаметром. Разработан генетический алгоритм синтеза больших циркулянтных графов, и его параллельная версия реализована на суперкомпьютерных системах. Реализованный алгоритм нашёл 28 новых больших циркулянтных графов, порядки которых превосходят порядки самых больших известных циркулянтов из таблицы рекордных (Δ/D)-циркулянтов для степеней $12\leqslant\Delta\leqslant16$ и диаметров $4 \leqslant D \leqslant 10$. Табл. 2, библиогр. 29.

Ключевые слова: неориентированный циркулянтный граф, задача Δ/D, оптимизация сетей связи, генетический алгоритм.

Введение и основные определения

Известная задача Δ/D (или задача Degree/Diameter), сформулированная Элспасом в 1964 г. [11], является одной из основных теоретических проблем в сетевом проектировании больших суперкомпьютерных систем. В общей формулировке задача Δ/D заключается в нахождении максимально возможного числа вершин графа максимальной степени Δ и диаметра D. Верхняя граница порядка графа называется *границей Мура.* Существует несколько графов, достигающих её: для $D = 1$ и $\Delta \geqslant 1$ (полные графы с $\Delta + 1$ вершинами), для $D \geqslant 2$ и $\Delta = 2$ (циклы с $2D + 1$ вершинами), для $D = 2$ и $\Delta = 2, 3, 7$. Многие авторы внесли вклад в постоянное обновление таблицы (Δ/D)-рекордных графов [26], содержащей самые большие известные графы общего вида для степеней $\Delta \leqslant 15$

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14–01–00031).

и диаметров $D \leqslant 10$. В последние годы ведётся интенсивный поиск решений задачи Δ/D для ограниченных классов графов, представляющих практический интерес при проектировании суперкомпьютерных систем, таких как графы Кэли (см. обзоры в [19, 24]), двудольные, планарные и вершинно-транзитивные графы.

В данной работе исследуется построение самых больших возможных графов в классе циркулянтов, т. е. графов Кэли абелевых групп. Изучение циркулянтных графов началось в [12]. Ванг и Копперсмит [28] применили циркулянтные графы в качестве структур многомодульной высокоскоростной памяти компьютерных систем. Они поставили задачу нахождения циркулянтов с оптимальными структурными характеристиками. В настоящее время циркулянтные графы (сети) используются в проектировании и анализе топологий для компьютерных сетей и систем с массовым параллелизмом, в теории кодирования, в модели «малого мира», клеточных нейронных и оптических сетях (см., например, обзоры [4, 21]).

Дадим определение циркулянта. Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_k$, n — целые числа такие, что $1 \leqslant s_1 < s_2 < \cdots < s_k < n$. Неориентированный граф C с множествами вершин $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и рёбер $E = \{\{i, j\} \mid i - j \equiv s_m \pmod{n},\ m = \overline{1, k}\}$ называется *циркулянтным.* Другими словами циркулянтный граф есть граф Кэли, чья матрица смежности — циркулянт. Элементы порождающего множества $S = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ называются *образующими.* Параметрическое описание вида $(n; S)$ полностью определяет циркулянт *порядка* n и *размерности* k. Циркулянтный граф $C(n; S)$ связен, если и только если НОД$(s_1, s_2, \ldots, s_k, n) = 1$. Если НОД$(n, t) = 1$, то $C(n; S)$ эквивалентен (и соответственно изоморфен) графу $C(n; tS)$, где умножение берётся по модулю n. Будучи графом Кэли, $C(n; S)$ является вершинно-транзитивным графом. Из симметрии циркулянтов следует изоморфизм циркулянтов вида $C(n; s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_k)$ и $C(n; s_1, \ldots, n - s_i, \ldots, s_k)$. Это свойство позволяет в дальнейшем ограничить значения образующих величиной $\lfloor n/2 \rfloor$. Из определения циркулянта вытекает следующая связь между его степенью и размерностью: степень циркулянта $\Delta = 2k$, если $s_k \neq n/2$, и $\Delta = 2k - 1$, если $s_k = n/2$ в случае чётного n. В настоящей работе нас интересуют только неориентированные циркулянты. В литературе также изучается их ориентированный вариант (см., например, [7, 15]).

