ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2015. Том 22, № 6. С. 43–54

УДК 519.1+519.173 DOI: 10.17377/daio.2015.22.512

ВЕКТОР РАЗНООБРАЗИЯ ШАРОВ ТИПИЧНОГО ГРАФА МАЛОГО ДИАМЕТРА *)

Т. И. Федоряева[1,2]
[1]Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
[2] Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия
e-mail: tatiana.fedoryaeva@gmail.com

Аннотация. Изучаются векторы разнообразия шаров (i-я компонента вектора равна числу различных шаров радиуса i) для обыкновенных связных графов в асимптотике. Для графов малого диаметра исследовано асимптотическое поведение числа графов с полным разнообразием шаров. Вычислен вектор разнообразия шаров типичного графа заданного малого диаметра. Найдено асимптотически точное значение числа помеченных n-вершинных графов диаметра 3. Ил. 2, библиогр. 12.

Ключевые слова: граф, метрический шар, радиус шара, число шаров, вектор разнообразия шаров, типичный граф.

Введение, основные определения

В работе изучается разнообразие шаров обыкновенного графа в асимптотике. Пусть $\tau_i(G)$ — число всех различных шаров радиуса i в метрическом пространстве связного графа G с обычным расстоянием между вершинами, т. е. длиной кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины. Нетрудно заметить, что

$$\tau_0(G) = |V(G)| \geqslant \dots \geqslant \tau_i(G) \geqslant \tau_{i+1}(G) \geqslant \dots \geqslant \tau_d(G) = 1,$$

где $V(G)$ — множество вершин, $d = d(G) = \max\limits_{x,\, y \in V} \rho_G(x,y)$ — диаметр графа G и $\rho_G(x,y)$ — расстояние между вершинами $x, y \in V(G)$.

Определение 1 [5]. Вектор $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \dots, \tau_d(G))$ называется *вектором разнообразия шаров* графа G.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14–01–00507).

Среди всех графов естественным образом выделяются классы графов со специальным разнообразием шаров. Пусть $0 \leqslant t < d(G)$.

Определение 2 [1]. Граф G обладает *локальным t-разнообразием шаров*, если $|V(G)| = \tau_0(G) = \tau_1(G) = \dots = \tau_t(G)$. Граф G с локальным t-разнообразием шаров при $t = d(G) - 1$ называется графом *полного разнообразия шаров*.

Таким образом, вектор разнообразия шаров графа G с полным разнообразием шаров имеет вид $(|V(G)|, \dots, |V(G)|, 1)$. В [5] показано, что класс деревьев с полным разнообразием шаров бедный, так как состоит лишь из звезды $K_{1,n}$, и получена характеризация деревьев с локальным разнообразием шаров. Наименьший порядок графов диаметра d с локальным t-разнообразием шаров (полным разнообразием шаров) найден в [6], а в [8] явно описаны с точностью до изоморфизма все такие графы наименьшего порядка и вычислены их векторы разнообразия шаров. В [6] установлены все возможные значения параметров n, d и t, при которых существует n-вершинный граф диаметра d с полным разнообразием шаров (локальным t-разнообразием шаров). В [9] изучен вопрос единственности n-вершинного графа диаметра d с полным разнообразием шаров. Только при $n = 2d \geqslant 6$ или $d \leqslant 1$ существует единственный такой граф — $2d$-вершинный цикл при $d \geqslant 3$ и полный граф K_n при $d \leqslant 1$. На основе полученных точных верхних и нижних оценок числа различных шаров радиуса i в n-вершинных графах диаметра d [6, 7] в [3] описаны векторы разнообразия шаров графов малого диаметра. В настоящей работе изучается свойство полного разнообразия шаров и вектор разнообразия шаров графов в асимптотике.

