

ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
ЦИРКУЛЯНТНОГО ТИПА С ПОРОГОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ
ОТ НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ ТРЁХ ПЕРЕМЕННЫХ *)

Ц. Ч.-Д. Батуева¹

¹Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
e-mail: batueva@math.nsc.ru

Аннотация. Предложен способ проверки того, является ли состояние истоком для дискретной динамической системы циркулянтного типа с произвольной q -значной функцией в вершинах сети. Для систем с булевой пороговой функцией от не более трёх переменных в вершинах сети получено описание всех истоков, всех неподвижных точек и некоторых циклов, найдены длины некоторых максимальных цепей вне циклов. Ил. 1, табл. 2, библиогр. 15.

Ключевые слова: дискретная динамическая система, циркулянт, генная сеть, функциональный граф, пороговая функция, исток.

Введение

Пусть $G = (V, D)$ — ориентированный граф с множеством вершин $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$ (граф-носитель). Рассмотрим следующую дискретную динамическую систему. В каждый момент времени вершины графа G помечены элементами v_0, v_1, \dots, v_{n-1} из \mathbb{Z}_q . Набор $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{Z}_q^n$ называется *состоянием системы*. В следующий момент времени (такт работы системы) состояние системы пересчитывается под действием отображения

$$A_{\varphi, q} : \mathbb{Z}_q^n \rightarrow \mathbb{Z}_q^n,$$

где $\varphi = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$. Каждая вершина приобретает новую метку, равную значению функции $f_i : \mathbb{Z}_q^k \rightarrow \mathbb{Z}_q$, где $k < n$, от значений старых меток, из которых выходят дуги в вершину i .

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00507).

Функциональным графом $G_{\varphi,q}$ называется ориентированный граф, вершинами которого являются элементы из \mathbb{Z}_q^n , а дуги соединяют вершины \tilde{v} и \tilde{u} тогда и только тогда, когда $A_{\varphi,q}(\tilde{v}) = \tilde{u}$. Каждая компонента таких графов состоит из конечного числа деревьев, ориентированных к корням, а корни соединены в контур [11]. Поэтому можно ввести понятие *максимальной цепи вне циклов*, т. е. цепи с максимальной длиной, все рёбра которой не принадлежат циклам функционального графа.

Состояние системы \tilde{u} называется *рабочим*, если существует состояние \tilde{v} такое, что $A_{\varphi,q}(\tilde{v}) = \tilde{u}$. В противном случае состояние называется *истоком*.

Данное направление имеет своё начало в биологии и генетике [13–15]. Дискретная динамическая система, определённая таким образом, является, например, моделью регуляторного контура геной сети (более подробно см. в [4, 8]). Вершины графа-носителя соответствуют различным химическим веществам в клетке. Метки вершин характеризуют концентрации веществ, а контуры функционального графа описывают периодические процессы. В [5] описаны подходы и методы в исследовании дискретных моделей функционирования геной сетей. В последнее время активно исследуется циркулянтный тип данной системы, т. е. в качестве графа-носителя рассматривается циркулянт $G_{n,k} = (V, D)$, где $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$ и $D = \{\vec{ij} \mid (j-i) \bmod n \leq k, i \neq j\}$. Работы [1–3, 6, 12, 15] посвящены свойствам таких систем с пороговыми функциями в вершинах. В [7] описана структура функционального графа обобщённой дискретной динамической системы циркулянтного типа с линейными функциями в вершинах. Рассматривались модификации циркулянта, например, двойной циркулянт [10].

В данной работе рассматриваются системы с циркулянтом в качестве графа-носителя, т. е. исследуется структура функционального графа в случае отображения $A_{\varphi,2} : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$, когда все функции f_i равны между собой и каждому состоянию системы \tilde{v} ставится в соответствие состояние \tilde{u} тогда и только тогда, когда

$$u_i = f_0(v_{(i-k) \bmod n}, v_{(i-(k-1)) \bmod n}, \dots, v_{(i-1) \bmod n}),$$

где $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Далее в статье будем опускать $\bmod n$ и считать, что все индексы в состояниях рассматриваются в \mathbb{Z}_n .

Введём обозначение $A_{f_0,q}$ вместо $A_{\varphi,q}$, поскольку в рассматриваемой системе функции во всех вершинах одинаковы: $\varphi = (f_0, f_0, \dots, f_0)$. Функциональный граф также будем обозначать через $G_{f_0,q}$.

Пусть $f : \mathbb{Z}_q^k \rightarrow \mathbb{Z}_q$. Ориентированным графом $P_{f,q}$ считается граф,

вершинами которого являются элементы \mathbb{Z}_q^k , причём дуга идёт из вершины $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$ в (v_1, v_2, \dots, v_k) тогда и только тогда, когда $f(v_0, \dots, v_{k-1}) = v_k$ [2]. Пример графа $P_{f,2}$ для функции $f(x, y, z) = (01001100)$ изображён на рис. 1(а).