Важной характеристикой графа является диаметр (оценивает максимальную задержку при передаче информации в сети). *Диаметром* графа C называется величина $D(C(n; S)) = \max\limits_{i,j \in V} d(i, j)$, где $d(i, j)$ — длина

кратчайшего пути между вершинами i и j в C.

Пусть $M(\Delta, D)$ означает число вершин самого большого графа Кэли абелевой группы со степенью Δ и диаметром D. Исследование циркулянтных графов как важного класса графов Кэли даёт значительный вклад при поиске нижних границ функции $M(\Delta, D)$.

Пусть $N(\Delta, D)$ — число вершин самого большого возможного циркулянтного графа степени Δ и диаметра D. В [1, 29] доказано, что если $\Delta = 2k$ и $D > 0$, то

$$N(\Delta, D) \leqslant M(\Delta, D) = \sum_{i=0}^{k} 2^{k-i} C_k^i C_D^{k-i}.$$

Приведём вид экстремальной функции $M(\Delta, D)$ для $\Delta = 2k$ и $1 \leqslant k \leqslant 4$: $M(2, D) = 2D + 1$, $M(4, D) = 2D^2 + 2D + 1$, $M(6, D) = \frac{4}{3}D^3 + 2D^2 + \frac{8}{3}D + 1$, $M(8, D) = \frac{2}{3}D^4 + \frac{4}{3}D^3 + \frac{10}{3}D^2 + \frac{8}{3}D + 1$.

Если $\Delta = 2k + 1$ и $D > 0$, то имеем [23]

$$N(\Delta, D) \leqslant M(\Delta, D) = \sum_{i=0}^{k} 2^i C_k^i \bigl\{C_D^i + C_{D-1}^i\bigr\}.$$

Следующие наиболее изучаемые проблемы комбинаторной оптимизации для циркулянтных графов рассматривались многими авторами [4, 7, 15, 21, 24]:

(i) найти *оптимальные* графы с минимально возможным диаметром при заданной степени для любого порядка n;

(ii) найти большие циркулянтные графы с порядком, близким, насколько возможно, к теоретической верхней границе.

Вторая проблема относится к задаче Δ/D в классе циркулянтов, и её исследованию посвящён разд. 1.

1. Решение задачи Δ/D для класса циркулянтов

Приведём обзор известных результатов по решению задачи Δ/D для класса неориентированных циркулянтов.

Для степени 4 точные значения $N(4, D) = 2D^2 + 2D + 1$, совпадающие с теоретической верхней границей $M(4, D)$, и соответствующее множество образующих $S = (1, 2D + 1)$ для любых $D \geqslant 2$ получены в [2].

Для степени 6 в [20] и независимо в [10] для графов Кэли абелевых групп получен следующий результат: максимальный порядок сети

$C(n; 1, s_2, s_3)$ с диаметром $D \geqslant 1$ равен

$$N(6, D) = \begin{cases} 32[D/3]^3 + 16[D/3]^2 + 2D + 1, & \text{если } D \equiv 0(\mathrm{mod} 3), \\ 32\lfloor D/3 \rfloor^3 + 48\lfloor D/3 \rfloor^2 + 30\lfloor D/3 \rfloor + 7, & \text{если } D \equiv 1(\mathrm{mod} 3), \\ 32\lfloor D/3 \rfloor^3 + 80\lfloor D/3 \rfloor^2 + 70\lfloor D/3 \rfloor + 21, & \text{если } D \equiv 2(\mathrm{mod} 3). \end{cases}$$

Для степени 8 хорошие оценки для функции $N(8, D)$ аналитически найдены в [5] и улучшены с помощью компьютерного поиска в [16], где рассмотрены также экстремальные циркулянты нечётной степени $\Delta = 9$.

В [9] авторы аналитически нашли семейство (больших) циркулянтов чётной степени для любых $D \geqslant k \geqslant 3$:

$$N(\Delta, D) \geqslant n = 2q \sum_{i=0}^{k-1} (4q)^i = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{k} \right)^k D^k + \mathrm{O}(D^{k-1}),$$

где $q = \lfloor (D - k + 3)/k \rfloor$, $k = \Delta/2$. В [3, 10] нижние оценки для функции $N(\Delta, D)$ улучшены по сравнению с [9] для всех чётных степеней: в [3] — при $\Delta > 8$ и $D \geqslant \Delta/2 + \lfloor \Delta/8 \rfloor$, в [10] — при $D \geqslant \lfloor \Delta/4 \rfloor$ (на основе конструирования семейств экстремальных графов Кэли абелевых групп).