При асимптотическом анализе очень полезными оказываются подходы, использующие часто употребляемые в литературе понятие типичного комбинаторного объекта и термин «почти все». Пусть Ω — произвольный класс комбинаторных объектов, допускающих понятие размерности n, т. е. меры их количества (в частности, для графов под размерностью часто понимается число вершин графа). Через Ω_n обозначим класс всех комбинаторных объектов из Ω размерности n. При этом предполагается, что Ω_n, $n \in \mathbb{N}$, — разбиение множества Ω на конечные подмножества, т. е. $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$, $\Omega_n \cap \Omega_m = \varnothing$ при $n \neq m$ и Ω_n — конечное непустое множество для любого n. Говорят, что подкласс $\Omega^* \subseteq \Omega$ есть *класс типичных комбинаторных объектов класса* Ω, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\Omega^*_n|}{|\Omega_n|} = 1$. Примечательно, что пересечение классов Ω^* и Ω^{**} типичных объектов класса Ω снова будет классом типичных объектов из Ω, а доля объектов из $\Omega^* \setminus \Omega^{**}$

и $\Omega^{**} \setminus \Omega^*$ асимптотически мала. Тогда если все объекты из класса Ω^i будут обладать некоторым свойством и Ω^i, $i = 1, \ldots, m$, — классы типичных объектов класса Ω, то комбинаторные объекты из пересечения $\bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \Omega_i$ будут обладать всеми этими свойствами и образовывать класс типичных объектов класса Ω. Именно поэтому можно говорить о *типичном комбинаторном объекте класса* Ω и его свойствах, опуская указание на наличие самого класса Ω^* типичных объектов в Ω с этими свойствами. Таким образом, типичный комбинаторный объект класса Ω будет обладать заданным свойством, если этим свойством будут обладать все объекты некоторого класса Ω^* и при этом Ω^* — класс типичных объектов класса Ω.

Рассмотренный подход приводит к понятию «почти все». Пусть P — некоторое свойство комбинаторных объектов класса Ω, которым эти объекты могут обладать или не обладать. Через Ω_P обозначим класс объектов из Ω, обладающих свойством P. Тогда если Ω_P есть класс типичных объектов класса Ω, то говорят, что *почти все объекты класса* Ω *обладают свойством* P.

В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение числа графов с полным (локальным) разнообразием шаров и строение вектора разнообразия шаров типичного графа малого диаметра. В разд. 1 показано, что при $d = 1, 2$ типичный граф диаметра d обладает полным разнообразием шаров, а его вектор разнообразия шаров имеет вид $(\tau_0, \ldots, \tau_{d-1}, 1)$, где $\tau_0 = \cdots = \tau_{d-1}$. В связи с этим для графов произвольного заданного диаметра $d \geqslant 3$ возникают следующие вопросы. Обладает ли полным разнообразием шаров типичный граф диаметра d? Если не обладает, то какое строение имеет вектор разнообразия шаров типичного графа диаметра d?

В разд. 2 эти вопросы решаются для графов диаметра $d = 3$. Найдено асимтотически точное значение числа помеченных n-вершинных графов диаметра 3 и построен класс типичных графов (теорема 4). Вычислен вектор разнообразия шаров типичного графа диаметра 3 (теорема 5). Такой граф не обладает локальным 2-разнообразием шаров и, в частности, не является графом полного разнообразия шаров (следствие 3).

В статье рассматриваются конечные обыкновенные графы и используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [10, 11]. Как обычно, через $\deg_G x$ обозначим степень вершины x графа G, $B_i^G(x)$ — шар радиуса i с центром в вершине $x \in V(G)$ относительно метрики ρ_G, K_n — полный n-вершинный граф. Через $\lesssim$ и $\sim$ обозначим асимптотическое неравенство и равенство при $n \to \infty$ соответственно. Будем писать

$f(n) \lesssim g(n)$, если существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $f(n) \leqslant g(n)$ для всех $n \geqslant N$. Запись $f(n) \sim g(n)$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

1. Графы диаметра 2

Распространим понятие метрики на несвязные графы. Считаем, что $\rho_G(x,y) = \infty$, если в графе G не существует цепи, соединяющей вершины $x, y \in V(G)$ (при этом $\infty + \infty = \infty$, $n + \infty = \infty$ и $\infty > n$ для любого $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$). Очевидно, что диаметр несвязного графа G равен $d(G) = \infty$. Пусть $\mathcal{J}_n$ — класс всех помеченных n-вершинных графов с фиксированным множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $g_n = |\mathcal{J}_n|$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующие классы графов и введём соответствующие обозначения для числа таких графов:

$$\mathcal{J}_{n,\,d=k} = \{G \in \mathcal{J}_n \mid d(G) = k\}, \quad g_{n,\,d=k} = |\mathcal{J}_{n,\,d=k}|,$$
$$\mathcal{J}_{n,\,d\geqslant k} = \{G \in \mathcal{J}_n \mid \ k \leqslant d(G) < \infty\}, \quad g_{n,\,d\geqslant k} = |\mathcal{J}_{n,\,d\geqslant k}|,$$
$$\mathcal{J}^*_{n,\,d\geqslant k} = \{G \in \mathcal{J}_n \mid \exists\, x, y \in V \ k \leqslant \rho_G(x,y) < \infty\}, \quad g^*_{n,\,d\geqslant k} = |\mathcal{J}^*_{n,\,d\geqslant k}|,$$
$$\mathcal{J}^{**}_{n,\,d\geqslant k} = \{G \in \mathcal{J}_n \mid \exists\, x, y \in V \ k \leqslant \rho_G(x,y)\}, \quad g^{**}_{n,\,d\geqslant k} = |\mathcal{J}^{**}_{n,\,d\geqslant k}|.$$

Нетрудно заметить, что

$$\mathcal{J}_{n,\,d=k} \subseteq \mathcal{J}_{n,\,d\geqslant k} \subseteq \mathcal{J}^*_{n,\,d\geqslant k} \subseteq \mathcal{J}^{**}_{n,\,d\geqslant k} \subseteq \mathcal{J}_n \tag{1}$$

и $\mathcal{J}_{n,\,d=k} = \varnothing$ при $n \leqslant k$, кроме того, при $n \geqslant k+2$ все включения строгие.

При $d = 1$ класс графов $\mathcal{J}_{n,\,d=1}$ состоит из единственного графа K_n, причём $\tau(K_n) = (n, 1)$. Поэтому типичный граф диаметра 1 обладает полным разнообразием шаров.

Теперь рассмотрим графы диаметра 2. Хорошо известен следующий результат.

Теорема 1 [11]. *Почти все графы являются графами диаметра* 2.

Таким образом, число $g_{n,\,d=2}$ графов диаметра 2 асимптотически равно числу $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$ всех графов. Для числа графов диаметра $k \geqslant 3$ в [12] найдена следующая асимптотическая формула: $g_{n,\,d=k} = 2^{\binom{n}{2}}(6 \cdot 2^{-k} + o(1))^n$ при $n \to \infty$. Как показано в [1], класс типичных графов из теоремы 1 можно сузить, добавив свойство полного разнообразия шаров.

Теорема 2 [1, 2]. *Почти все графы являются графами диаметра* 2 *с полным разнообразием шаров.*

Непосредственно из теорем 1, 2 вытекает

Теорема 3. *Типичный граф диаметра 2 является графом полного разнообразия шаров.*

Для доказательства теоремы 3 достаточно заметить, что

$$\frac{|\mathcal{J}'_{n,\,d=2}|}{|\mathcal{J}_{n,\,d=2}|} = \frac{|\mathcal{J}'_{n,\,d=2}|}{|\mathcal{J}_{n}|} \Big/ \frac{|\mathcal{J}_{n,\,d=2}|}{|\mathcal{J}_{n}|},$$

где $\mathcal{J}'_{n,\,d=2}$ — класс графов из $\mathcal{J}_{n,\,d=2}$ с полным разнообразием шаров.

Следствие 1. *Вектор разнообразия шаров типичного n-вершинного графа диаметра 2 равен $(n, n, 1)$.*

2. Графы диаметра 3

Определение 3 [4]. Граф $V_k(u,v)$, изображённый на рис. 1(a), называется *воланом на вершинах u, v*. Граф G *имеет волан*, если в G есть подграф $V_k(u,v)$ и $\deg_G u = \deg_G v = k+1$ (рис. 1(b)).

Замечание 1. В произвольном графе G шары радиуса 1 с различными центрами u, v совпадают тогда и только тогда, когда G имеет волан на u, v.