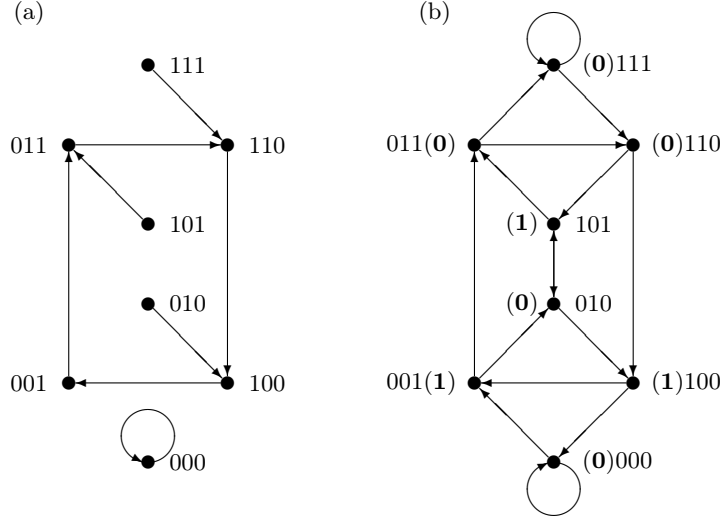


Рис. 1. (а) Граф $P_{f,2}$ и (б) граф $GB_{f,2}$ для функции (01001100)

В [2] предложен алгоритм нахождения всех неподвижных точек отображения $A_{f,q}$ через граф $P_{f,q}$.

Пусть $\tilde{v} = \alpha^{n/s}$ означает конкатенацию слова $\alpha \in \mathbb{Z}_q^s$ n/s раз, если n кратно s .

Теорема 1 (критерий неподвижных точек [2]). *Состояние $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{l-1})^{n/l}$ с минимальным периодом l является неподвижной точкой отображения $A_{f,q}$ тогда и только тогда, когда граф $P_{f,q}$ содержит простой цикл $\tilde{u}^0, \dots, \tilde{u}^{l-1}$, где $\tilde{u}^i = (v_i, v_{(i+1) \bmod l}, \dots, v_{(i+l-1) \bmod l})$ для $i \in \{0, 1, \dots, l-1\}$.*

Пороговой функцией называется функция, которая представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_k) = \left[\sum_{i=1}^k a_i x_i > T \right],$$

где a_i — вес аргумента x_i , T — порог функции f и $a_i, T \in \mathbb{R}$.

Следующая теорема полностью описывает все истоки для класса булевых функций с единственной единицей (частного случая пороговой функции).

Теорема 2 [2]. Пусть $f : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{Z}_2$ и существует единственное $\alpha \in \mathbb{Z}_2^k$ такое, что $f(\alpha) = 1$, а минимальный период слова α равен p . Тогда

(i) состояние, содержащее подслово $10^{s-1}1$, является истоком, если $1 \leq s \leq k-1$ и $s \neq p$,

(ii) состояние, содержащее подслово $10^{k-1}1$, является истоком, если $k = tp$ и $t \geq 2$,

и других истоков нет.

Данная статья продолжает описание свойств функциональных графов для систем с булевыми пороговыми функциями в вершинах. Для функций с одной единицей получено описание всех циклов. Предложен способ описания истоков для q -значных функций. Найден критерий существования циклов, образованных некоторыми циклическими сдвигами. Для систем с булевыми пороговыми функциями от не более трёх существенных переменных в вершинах сети описаны все неподвижные точки, некоторые циклы, все истоки и получены некоторые оценки длин максимальных цепей вне циклов.

1. Основные результаты

Пусть $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$. Введём обозначения состояния, записанного в обратном порядке:

$$\overleftarrow{\tilde{v}} = (v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_0),$$

циклического сдвига состояния на s позиций вправо:

$$\delta_s(\tilde{v}) = (v_{(n-s) \bmod n}, \dots, v_{n-1}, v_0, \dots, v_{(n-s-1) \bmod n})$$

и инверсии состояния:

$$\neg \tilde{v} = (\neg v_0, \dots, \neg v_{n-1}).$$

Пусть $r = (r_1, r_2, \dots, r_l)$ и $z = (z_1, z_2, \dots, z_l)$, где $r_i, z_i \in \mathbb{N}$. Введём обозначение $1^r 0^z = 1^{r_1} 0^{z_1} \dots 1^{r_l} 0^{z_l}$.

Любое состояние системы можно представить в виде $\delta_s(1^r 0^z)$ для некоторых наборов r , z и числа s . Например, $1001110110 = 1^1 0^2 1^3 0^1 1^2 0^1$, т. е. $r = (1, 3, 2)$, $z = (2, 1, 1)$ и $s = 0$. Так как эти значения не единственно возможные, в дальнейшем для однозначности выбора параметров r , z и s будем считать, что $r_i, z_j > 0$, если $l \geq 2$, и r_1 и z_1 могут принимать значение 0, если $l = 1$, а s принимает минимальное значение.