Заметим, что если параметр D фиксирован, то очень сложно получить хорошие оценки для $N(\Delta, D)$, используя построение аналитических семейств циркулянтов (см., например, [18] для графов Кэли абелевых групп диаметра два). В [17] для циркулянтов диаметра два найдены экстремальные решения вплоть до степени $\Delta = 23$ с помощью исчерпывающего компьютерного поиска до соответствующих верхних границ. Автор [17] отмечает, что полученные результаты указывают в пользу предположения, что асимптотическое значение квадратичного коэффициента функции $N(\Delta, 2)$ есть $3/8$.

В [13] представлена таблица, содержащая свод самых больших известных циркулянтных графов, найденных в литературе для ряда величин степеней и диаметров. В [14] она расширена до значений $\Delta \leqslant 16$ и $D \leqslant 10$. Эта таблица рекордных (Δ/D)-циркулянтов включает вышеперечисленные аналитические результаты для степеней $\Delta = 4, 6$ и 8, а также результаты для нечётных степеней, найденные в [10, 14, 16]. Для заполнения части таблицы авторы [14] использовали алгоритм сокращённого поиска больших циркулянтов с заданными параметрами и метод комбинации указанного алгоритма с декартовым произведением найденных графов.

В настоящее время таблица рекордных (Δ/D)-циркулянтных графов представлена в Интернете [27] и доступна для обновления. Недавно в [8]

авторы улучшили некоторые значения таблицы, используя компьютерный поиск и метод построения большого циркулянтного графа из двух меньшего размера.

В настоящей работе разработаны генетические (последовательный и параллельный) алгоритмы синтеза больших циркулянтных графов. Реализация полученных алгоритмов сделала возможным улучшить порядки 28 циркулянтов из обновленной (на 16.06.2015 [8]) таблицы рекордных (Δ/D)-циркулянтов степеней $\Delta = 12, \dots, 16$ и диаметров $D = 4, \dots, 10$. Таким образом, наши результаты превосходят порядки соответствующих графов, найденных в [8, 14].

2. Алгоритм синтеза больших циркулянтов

Чтобы решить проблему синтеза графов с экстремальными свойствами, разработан генетический алгоритм, основанный на принципе моделирования эволюционного процесса в природе, который успешно использовался для решения ряда задач комбинаторной оптимизации [25]. Генетические алгоритмы основаны на моделировании выживания сильнейшего в популяции индивидуумов, каждый из которых представляет точку в пространстве решений оптимизационной задачи.

Рассмотрим генетический алгоритм синтеза циркулянтных графов, разработанный на основе алгоритма из [22] с соответствующей модификацией целевой функции и генетических операторов.

Целью данного алгоритма является нахождение множества образующих $S = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ циркулянтного графа с заданными значениями порядка n, диаметра D и размерности k. В этом случае для заданных диаметра D и размерности k число вершин n циркулянтного графа выбирается как самое большое возможное значение из множества допустимых значений от числа вершин самых больших известных циркулянтов из таблицы [27] до точной верхней границы $M(\Delta, D)$.

Целевая функция $F(S) = N_D - (n - 1)$ оценивает степень приближения N_D (суммы числа вершин тестируемого циркулянтного графа на всех расстояниях от 1 до D для любой выбранной вершины) к величине $n - 1$. Если $F(S) = 0$, то диаметр графа с множеством образующих S равен D. Такой подход уменьшает время вычисления целевой функции и позволяет избежать определения точного диаметра каждого графа в популяции (заметим, что выбор начальной вершины не влияет на результаты алгоритма вычисления целевой функции).

Зададим начальную популяцию, состоящую из M произвольных случайно выбранных графов (множеств образующих). Затем будем приме-

нять генетические операторы мутации, кроссовера и селекции к данной популяции.