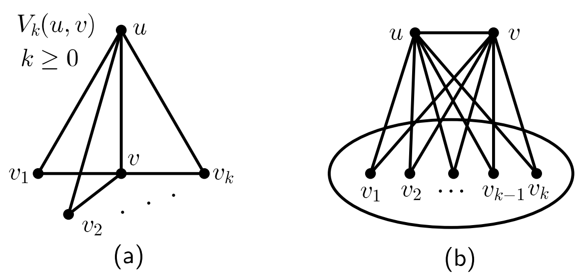

Рис. 1. Волан

Рассмотрим класс $\mathcal{T}_n$ графов из $\mathcal{J}_{n,\,d=3}$, которые не содержат воланов и имеют единственную пару диаметральных вершин. Для произвольных вершин $x, y \in V$ через $\mathcal{T}_n(x,y)$ обозначим класс всех графов из $\mathcal{T}_n$, в которых x, y являются диаметральными вершинами. Очевидно, что

$$\mathcal{T}_n = \bigcup_{x,y\in V} \mathcal{T}_n(x,y).$$

Заметим, что $\mathcal{T}_n(x,y) = \varnothing$ при $n < 4$ и $\mathcal{T}_n(x,y) \neq \varnothing$ при $n \geqslant 4$. Простейший пример графа класса $\mathcal{T}_n(x,y)$ изображён на рис. 2. Оценим число графов класса $\mathcal{T}_n$, для этого нам потребуются леммы 1 и 2.

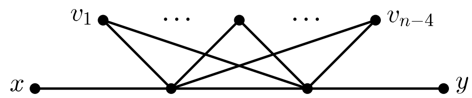

Рис. 2. Граф класса $\mathcal{T}_n(x,y)$

Пусть x, y, u, v — различные элементы V. Определим следующие классы графов:

$$\mathcal{A}_n(x,y) = \big\{G \in \mathcal{J}_n \mid B_1^G(x) \cap B_1^G(y) = \varnothing\big\},$$

$$\mathcal{B}_n(x,y,u,v) = \big\{G \in \mathcal{J}_n \mid B_1^G(x) \cap B_1^G(y) = \varnothing \text{ и } B_1^G(u) \cap B_1^G(v) = \varnothing\big\},$$

$$\mathcal{C}_n(x,y,u) = \big\{G \in \mathcal{J}_n \mid B_1^G(x) \cap B_1^G(y) = \varnothing \text{ и } B_1^G(x) \cap B_1^G(u) = \varnothing\big\},$$

$$\mathcal{D}_n = \big\{G \in \mathcal{J}_n \mid \exists v_1, v_2 \in V \ B_1^G(v_1) = B_1^G(v_2) \text{ и } v_1 \neq v_2\big\}.$$

Лемма 1. *Пусть x, y, u, v — различные элементы V. Тогда*
(i) $a_n = 2^{\binom{n}{2}} \frac{8}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^n$, *где* $a_n = |\mathcal{A}_n(x,y)|$;

(ii) $b_n = a_n O(1) \left(\frac{3}{4}\right)^n$, *где* $b_n = |\mathcal{B}_n(x,y,u,v)|$;

(iii) $c_n = a_n O(1) \left(\frac{5}{6}\right)^n$, *где* $c_n = |\mathcal{C}_n(x,y,u)|$;

(iv) $d_n = a_n O(n^2) \left(\frac{2}{3}\right)^n$, *где* $d_n = |\mathcal{D}_n|$.

Доказательство. Будем использовать следующее свойство биномиальных коэффициентов, вытекающее из тождества Паскаля:

$$\binom{n-m}{2} = \binom{n}{2} - nm + \frac{m(m+1)}{2}. \qquad (2)$$

Подсчитаем число помеченных n-вершинных графов, имеющих непересекающиеся шары радиуса 1 с центрами в вершинах x, y. Выберем k вершин множества $V \setminus \{x, y\}$ и каждую из них соединим ребром с вершиной x, $0 \leqslant k \leqslant n-2$. Затем выберем m вершин из оставшихся и соединим их рёбрами с вершиной y, $0 \leqslant m \leqslant n-2-k$. На $n-2$ вершинах из множества $V \setminus \{x, y\}$ определим произвольный граф. Таким образом построим все графы класса $\mathcal{A}_n(x,y)$. Тогда

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \sum_{m=0}^{n-2-k} \binom{n-2-k}{m} 2^{\binom{n-2}{2}}. \qquad (3)$$

Используя формулу бинома Ньютона и тождество (2), получаем

$$a_n = 2^{\binom{n-2}{2}} 3^{n-2} = 2^{\binom{n}{2}} \frac{8}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Утверждение (i) доказано.