Для удобства пусть $r + k = (r_1 + k, r_2 + k, \dots, r_l + k)$ для некоторого числа k .

Фраза «циклы имеют вид $\tilde{v} \rightarrow \tilde{u}$, где $\tilde{v} \in M$ » означает, что $\tilde{v} \in M$ тогда и только тогда, когда это состояние принадлежит одному из этих циклов и $A_{f,q}(\tilde{v}) = \tilde{u}$.

Обозначим через $g_i : \mathbb{Z}_q^k \rightarrow \mathbb{Z}_q$ функцию $g_i(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_{k-i+1}$, где $i \in \{1, \dots, k\}$.

Теорема 3 (о циклах, образованных циклическими сдвигами). Пусть $f : \mathbb{Z}_q^k \rightarrow \mathbb{Z}_q$, $\tilde{v} \in \mathbb{Z}_q^n$ и $i \in \{1, \dots, k\}$. В функциональном графе $G_{f,q}$ существуют циклы вида $\tilde{v} \rightarrow \delta_i(\tilde{v})$, если состояние \tilde{v} избегает все слова, при которых значения функций g_i и f не совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторое $i \in \{1, \dots, k\}$. Пусть состояние \tilde{v} избегает все слова α такие, что $f(\alpha) \neq g_i(\alpha)$. Тогда $A_{f,2}(\tilde{v}) = \delta_i(\tilde{v})$ и, таким образом, $A_{f,2}^{\text{НОК}(n,i)}(\tilde{v}) = \tilde{v}$. Следовательно, функциональный граф $G_{f,q}$ содержит цикл, образованный циклическим сдвигом состояния \tilde{v} . Теорема 3 доказана.

Лемма 1. Пусть $f : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{Z}_2$, $\tilde{v} \in \mathbb{Z}_2^n$ и $i \in \{1, \dots, k\}$. В функциональном графе $G_{f,q}$ существуют циклы вида $\tilde{v} \rightarrow \delta_i(-\tilde{v})$, если состояние \tilde{v} избегает все слова, при которых значения функций g_i и f совпадают.

Раскрасим вершины графа де Брёйна размерности k значениями функции f в этих вершин. Обозначим граф через $GB_{f,q}$.

Теорема 4 (об истоках). Пусть $f : \mathbb{Z}_q^k \rightarrow \mathbb{Z}_q$. Состояние $\tilde{v} \in \mathbb{Z}_q^n$ является истоком для отображения $A_{f,q}$ тогда и только тогда, когда не существует циклического маршрута в графе $GB_{f,q}$, раскрашенного последовательностью значений состояния \tilde{v} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть состояние \tilde{v} — исток отображения $A_{f,q}$, но существует цикл в графе $GB_{f,q}$, раскрашенный последовательностью символов состояния \tilde{v} . Тогда по построению графа $GB_{f,q}$ из этого цикла можно восстановить состояние $\tilde{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$, удовлетворяющее условию $f(u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k-1}) = v_{i+k}$. Следовательно, существует состояние \tilde{u} такое, что $A_{f,q}(\tilde{u}) = \tilde{v}$; противоречие, так как \tilde{v} — исток.

Пусть не существует цикла в графе $GB_{f,q}$, раскрашенного последовательностью символов состояния \tilde{v} , но состояние \tilde{v} является рабочим для отображения $A_{f,q}$. Тогда существует состояние \tilde{u} такое, что $A_{f,q}(\tilde{u}) = \tilde{v}$. Стало быть, существует цикл в графе $GB_{f,q}$, раскрашенный последовательностью символов состояния \tilde{v} ; противоречие. Теорема 4 доказана.

Лемма 2. Рабочие состояния избегают подслова α тогда и только тогда, когда не существует цепи в $GB_{f,q}$, раскраска которой совпадает с α .

2. Булевы функции с одной единицей

В [2] найдены все истоки и все неподвижные точки для булевых функций с единственным набором α таким, что $f(\alpha) = 1$ в вершинах сети. Опишем циклы таких систем. Рассмотрим два случая: $f(0^k) = 1$ и $f(0^k) = 0$.

Лемма 3. Пусть $f : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{Z}_2$ с одной единицей $f(0^k) = 1$. Отображение $A_{f,2} : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ обладает следующими свойствами:

- 1) имеет неподвижные точки $(0^k 1)^{n/(k+1)}$, если n кратно $k+1$;
- 2) все циклы имеют вид $0^n \leftrightarrow 1^n$ или $\delta_s(1^r 0^z) \rightarrow \delta_{s+1}(0^{r+k-1} 1^{z-(k-1)})$, где $z_i \geq k$;
- 3) длина максимальной цепи вне циклов равна 1;
- 4) состояние является истоком тогда и только тогда, когда содержит хотя бы одно из слов $10^s 1$, где $2 \leq s \leq k-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 следует описание неподвижных точек, а из теоремы 2 — истоков.