Мутация. Каждая образующая графа независимо от остальных замещается с вероятностью $p_m \in [0,1]$ случайным числом от 1 до $\lfloor n/2 \rfloor$.

Кроссовер. Из популяции, состоящей из M графов (множеств образующих), M раз выбираются произвольные пары, и с вероятностью $p_c \in [0,1]$ к данной паре применяется операция кроссовера: данная пара множеств образующих делится в произвольной позиции на две части, и производится их обмен (отметим, что с вероятностью $1 - p_c$ кроссовер к данной паре не применяется).

Селекция. Вычисляются целевые функции новых графов, полученных посредством мутации и кроссовера. Если они имеют целевые функции меньше, чем некоторые графы популяции, то «наихудшие» графы (с бóльшим значением целевой функции) в популяции замещаются новыми «наилучшими» (с меньшим значением целевой функции).

Для поиска оптимума заданной целевой функции $F(S)$ итерационный процесс вычислений в генетическом алгоритме организован следующим образом.

Первая итерация: порождение начальной популяции. Все особи (графы) популяции создаются с помощью случайного оператора, порождая значения образующих для каждого графа в начальной популяции, равномерно распределённые от 1 до $\lfloor n/2 \rfloor$, с последующим вычислением целевой функции.

Промежуточная итерация: шаг от текущей к следующей популяции. Основной шаг алгоритма состоит в создании нового поколения особей на основе текущей популяции с помощью операций мутации, кроссовера и селекции. На каждой итерации происходит M (величина популяции) попыток выбора пар особей, к которым применяются операции кроссовера (с вероятностью p_c), мутации и селекции.

Последняя итерация (критерий остановки): алгоритм завершается, когда найден граф с $F(S) = 0$, или после заданного числа итераций (генераций) T.

Параллельная версия генетического алгоритма использует метод распараллеливания по данным на основе схемы «мастер-рабочие». В параллельной версии данного алгоритма целая популяция (множество описаний, порождающих графы для заданных n, k, D) делится на подпопуляции, каждая из которых пересылается процессом-мастером процессу-рабочему на соответствующий процессор (ядро) параллельной системы. Эволюционные процессы исполняются независимо процессами-рабочими,

и после их завершения результаты пересылаются процессу-мастеру, который выполняет выбор лучших значений целевой функции. Используются следующие значения параметров генетического алгоритма: величина популяции $M = 1000$, вероятность мутации $p_m = 0.15$, вероятность кроссовера $p_c = 0.7$, предел числа итераций $T = 2000$.

Параллельный генетический алгоритм реализован на ресурсах Сибирского Суперкомпьютерного центра СО РАН и Суперкомпьютерного центра НГУ. Эксперименты выполнялись на кластерах из четырёхъядерных процессоров Intel Xeon E5540, 2.53 Ггц (Nehalem) и на кластерах из шестиядерных процессоров Intel Xeon X5670, 2.93 GHz (Westmere), общее число используемых ядер изменялось от 2 до 72. Программа написана на языке Си с использованием библиотек параллельного программирования OpenMP и MPI. Временные затраты в экспериментах лежат в диапазоне от нескольких десятков минут (например, для $n = 4551,\ D = 5,\ \Delta = 16$ время исполнения алгоритма на 32 ядрах составляло 30 мин.) до нескольких часов (например, для $n = 279200,\ D = 10,\ \Delta = 16$ время исполнения алгоритма на 36 ядрах составляло 526 мин.). Получено линейное ускорение с отношением эффективности 0.93, когда число используемых ядер меняется от 2 до 72.

3. Новые результаты

Таблица 1

Порядки новых больших циркулянтных графов

Δ/D	3	4	5	6	7	8	9	10
12	275 377 73%	819 1289 64%	2040 3653 56%	**3910** 8989 43%	**8010** 19825 40%	**14920** 40081 37%	**27580** 75517 37%	**47660** 134245 36%
13	312 462 68%	970 1666 58%	2548 4942 52%	**4800** 12642 38%	**10000** 28814 35%	**20000** 59906 33%	**37000** 115598 32%	**66000** 209762 31%
14	381 575 66%	1165 2241 52%	3201 7183 45%	**7000** 19825 35%	**15790** 48639 32%	**33900** 108545 31%	**65216** 224143 29%	**119550** 433905 28%
15	448 688 65%	1344 2816 48%	**3500** 9424 37%	**8800** 27008 33%	**20000** 68464 29%	**44000** 157184 28%	**88000** 332688 26%	**167000** 658048 25%
16	505 833 61%	**1520** 3649 42%	**4551** 13073 35%	**12090** 40081 30%	**29725** 108545 27%	**67900** 265729 26%	**140700** 598417 24%	**279200** 1256465 22%