Аналогично доказательству (i), используя (2) и (3), получаем

$$\begin{aligned} b_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \sum_{m=0}^{n-2-k} \binom{n-2-k}{m} \sum_{i=0}^{n-4} \binom{n-4}{i} \sum_{j=0}^{n-4-i} \binom{n-4-i}{j} 2^{\binom{n-4}{2}} \\ = 2^{\binom{n-4}{2}} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \sum_{m=0}^{n-2-k} \binom{n-2-k}{m} 3^{n-4} \\ = a_n\, 2^{-2n+7}\, 3^{n-4} = a_n O(1) \left(\frac{3}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется число

$$\begin{aligned} c_n = \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} \sum_{m=0}^{n-2-k} \binom{n-2-k}{m} \sum_{i=0}^{n-3-k} \binom{n-3-k}{i} 2^{\binom{n-3}{2}} \\ = 2^{\binom{n-3}{2}} 2^{2n-5} \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} 4^{-k} = 2^{\binom{n-3}{2}} 5^{n-3}\, 2 \\ = 2^{\binom{n}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^n O(1) = a_n O(1) \left(\frac{5}{6}\right)^n. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждения (ii) и (iii) доказаны.

В [1] показано, что $d_n \leqslant 2^{\binom{n}{2}} n^2\, 2^{-n+1}$. Следовательно,

$$d_n = 2^{\binom{n}{2}} O(n^2) \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n = a_n O(n^2) \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Лемма 1 доказана.

Пусть

$$\mathcal{B}_n(x,y) = \bigcup_{\substack{u,v \in V \setminus \{x,y\}, \\ u \neq v}} \mathcal{B}_n(x,y,u,v), \quad \mathcal{C}_n(x,y) = \bigcup_{u \in V \setminus \{x,y\}} \mathcal{C}_n(x,y,u).$$

Лемма 2 (о классе $\mathcal{T}_n(x,y)$). *Пусть x, y — различные элементы множества V, $n \geqslant 3$ и $c > 0$, $0 < \varepsilon < 1$ — произвольные константы, не зависящие от n. Тогда*

(i) $\mathcal{T}_n(x,y) = \mathcal{A}_n(x,y) \setminus (\mathcal{B}_n(x,y) \cup \mathcal{C}_n(x,y) \cup \mathcal{C}_n(y,x) \cup \mathcal{D}_n)$;

(ii) $|\mathcal{T}_n(x,y)| \gtrsim a_n\bigl(1 - c\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-2}\bigr)$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{A}_n(x,y) \setminus (\mathcal{B}_n(x,y) \cup \mathcal{C}_n(x,y) \cup \mathcal{C}_n(y,x) \cup \mathcal{D}_n)$. Так как $G \notin \mathcal{D}_n$, по замечанию 1 граф G не содержит воланов. Кроме того, для любых вершин $u, v \in V \setminus \{x,y\}$ имеем

$$\rho_G(u,v) \leqslant 2, \quad \rho_G(x,u) \leqslant 2, \quad \rho_G(y,u) \leqslant 2. \tag{4}$$

Поэтому $3 \leqslant \rho_G(x,y) \leqslant \rho_G(x,u) + \rho_G(u,y) \leqslant 4$, где $u \in V \setminus \{x,y\}$. Полагая $\rho_G(x,y) = 4$, получаем $\rho_G(x,v) = 3$ для некоторой вершины $v \in V \setminus \{x,y\}$ и приходим к противоречию. Следовательно, $\rho_G(x,y) = 3$. Учитывая (4), заключаем $G \in \mathcal{T}_n(x,y)$. Обратное включение очевидно. Утверждение (i) доказано.

Докажем (ii). В силу (i) и леммы 1 получаем

$$|\mathcal{T}_n(x,y)| \geqslant a_n - |\mathcal{B}_n(x,y)| - 2|\mathcal{C}_n(x,y)| - d_n \geqslant a_n - \tbinom{n-2}{2} b_n - 2(n-2)c_n - d_n$$
$$= a_n\left(1 - O(n^2)\left(\frac{3}{4}\right)^n - O(n)\left(\frac{5}{6}\right)^n - O(n^2)\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$
$$\gtrsim a_n\left(1 - c\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-2}\right).$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 4. *Пусть $c > 0$ и $0 < \varepsilon < 1$ — произвольные константы, не зависящие от n. Тогда почти все n-вершинные графы диаметра 3 содержатся в классе $\mathcal{T}_n$ и*

$$2^{\binom{n}{2}}\xi_n\left(1 - c\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-2}\right) \lesssim |\mathcal{T}_n| \leqslant g_{n,d=3} \leqslant g_{n,d\geqslant 3} \leqslant g^{*}_{n,d\geqslant 3} \leqslant g^{**}_{n,d\geqslant 3}$$
$$\leqslant 2^{\binom{n}{2}}\xi_n,$$