Рассмотрим рабочие состояния. Они имеют вид 1^n или $\delta_s(1^r 0^z)$, где $z_i \geq k$. В первом случае $A_{f,2}(1^n) = 0^n$ и $A_{f,2}(0^n) = 1^n$, т. е. получается цикл $0^n \leftrightarrow 1^n$. Во втором случае

$$A_{f,2}(1^r 0^z) = \delta_1(0^{r+k-1} 1^{z-(k-1)}) = \delta_{1+r_1+k-1}(1^{z-(k-1)} 0^{\delta_{-1}(r+k-1)}),$$

$$A_{f,2}^2(1^r 0^z) = \delta_{r_1+k+1}(0^z 1^{\delta_{-1}(r)}) = \delta_{k+1}(1^r 0^z).$$

Следовательно, $A_{f,2}^2(\tilde{v}) = \delta_{k+1}(\tilde{v})$. Тогда для любого рабочего состояния \tilde{v} выполняется равенство $A_{f,2}^{2n}(\tilde{v}) = \tilde{v}$. Таким образом, все рабочие состояния находятся в некоторых циклах, значит, длина максимальной цепи вне циклов равна 1. Лемма 3 доказана.

Опишем циклы и оценим длину максимальной цепи вне циклов для второго случая.

Лемма 4. Пусть для функции $f : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{Z}_2$ существует единственное $\alpha \in \mathbb{Z}_2^k$ такое, что $\alpha \neq 0^k$ и $f(\alpha) = 1$. Если $A_{f,2}(\tilde{u}) = \delta_i(\tilde{u})$ для некоторого $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, то \tilde{u} принадлежит циклу вида $\tilde{v} \rightarrow \delta_i(\tilde{v})$. Других циклов нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(\alpha) = 1$, где $\alpha \neq 0^k$. Число вхождений слова α в состояние \tilde{v} не больше числа единиц в \tilde{v} . Следовательно, число единиц в $A_{f,2}(\tilde{v})$ не больше, чем в \tilde{v} .

Тогда все состояния из одного цикла имеют одинаковое число единиц. Если число единиц в \tilde{v} совпадает с числом единиц в $A_{f,2}(\tilde{v})$, то

$A_{f,2}(\tilde{v}) = \delta_i(\tilde{v})$. Тогда $A_{f,2}^{\text{НОК}(i,n)}(\tilde{v}) = \tilde{v}$, следовательно, \tilde{v} принадлежит циклу, состоящему из его циклических сдвигов не больше чем на $k - 1$ позиций. Все такие циклы описаны в теореме 3. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть для функции $f : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{Z}_2$ существует единственное $\alpha \in \mathbb{Z}_2^k$ с минимальным периодом p такое, что $f(\alpha) = 1$. Тогда длина максимальной цепи вне циклов отображения $A_{f,2}$

- (i) равна 1, если α содержит не больше одной единицы;
- (ii) равна 2, если слово $\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}$ содержит больше одной единицы;
- (iii) не больше $\lceil \frac{n-1}{k-1} \rceil + 1$, если слово $\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}$ содержит ровно одну единицу и $p \neq k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \tilde{v} — произвольное состояние системы.

(i) Пусть α содержит не больше одной единицы. Рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 1: $\alpha = 0^k$. Тогда $A_{f,2}(\tilde{v}) = 0^n$. Так как состояние 0^n принадлежит циклу $0^n \leftrightarrow 1^n$, длина максимальной цепи вне циклов равна 1.

СЛУЧАЙ 2: α содержит только одну единицу $\alpha_l = 1$. Рассмотрим $\tilde{v} \neq 0^n$. Тогда

$$A_{f,2}^2(\tilde{v}) = A_{f,2}(\delta_s(1^r 0^z)) = \delta_{s+(k-l)}(1^r 0^z),$$

где $r_i = 1$ и $z_i, s \geq k - 1$ для любого i . Так как в последнем равенстве число единиц в состояниях не изменилось, по лемме 4 состояние $\delta_s(1^r 0^z)$ принадлежит циклу, следовательно, длина максимальной цепи вне циклов равна 1.

(ii) Пусть слово $\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}$ содержит больше одной единицы. Аналогично предыдущему случаю получаем, что если $\tilde{v} \neq 0^n$, то

$$A_{f,2}^2(\tilde{v}) = A_{f,2}(\delta_s(1^r 0^z)) = 0^n,$$

где $r_i = 1$, $z_i \geq p - 1$ и $s \leq k - 1$. Поскольку состояние 0^n — неподвижная точка, длина максимальной цепи вне циклов равна 2.