В табл. 1 представлены порядки новых циркулянтных графов (вы-

делены жирным шрифтом). Эти графы найдены с использованием разработанного выше метода, который позволил улучшить порядки соответствующих графов из таблицы рекордных (Δ/D)-циркулянтов [27]. Каждая ячейка табл. 1 содержит три элемента: порядок найденного графа (верхнее число), значение экстремальной функции $M(\Delta, D)$ (среднее число) и достигнутый процент от верхней границы (нижнее число). Улучшение порядков найденных графов составляет до 18.6 процентов по сравнению с данными из [27] (отметим, что сейчас эта таблица [27] уже обновлена в сети на основе полученных в настоящей статье данных).

Таблица 2

Новые циркулянтные графы

Δ	D	n (порядок)	$s_1, s_2, \ldots, s_k$ (образующие)
12	6	3910 *	97, 142, 280, 507, 977, 1370
12	7	8010	108, 715, 1287, 1975, 2227, 3252
12	8	14920	2334, 4645, 5122, 5193, 6443, 7178
12	9	27580	572, 2058, 4001, 4665, 5478, 12776
12	10	47660	561, 917, 7937, 11346, 11935, 19174
13	6	4800	14, 733, 735, 1851, 2160, 2323, 2400
13	7	10000	110, 1502, 2260, 3002, 3433, 3627, 5000
13	8	20000	47, 2364, 3159, 4826, 8455, 9990, 10000
13	9	37000	2149, 5670, 5730, 6538, 9419, 14870, 18500
13	10	66000	9219, 14105, 20115, 21559, 26136, 29407, 33000
14	6	7000	148, 1474, 1766, 2437, 2814, 2815, 3328
14	7	15790	623, 1882, 2360, 3655, 4568, 5747, 6469
14	8	33900	1516, 3143, 5689, 8758, 11643, 12380, 12706
14	9	65216	8851, 11618, 12593, 14842, 17715, 30898, 31286
14	10	119550	621, 7002, 9342, 28360, 33067, 43754, 57540
15	5	3500	158, 698, 701, 1270, 1277, 1351, 1456, 1750
15	6	8800	80, 1418, 1523, 1663, 2317, 2700, 3504, 4400
15	7	20000	1376, 3547, 5888, 6036, 6792, 9391, 9499, 10000
15	8	44000	3290, 7623, 8054, 15822, 17081, 21045, 21052, 22000
15	9	88000	2876, 8355, 13640, 14549, 22031, 24750, 31399, 44000
15	10	167000	1122, 4988, 13109, 18355, 19415, 27862, 30263, 83500
16	4	1520 *	1, 24, 94, 309, 419, 441, 519, 625
16	5	4551 *	119, 726, 728, 781, 993, 1069, 1504, 1434
16	6	12090	124, 2916, 3323, 3381, 3502, 4472, 4716, 5878
16	7	29725	1929, 4725, 4920, 5962, 6702, 7656, 9273, 11513
16	8	67900	3940, 4291, 7900, 9362, 16398, 17457, 21334, 25951
16	9	140700	509, 10927, 11619, 19322, 20613, 23337, 48310, 59467
16	10	279200	28996, 54352, 55556, 72991, 86096, 88565, 99071, 131280

В табл. 2 приведены порядки и соответствующие множества образующих для новых циркулянтов из табл. 1. Здесь дано только одно из множеств эквивалентных описаний образующих для каждого порядка. Символом $*$ отмечены графы, диаметры которых совпадают с точной нижней границей.