где $\xi_n = \frac{8}{9}\binom{n}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Доказательство. Применяя лемму 1, включения из (1) и равенство $\mathcal{A}_n(x,y) = \mathcal{A}_n(y,x)$, получаем верхнюю оценку

$$|\mathcal{T}_n| \leqslant g_{n,\,d=3} \leqslant g_{n,\,d\geqslant 3} \leqslant g^{*}_{n,\,d\geqslant 3} \leqslant g^{**}_{n,\,d\geqslant 3}$$
$$\leqslant \Bigl|\bigcup_{x \neq y} \mathcal{A}_n(x,y)\Bigr| \leqslant \binom{n}{2} a_n = 2^{\binom{n}{2}}\xi_n.$$

Используя леммы 1, 2 и единственность пары диаметральных вершин в графах класса $\mathcal{T}_n(x,y)$, имеем нижнюю оценку

$$|\mathcal{T}_n| = \Big|\bigcup_{x\neq y}\mathcal{T}_n(x,y)\Big| = \binom{n}{2}|\mathcal{T}_n(x,y)| \gtrsim 2^{\binom{n}{2}}\xi_n\left(1-c\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-2}\right).$$

Теорема 4 доказана.

В теореме 4 доказано, что число помеченных n-вершинных графов диаметра 3 асимптотически равно $2^{\binom{n}{2}}\xi_n$, и дано описание класса типичных графов диаметра 3.

Следствие 2. $g_{n,\,d=3} \sim g_{n,\,d\geqslant 3} \sim g^*_{n,\,d\geqslant 3} \sim g^{**}_{n,\,d\geqslant 3} \sim 2^{\binom{n}{2}}\xi_n$.

Теорема 5. *Вектор разнообразия шаров типичного n-вершинного графа диаметра 3 равен $(n,n,3,1)$.*

Доказательство. По теореме 4 достаточно вычислить вектор разнообразия шаров произвольного графа G из класса $\mathcal{T}_n$. В силу замечания 1 имеем $\tau_1(G)=n$. Поскольку граф G содержит единственную пару диаметральных вершин x и y, то

$$B_2^G(x) = V\setminus\{y\},\quad B_2^G(y) = V\setminus\{x\},\quad B_2^G(u) = V,\quad u\in V\setminus\{x,y\}.$$

Следовательно, $\tau_2(G)=3$. Таким образом, $\tau(G)=(n,n,3,1)$. Теорема 5 доказана.

Следствие 3. *Типичный граф диаметра 3 не обладает локальным 2-разнообразием шаров и, в частности, не является графом полного разнообразия шаров.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 1. С. 5–12.
2. **Евдокимов А. А.** Об одном подходе к классификации графов как метрических пространств // Тезисы докл. XI Междунар. конф. по пробл. теорет. кибернетики (Ульяновск, 10–14 июня 1996 г.). М.: Изд-во МГУ, 1996. С. 57–59.
3. **Евдокимов А. А., Федоряева Т. И.** О проблеме характеризации векторов разнообразия шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 1. С. 44–52.
4. **Федоряева Т. И.** Операции и изометрические вложения графов, связанные со свойством продолжения метрики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 49–67.

5. **Федоряева Т. И.** Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, № 3. С. 74–84.
6. **Федоряева Т. И.** Векторы разнообразия шаров для графов и оценки их компонент // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2007. Т. 14, № 2. С. 47–67.
7. **Федоряева Т. И.** Точные верхние оценки числа различных шаров заданного радиуса в графах с фиксированными числом вершин и диаметром // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 6. С. 74–92.
8. **Федоряева Т. И.** О графах с заданными диаметром, числом вершин и локальным разнообразием шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 1. С. 65–74.
9. **Федоряева Т. И.** Мажоранты и миноранты класса графов с фиксированными диаметром и числом вершин // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 1. С. 58–76.
10. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
11. **Bollobás B.** Graph theory: an indroductory course. New York: Springer-Verl., 1979. 394 p.
12. **Tomescu I.** An asymptotic formula for the number of graphs having small diameter // Discrete Math. 1996. Vol. 156, No. 1–3. P. 219–228. (Grad. Texts Math.; Vol. 63).