(iii) Пусть $p \neq k$ и слово $\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}$ содержит ровно одну единицу $\alpha_l = 1$. Тогда $A_{f,2}(\tilde{v}) = \delta_s(1^r 0^z)$, где $r_i = 1$, $z_i \geq p - 1$ и $s \leq k - 1$. Если все $z_i = p - 1$, то состояние принадлежит некоторому циклу. Если существует j такое, что $z_j > p - 1$, то на каждом шаге максимальное число подряд встречающихся нулей будет увеличиваться как минимум на $k - 1$ нулей. Следовательно, длина максимальной цепи вне циклов не больше $\lceil \frac{n-1}{k-1} \rceil + 1$. Лемма 5 доказана.

3. Булевы функции с одной существенной переменной

Достаточно рассмотреть функции, для которых первая переменная существенна.

Лемма 6. Пусть $f : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{Z}_2$ и $f(x_1, \dots, x_k) = x_1$. Тогда отображение $A_{f,2} : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ обладает следующими свойствами:

- (i) имеет неподвижные точки $\alpha^{n/k}$, если n кратно k и $\alpha \in \mathbb{Z}_2^k$;
- (ii) имеет циклы вида $\tilde{v} \rightarrow \delta_k(\tilde{v})$, где $\tilde{v} \in \mathbb{Z}_2^n$;
- (iii) длина максимального цикла равна n ;
- (iv) длина максимальной цепи вне циклов равна 0;
- (v) истоков нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $f(x_1, \dots, x_k) = x_1$ отображение $A_{f,2}$ действует как циклический сдвиг δ_k , т. е.

$$A_{f,2}(\tilde{v}) = (v_{n-k+1}, \dots, v_n, v_1, \dots, v_{n-k}).$$

Лемма 6 доказана.

Следующая лемма доказывается аналогично.

Лемма 7. Пусть $f : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{Z}_2$ и $f(x_1, \dots, x_k) = \neg x_1$. Тогда отображение $A_{f,2} : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ обладает следующими свойствами:

- (i) имеет неподвижные точки $(\alpha \neg \alpha)^{n/(2k)}$, если n кратно $2k$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_2^k$;
- (ii) имеет циклы вида $\tilde{v} \rightarrow \delta_k(\neg \tilde{v})$, где $\tilde{v} \in \mathbb{Z}_2^n$;
- (iii) длина максимального цикла равна n , если n чётное, и $2n$, если n нечётное;
- (iv) длина максимальной цепи вне циклов равна 0;
- (v) истоков нет.

4. Булевы функции от двух переменных

Существует всего восемь пороговых функций от двух переменных, существенно зависящих от них:

$$\begin{array}{ll} f(x, y) = (0001) = x \& y, & f(x, y) = (0111) = x \vee y, \\ f(x, y) = (0010), & f(x, y) = (1011), \\ f(x, y) = (0100), & f(x, y) = (1101), \\ f(x, y) = (1000) = \neg(x \vee y), & f(x, y) = (1110) = \neg(x \& y). \end{array}$$

Заметим, что функции во втором столбце являются двойственными к функциям из первого. В лемме 1 из [2] доказано, что функциональные графы систем с двойственными функциями в вершинах имеют одинаковое строение с точностью до инверсии. Поэтому достаточно рассмотреть только функции в левом столбце.

Лемма 8. Пусть $f : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ — пороговая функция от двух существенных переменных. В табл. 1 описаны все неподвижные точки и все циклы и приведены точные значения длины максимальной цепи вне циклов отображения $A_{f,2}$.

Т а б л и ц а 1

Свойства отображения $A_{f,2}$ для пороговой функции f
от двух существенных переменных

$f(x, y)$	Неподвижные точки	Циклы	Истоки содержат слова	$L_{\text{мц}}$
(1000)	$(001)^{n/3}$	$0^n \leftrightarrow 1^n$, $\delta_s 1^r 0^z \rightarrow \delta_{s+3}(0^{r+1} 1^{z-1})$, где $z_i \geq 2$	101	1
(0100)	0^n	$\tilde{v} \rightarrow \delta_1(\tilde{v})$, где $11 \notin \tilde{v}$	11	1
(0010)	$0^n, (01)^{n/2}$	$\tilde{v} \rightarrow \delta_2(\tilde{v})$, где $11 \notin \tilde{v}$	11	1
(0001)	$0^n, 1^n$	—	101	$n - 1$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Описание свойств для функции $f(00) = 1$ вытекает из леммы 3. Для остальных функций из теоремы 1 следует описание неподвижных точек, из теоремы 2 — истоков, а из леммы 4 — циклов.

Для функций $f(0, 1) = 1$ и $f(1, 0) = 1$ все состояния либо являются истоками, либо принадлежат циклам, поэтому длина максимальной цепи вне циклов равна 1.