Замечание к таблице рекордных (Δ/D)-циркулянтных графов. Таблица рекордных (Δ/D)-циркулянтов [27] сопровождается указанием авторов найденных графов. Следует отметить, что следующие экстремальные графы впервые найдены Э. А. Монаховой: 1) для $\Delta = 4$ и любого $D \geqslant 2$ [2]; 2) для $\Delta = 6$ и любого $D \geqslant 2$ [20]; 3) для $D = 2$ и всех чётных степеней Δ для $4 \leqslant \Delta \leqslant 16$ [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Корнеев В. В.** О макроструктуре однородных вычислительных систем // Вычисл. системы. 1974. Вып. 60. С. 17–34.
2. **Монахова Э. А.** Синтез оптимальных диофантовых структур // Вычисл. системы. 1979. Вып. 80. С. 18–35.
3. **Монахова Э. А.** Об одном экстремальном семействе циркулянтных сетей // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 1. С. 77–84.
4. **Монахова Э. А.** Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикл. дискрет. математика. 2011. № 3. С. 92–115.
5. **Монахова Э. А.** Новая достижимая нижняя оценка числа вершин в циркулянтных сетях размерности четыре // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 1. С. 37–44.
6. **Монахова Э. А.** О построении многомерных циркулянтных графов диаметра два // Изв. Томск. политехн. ун-та. 2013. Т. 323, № 2. С. 25–28.
7. **Bermond J. C., Comellas F., Hsu D. F.** Distributed loop computer-networks: a survey // J. Parallel Distrib. Comput. 1995. Vol. 24, No. 1. P. 2–10.
8. **Bevan D., Erskine G., Lewis R.** Large circulant graphs of fixed diameter and arbitrary degree // arXiv:1506.04962v1 [math.CO].
9. **Chen S., Jia X.-D.** Undirected loop networks // Networks. 1993. Vol. 23, No. 4. P. 257–260.
10. **Dougherty R., Faber V.** The degree-diameter problem for several varieties of Cayley graphs. I: The Abelian case // SIAM J. Discrete Math. 2004. Vol. 17, No. 3. P. 478–519.
11. **Elspas B.** Topological constraints on interconnection-limited logic // Proc. 5th Annu. Symp. Switching Circuit Theory and Logic Design (Princeton, NJ, USA, Nov. 11–13, 1964). New York: IEEE, 1964. P. 133–147.
12. **Elspas B., Turner J.** Graphs with circulant adjacency matrices // J. Comb. Theory. 1970. Vol. 9, No. 3. P. 297–307.
13. **Feria-Purón R., Ryan J., Pérez-Rosés H.** Searching for large multi-loop networks // Electron. Notes Discrete Math. 2014. Vol. 46. P. 233–240.

14. **Feria-Purón R., Pérez-Rosés H., Ryan J.** Searching for large circulant graphs // arXiv:1503.07357v1 [math.CO].
15. **Hwang F. K.** A survey on multi-loop networks // Theor. Comput. Sci. 2003. Vol. 299, No. 1–3. P. 107–121.
16. **Lewis R. R.** The degree-diameter problem for circulant graphs of degree 8 and 9 // Electron. J. Comb. 2014. Vol. 24, No. 4. P. 1–19.
17. **Lewis R. R.** Improved upper bounds for the order of some classes of Abelian Cayley and circulant graphs of diameter two // arXiv:1506.02844v1 [math.CO].
18. **Macbeth H., Šiagiová J., Širáň J.** Cayley graphs of given degree and diameter for cyclic, Abelian, and metacyclic groups // Discrete Math. 2012. Vol. 312, No. 1. P. 94–99.
19. **Miller M., Širáň J.** Moore graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem // Electron. J. Comb., Dyn. Surv. 2005. Vol. DS14. P. 1–61.
20. **Monakhova E.** Optimal triple loop networks with given transmission delay: Topological design and routing // Proc. Int. Network Optimization Conf. (INOC'2003) (Èvry/Paris, France, Oct. 27–29, 2003). Paris: INT, 2003. P. 410–415.
21. **Monakhova E. A.** A survey on undirected circulant graphs // Discrete Math., Algorithms Appl. 2012. Vol. 4, No. 1. 1250002. P. 1–30.
22. **Monakhova E. A., Monakhov O. G., Mukhoed E. V.** Genetic construction of optimal circulant network designs // Proc. 1st Eur. Workshops EvoIASP'99 and EuroEcTel'99 (Göteborg, Sweden, May 26–27, 1999). Heidelberg: Springer-Verl., 1999. P. 215–223. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 1596).
23. **Muga II F. P.** Maximal order of 3- and 5-regular circulant graphs // Matimyás Mat. 1999. Vol. 22, No. 3. P. 33–38.
24. **Pérez-Rosés H.** Algebraic and computer-based methods in the undirected degree/diameter problem — A brief survey // Electron. J. Graph Theory Appl. 2014. Vol. 2, No. 2. P. 166–190.
25. **Reeves C. R.** Genetic algorithms for the operations researcher// INFORMS J. Comput. 1997. Vol. 9, No. 3. P. 231–250.
26. The Degree/Diameter Problem // http://combinatoricswiki.org/wiki/The_Degree/Diameter_Problem.
27. The Degree/Diameter Problem For Circulant Graphs // http://combinatorics wiki.org/wiki/The_Degree_Diameter_Problem_for _Circulant_Graphs.
28. **Wong C. K., Coppersmith D.** A combinatorial problem related to multimodule memory organizations // J. Assoc. Comput. Mach. 1974. Vol. 21, No. 3. P. 392–402.