Федоряева Татьяна Ивановна

Статья поступила
20 сентября 2015 г.

Исправленный вариант —
26 октября 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
November–December 2015. Volume 22, No. 6. P. 43–54

UDC 519.1+519.173 DOI: 10.17377/daio.2015.22.512

THE DIVERSITY VECTOR OF BALLS OF A TYPICAL GRAPH OF SMALL DIAMETER

T. I. Fedoryaeva[1,2]
[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
[2] Novosibirsk State University,
2 Pirogov St., 630090 Novosibirsk, Russia
e-mail: tatiana.fedoryaeva@gmail.com

Abstract. For ordinary connected graphs, the diversity vectors of balls (ith component of the vector is equal to the number of different balls of radius i) are studied asymptotically. The asymptotic behavior of the number of graphs of small diameter with full diversity of balls is investigated. The diversity vector of balls of a typical graph of the given small diameter is calculated. Asymptotically exact value of the number of labeled n-vertex graphs of diameter 3 is obtained. Ill. 2, bibliogr. 12.

Keywords: graph, metric ball, radius of ball, number of balls, diversity vector of balls, typical graph.

REFERENCES

1. **A. A. Evdokimov,** Locally isometric embeddings of graphs and the metric prolongation property, *Sib. Zh. Issled. Oper.,* **1**, No. 1, 5–12, 1994. Translated in A. D. Korshunov, ed., *Discrete Analysis and Operations Research,* pp. 7–14, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996 (Math. Its Appl., Vol. 355).
2. **A. A. Evdokimov,** On an approach to the classification of graphs as metric spaces, in *Tezisy dokladov XI Mezhdunarodnoi konferentsii po problemam teoreticheskoi kibernetiki* (Abstr. XI Int. Conf. Probl. Theor. Cybern.), *Ul'yanovsk, Russia, June 10–14, 1996,* pp. 57–59, Izd. MGU, Moscow, 1996.
3. **A. A. Evdokimov** and **T. I. Fedoryaeva,** On the problem of characterizing the diversity vectors of balls, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **21**, No. 1, 44–52, 2014. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **8**, No. 2, 190–195, 2014.
4. **T. I. Fedoryaeva,** Operations and isometric embeddings of graphs related to the metric prolongation property, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **2**, No. 3, 49–67, 1995. Translated in A. D. Korshunov, ed., *Operations Research and Discrete Analysis,* pp. 31–49, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997 (Math. Its Appl., Vol. 391).

5. **T. I. Fedoryaeva,** Diversity of balls in the metric spaces of trees, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **12**, No. 3, 74–84, 2005.
6. **T. I. Fedoryaeva,** Diversity vectors of balls in graphs and estimates of the components of the vectors, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **14**, No. 2, 47–67, 2007. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **2**, No. 3, 341–356, 2008.
7. **T. I. Fedoryaeva,** Exact upper estimates of the number of different balls of given radius for graphs with fixed number of vertices and diameter, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **16**, No. 6, 74–92, 2009.
8. **T. I. Fedoryaeva,** On the graphs with given diameter, number of vertices, and local diversity of balls, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **17**, No. 1, 65–74, 2010. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **5**, No. 1, 44–50, 2011.
9. **T. I. Fedoryaeva,** Majorants and minorants for the classes of graphs with fixed diameter and number of vertices, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **20**, No. 1, 58–76, 2013. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **7**, No. 2, 153–165, 2013.
10. **F. Harary,** *Graph Theory,* Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 1969. Translated under the title *Teoriya grafov,* Mir, Moscow, 1973.
11. **B. Bollobás,** *Graph Theory: An Introductory Course,* Springer-Verl., New York, 1979 (Grad. Text Math., Vol. 63).
12. **I. Tomescu,** An asymptotic formula for the number of graphs having small diameter, *Discrete Math.,* **156**, No. 1–3, 219–228, 1996.

Tatiana I. Fedoryaeva

Received
20 September 2015

Revised
26 October 2015