Для функции $f(1, 1) = 1$ все циклы отображения $A_{f,2}$ являются неподвижными точками. Рассмотрим изменения истока 01^{n-1} под действием этого отображения:

$$A_{f,2}(01^{n-1}) = 1001111 \dots 1, \quad A_{f,2}^2(01^{n-1}) = 1100011 \dots 1, \\ \dots, \quad A_{f,2}^{n-1}(01^{n-1}) = 0000000 \dots 0.$$

Как сказано выше, число нулей каждый раз увеличивается. Таким образом, для произвольного состояния \tilde{v} длины n хотя бы с одним нулём, получим равенство $A_{f,2}^{n-1}(\tilde{v}) = 0^n$. Следовательно, длина максимальной цепи вне циклов будет равна $n - 1$. Лемма 8 доказана.

5. Булевы функции от трёх переменных

Рассмотрим отдельно случаи, когда функция имеет ровно одну, две, три и четыре единицы.

5.1. Функции с одной единицей.

Лемма 9. Пусть $f : \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ — функция от трёх существенных переменных и существует единственный набор $\alpha \in \mathbb{Z}_2^3$ такой, что $f(\alpha) = 1$. В табл. 2 описаны все неподвижные точки, все циклы, все истоки и дано точное значение длины максимальной цепи вне циклов отображения $A_{f,2}$.

Т а б л и ц а 2

Свойства отображения $A_{f,2}$ для пороговой функции f от трёх существенных переменных с одной единицей

$f(x, y, z)$	Неподвижные точки	Циклы	Истоки содержат слова	$L_{\text{мц}}$
(10000000)	$(0001)^{n/4}$	$0^n \leftrightarrow 1^n$, $\delta_s(1^r 0^z) \rightarrow$ $\rightarrow \delta_{s+1}(0^{r+2} 1^{z-2})$, где $z_i \geq 3$	101, 1001	1
(01000000)	0^n	$\tilde{v} \rightarrow \delta_1(\tilde{v})$, где $11, 101 \notin \tilde{v}$	11, 101	1
(00100000)	$0^n, (01)^{n/2}$	$\tilde{v} \rightarrow \delta_2(\tilde{v})$, где $11 \notin \tilde{v}$	11	1
(00010000)	0^n	—	11, 101	2
(00001000)	$0^n, (100)^{n/3}$	$\tilde{v} \rightarrow \delta_3(\tilde{v})$, где $11, 101 \notin \tilde{v}$	11, 101	1
(00000100)	0^n	$(01)^{n/2} \leftrightarrow (10)^{n/2}$	11	$\lfloor n/2 \rfloor + 1$
(00000010)	0^n	—	11, 101	2
(00000001)	$0^n, 1^n$	—	101, 1001	$\lceil (n-1)/2 \rceil$

Доказательство. Описание свойств для функции $f(000) = 1$ следует из леммы 3. Для остальных функций по теореме 1 описаны все неподвижные точки, по теореме 2 — все истоки, а по лемме 4 — все циклы.

Все рабочие состояния системы для функций $f(0, 0, 1) = 1$, $f(0, 1, 0) = 1$ и $f(1, 0, 0) = 1$ принадлежат некоторым циклам. Стало быть, длина максимальной цепи вне циклов равна 1.

Рассмотрим длину максимальной цепи вне циклов для остальных функций.

(а) $f(0, 1, 1) = 1$. Пусть \tilde{v} — рабочее состояние, т. е. не содержит

подслов 11 и 101. Тогда $A_{f,2}(\tilde{v}) = 0^n$. Тем самым длина максимальной цепи вне циклов отображения $A_{f,2}$ равна 2.

(b) Аналогично для функции $f(1, 1, 0) = 1$.

(c) $f(1, 0, 1) = 1$. Рассмотрим исток $(01)^s 1$ для нечётного $n = 2s + 1$:

$$\begin{aligned} A_{f,2}((01)^s 1) &= 0(01)^s, & A_{f,2}^2((01)^s 1) &= \delta_1(0^3(01)^{s-1}), & \dots, \\ A_{f,2}^s((01)^s 1) &= \delta_{s-1}(0^{2s-1}01), & A_{f,2}^{s+1}((01)^s 1) &= 0^n. \end{aligned}$$

Таким образом, из леммы 5 длина максимальной цепи вне циклов равна $\lfloor n/2 \rfloor + 1$.