29. **Wong C. K., Maddocks T. W.** A generalized Pascal's triangle // Fibonacci Quart. 1975. Vol. 13. P. 134–136.

Монахова Эмилия Анатольевна,

Монахов Олег Геннадьевич

Статья поступила
8 сентября 2015 г.

Исправленный вариант —
12 октября 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
November–December 2015. Volume 22, No. 6. P. 29–42

UDC 519.176 DOI: 10.17377/daio.2015.22.509

SEARCHING FOR RECORD CIRCULANT GRAPHS
USING A PARALLEL GENETIC ALGORITHM

E. A. Monakhova[1], *O. G. Monakhov*[1]
[1]Institute of Computational Mathematics
and Mathematical Geophysics SB RAS,
6 Lavrentiev Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
e-mail: emilia@rav.sscc.ru

Abstract. We consider the Degree/Diameter problem for circulants — the problem of constructing large undirected circulant graphs (networks) with given degree and diameter. We develop a genetic algorithm for synthesis of large circulant graphs and implement its parallel version by supercomputer systems. The algorithm has found 28 new large circulant graphs which orders are better than the largest of the current known circulants from the record (Δ/D)-circulant graphs table for degrees $12 \leqslant \Delta \leqslant 16$ and diameters $4 \leqslant D \leqslant 10$. Tab. 2, bibliogr. 29.

Keywords: undirected circulant graph, Degree/Diameter problem, network design, genetic algorithm.

REFERENCES

1. **V. V. Korneev,** About macrostructure of homogeneous computing systems, in *Vychislitel'nye sistemy* (Computing Systems), Vol. 60, pp. 17–34, Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1974.
2. **E. A. Monakhova,** Synthesis of optimal Diophantine structures, in *Vychislitel'nye sistemy* (Computing Systems), Vol. 80, pp. 18–35, Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1979.
3. **E. A. Monakhova,** On an extremal family of circulant networks, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **18**, No. 1, 77–84, 2011. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **5**, No. 4, 595–600, 2011.
4. **E. A. Monakhova,** Structural and communicative properties of circulant networks, *Prikl. Diskretn. Mat.,* No. 3, 92–115, 2011.
5. **E. A. Monakhova,** A new attainable lower bound on the number of nodes in quadruple circulant networks, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **20**, No. 1, 37–44, 2013.
6. **E. A. Monakhova,** On synthesis of multidimensional circulant graphs of diameter two, *Izv. TPU,* **323**, No. 2, 25–28, 2013.