Рассмотрим чётное n . Тогда $A_{f,2}^{\lceil (n-1)/2 \rceil + 1}(11(10)^{(n-1)/2}) = 0^n$. Аналогично получаем, что длина максимальной цепи вне циклов равна

$$\lceil (n-1)/2 \rceil + 1 = \lfloor n/2 \rfloor + 1.$$

(d) $f(1, 1, 1) = 1$. Рассмотрим исток 01^{n-1} :

$$\begin{aligned} A_{f,2}(01^{n-1}) &= (100011111 \dots 1), & A_{f,2}^2(01^{n-1}) &= (110000011 \dots 1), \\ \dots, & & A_{f,2}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}(01^{n-1}) &= (000000000 \dots 0). \end{aligned}$$

Пусть состояние \tilde{v} содержит подслово 0. Тогда число единиц в состоянии $A_{f,2}(\tilde{v})$ будет как минимум на 2 меньше, чем в \tilde{v} . Следовательно, рассмотренная цепь является максимальной цепью вне циклов для отображения $A_{f,2}$. Лемма 9 доказана.

5.2. Функции с двумя единицами. Пусть пороговая булева функция от трёх переменных имеет в точности две единицы. В таком случае единицы соответствуют вершинам булева куба, инцидентным одному ребру. Тогда функция имеет одну фиктивную переменную, а мы рассматриваем функции, существенно зависящие от всех своих переменных.

5.3. Функции с тремя единицами. Опишем истоки отображения $A_{f,2}$, где f — функция с тремя единицами. Следующее свойство системы, описанное в [2], позволяет сократить число рассматриваемых функций.

Лемма 10. Пусть f и g — булевы функции от k переменных. Множества истоков отображений $A_{f,2}$ и $A_{g,2}$ совпадают, если

$$f(x_1, \dots, x_k) = g(\neg x_1, \dots, \neg x_k)$$

для любых $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z}_2$.

Лемма 11. Пусть $f : \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ — пороговая функция с тремя единицами. Состояние \tilde{v} является истоком отображения $A_{f,2}$ тогда и только тогда, когда \tilde{v} содержит хотя бы одно из следующих подслов:

- (i) 111 для $f(x, y, z) \in \{(01110000), (01001100), (01010100), (00101010), (00001110), (00110010)\}$;
- (ii) 1100, 11011 для $f(x, y, z) \in \{(10110000), (00001101)\}$;
- (iii) 101 для $f(x, y, z) \in \{(11010000), (10001010), (01010001), (00001011)\}$;
- (iv) 1001 для $f(x, y, z) \in \{(11100000), (10101000), (00010101), (00000111)\}$;
- (v) 0011, 11011 для $f(x, y, z) \in \{(10100010), (01000101)\}$;
- (vi) 1101 для $f(x, y, z) \in \{(10001100), (00110001)\}$;
- (vii) 1011 для $f(x, y, z) \in \{(11000100), (00100011)\}$;
- (viii) 010 для $f(x, y, z) \in \{(11001000), (00010011)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что если состояние \tilde{v} не содержит α , то \tilde{v} — рабочее состояние. Построим состояние \tilde{u} такое, что $A(\tilde{u}) = \tilde{v}$. Разобьём состояние \tilde{v} на блоки и найдём их возможные прообразы.

Пусть $k, s \geq 1$, а $t \geq 0$.

Рассмотрим функцию $f(x, y, z) = (01110000)$. Пусть состояние \tilde{v} избегает $\alpha = 111$. Тогда \tilde{v} можно разбить на два вида блоков $0^k 11$ и $0^k 1$. Каждый из них имеет следующие прообразы:

$$100^k 1* \rightarrow 0^k 11, \quad 1^k 01* \rightarrow 0^k 1,$$

где вместо $*$ может стоять и 0, и 1. Заметим, что значение $*$ однозначно выбирается в зависимости от следующего блока. Следовательно, можно собрать состояние \tilde{u} такое, что $A(\tilde{u}) = \tilde{v}$, а значит, \tilde{v} является рабочим состоянием.

Для остальных функций перечислим блоки и их прообразы:

$$\begin{array}{ll} f(x, y, z) = (01001100) & f(x, y, z) = (01010100) \\ 011^k 01 \rightarrow 0^k 11 & *011^k 0 \rightarrow 110^k \\ 010^k 1 \rightarrow 0^k 1 & *010^k \rightarrow 10^k \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha = 1100, 11011 & \\ f(x, y, z) = (10110000) & \\ 1^k 01* \rightarrow 0^k 1 & \\ 1^k 000^t 1* \rightarrow 0^k 1^t 01 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha = 101 & \\ f(x, y, z) = (11010000) & f(x, y, z) = (10001010) \\ 0^k 11^s 0^* & \rightarrow 1^k 00^s \quad 110^k 11^s \rightarrow 1^k 00^s \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha = 1001 & \\ f(x, y, z) = (11100000) & f(x, y, z) = (10101000) \\ 0^k 011^s 0^* & \rightarrow 1^k 000^s \quad *010^k \rightarrow 01^k \\ 0^k 10^* & \rightarrow 1^k 0 \quad *01^k 010^s \rightarrow 00^k 01^s \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha = 0011, 11011 & \alpha = 1101 \\ f(x, y, z) = (10100010) & f(x, y, z) = (10001100) \\ *1000^t 1^s & \rightarrow 101^t 0^s \quad 100^k 1^s 0 \rightarrow 1^k 00^s \\ *101 & \rightarrow 10 \quad 1010 \rightarrow 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha = 1011 & \alpha = 010 \\ f(x, y, z) = (11000100) & f(x, y, z) = (11001000) \\ 01^k 00^s 1 & \rightarrow 0^k 01^s \quad 100^k 1^s 0 \rightarrow 11^k 0^s \\ 0101 & \rightarrow 01 \end{array}$$

Доказательство для остальных функций следует из леммы 10. Лемма 11 доказана.