7. **J. C. Bermond, F. Comellas,** and **D. F. Hsu,** Distributed loop computer-networks: A survey, *J. Parallel Distrib. Comput.*, **24**, No. 1, 2–10, 1995.
8. **D. Bevan, G. Erskine,** and **R. Lewis,** Large circulant graphs of fixed diameter and arbitrary degree, 2015 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1506.04962).
9. **S. Chen** and **X.-D. Jia,** Undirected loop networks, *Networks,* **23**, No. 4, 257–260, 1993.
10. **R. Dougherty** and **V. Faber,** The degree-diameter problem for several varieties of Cayley graphs I: The Abelian case, *SIAM J. Discrete Math.,* **17**, No. 3, 478–519, 2004.
11. **B. Elspas**, Topological constraints on interconnection-limited logic, *Proc. 5th Annu. Symp. Switch. Circuit Theory Log. Des., Princeton, NJ, USA, Nov. 11–13, 1964,* pp. 133–137, IEEE, New York, 1964.
12. **B. Elspas** and **J. Turner,** Graphs with circulant adjacency matrices, *J. Comb. Theory,* **9**, No. 3, 297–307, 1970.
13. **R. Feria-Purón, J. Ryan,** and **H. Pérez-Rosés,** Searching for large multi-loop networks, *Electron. Notes Discrete Math.,* **46**, 233–240, 2014.
14. **R. Feria-Purón, H. Pérez-Rosés,** and **J. Ryan,** Searching for large circulant graphs, 2015 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1503.07357).
15. **F. K. Hwang,** A survey on multi-loop networks, *Theor. Comput. Sci.,* **299**, No. 1–3, 107–121, 2003.
16. **R. R. Lewis,** The degree-diameter problem for circulant graphs of degree 8 and 9, *Electron. J. Comb.,* **24**, No. 4, P4.50, 1–19, 2014.
17. **R. R. Lewis,** Improved upper bounds for the order of some classes of Abelian Cayley and circulant graphs of diameter two, 2015 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1506.02844).
18. **H. Macbeth, J. Šiagiová,** and **J. Širáň,** Cayley graphs of given degree and diameter for cyclic, Abelian, and metacyclic groups, *Discrete Math.,* **312**, No. 1, 94–99, 2012.
19. **M. Miller** and **J. Širáň,** Moore graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem, *Electron. J. Comb., Dyn. Surv.,* DS14, 1–61, 2005.
20. **E. A. Monakhova,** Optimal triple loop networks with given transmission delay: Topological design and routing, *Proc. Int. Network Optim. Conf., Évry/Paris, France, Oct. 27–29, 2003,* pp. 410–415, INT, Paris, 2003.
21. **E. A. Monakhova,** A survey on undirected circulant graphs, *Discrete Math. Algorithms Appl.,* **4**, No. 1, 1250002, 1–30, 2012.
22. **E. A. Monakhova, O. G. Monakhov,** and **E. V. Mukhoed,** Genetic construction of optimal circulant network designs, in *Evolutionary Image Analysis, Signal Processing and Telecommunications* (Proc. 1st Eur. Workshops EvoIASP'99 EuroEcTel'99, Göteborg, Sweden, May 26–27, 1999), pp. 215–223, Springer, Heidelberg, 1999 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 1596).
23. **F. P. Muga II,** Maximal order of 3- and 5-regular circulant graphs, *Matimyás Mat.,* **22**, No. 3, 33–38, 1999.

24. **H. Pérez-Rosés,** Algebraic and computer-based methods in the undirected degree/diameter problem — A brief survey, *Electron. J. Graph Theory Appl.,* **2**, No. 2, 166–190, 2014.
25. **C. R. Reeves,** Genetic algorithms for the operations researcher, *INFORMS J. Comput.,* **9**, No. 3, 231–250, 1997.
26. The Degree/Diameter Problem, in *Combinatorics Wiki.* Available at http://combinatoricswiki.org/wiki/The_Degree/Diameter_Problem. Accessed Nov. 2, 2015.
27. The Degree Diameter Problem for Circulant Graphs. in *Combinatorics Wiki.* Available at http://combinatoricswiki.org/wiki/The_Degree_Diameter_Problem_for_Circulant_Graphs. Accessed Nov. 2, 2015.
28. **C. K. Wong** and **Don Coppersmith,** A combinatorial problem related to multimodule memory organizations, *J. Assoc. Comput. Mach.,* **21**, No. 3, 392–402, 1974.
29. **C. K. Wong** and **T. W. Maddocks,** A generalized Pascal's triangle, *Fibonacci Q.,* **13**, 134–136, 1975.

Emilia A. Monakhova,
Oleg G. Monakhov

Received
8 September 2015
Revised
12 October 2015