По теоремам 1, 3 и лемме 11 можно описать все неподвижные точки, некоторые циклы и все истоки отображения $A_{f,2}$ для функции f от трёх переменных с тремя единицами.

5.4. Функции с четырьмя единицами. Заметим, что все функции этого раздела самодвойственны.

Лемма 12. Пусть $f : \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ — пороговая функция с четырьмя единицами. Состояние \tilde{v} является истоком отображения $A_{f,2}$ тогда и только тогда, когда \tilde{v} содержит одно из следующих подслов или их инверсии:

- (i) 01001, 10010, 0100010 для $f(x, y, z) \in \{(11101000), (00010111)\}$;
- (ii) 01000 для $f(x, y, z) \in \{(11010100), (00101011)\}$;
- (iii) 11000, 00011, 0001000 для $f(x, y, z) \in \{(10110010), (01001101)\}$;
- (iv) 00010 для $f(x, y, z) \in \{(01110001), (10001110)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что если состояние \tilde{v} избегает этих слов, то \tilde{v} — рабочее состояние.

Рассмотрим функцию $f(x, y, z) = (11101000)$. Пусть состояние \tilde{v} избегает слов 01001, 10010, 0100010, 10110, 01101 и 1011101. Разобьём \tilde{v} на блоки вида $0(10)^k$, $1(01)^k$ и подряд идущие единицы и нули. Построим

прообразы этих блоков:

$$100^k 1 \rightarrow 11^k, \quad 011^k 0 \rightarrow 00^k, \quad 101(01)^k \rightarrow 0(10)^k, \quad 010(10)^k \rightarrow 1(01)^k.$$

Из этих прообразов можно собрать состояние \tilde{u} , являющееся прообразом \tilde{v} . Значит, \tilde{v} — рабочее состояние.

Рассмотрим $f(x, y, z) = (11010100)$. Пусть состояние \tilde{v} избегает слов 01000 и 10111 . Разобьём \tilde{v} на блоки подряд идущих единиц и нулей. Построим прообразы этих блоков:

$$\begin{aligned} 00^k 11 &\rightarrow 11^k; \\ 11^k 00 &\rightarrow 00^k; \\ *01 &\rightarrow 1; \\ *011 &\rightarrow 11; \\ *10 &\rightarrow 0; \\ *100 &\rightarrow 00. \end{aligned}$$

Аналогично построим прообразы блоков для следующих функций:

$f(x, y, z) = (10110010)$	$f(x, y, z) = (01110001)$
$0110 \rightarrow 11;$	$001^k \rightarrow 1^k;$
$1001 \rightarrow 00;$	$110^k \rightarrow 0^k;$
$000^k \rightarrow 1^k;$	$10* \rightarrow 0;$
$111^k \rightarrow 0^k;$	$01* \rightarrow 1;$
$100 \rightarrow 0;$	$110* \rightarrow 00;$
$001 \rightarrow 0;$	$001* \rightarrow 11.$
$110 \rightarrow 1;$	
$011 \rightarrow 1.$	

Во всех этих случаях построим прообраз состояния \tilde{v} . Тогда \tilde{v} — рабочее состояние. Доказательство для остальных функций следует из леммы 10. Лемма 12 доказана.

По теоремам 1, 3 и лемме 12 для функции f от трёх переменных с четырьмя единицами можно описать все неподвижные точки, некоторые циклы и все истоки отображения $A_{f,2}$.

Так как функции от трёх переменных с числом единиц больше четырёх являются двойственными к рассмотренным, графы функционирования также будут изоморфны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Батуева Ц. Ч.-Д. Свойства генных сетей циркулянтного типа с пороговыми функциями // Прикл. дискрет. математика. Прил. 2013. № 6. С. 72–73.
2. Батуева Ц. Ч.-Д. Дискретные динамические системы циркулянтного типа с пороговыми функциями в вершинах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 4. С. 25–32.
3. Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А. Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2005. № 14. С. 206–212.
4. Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И. Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.
5. Евдокимов А. А. Дискретные модели генных сетей: анализ и сложность функционирования // Совм. вып. журн. Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 3; Вестн. КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. Математика, механика, информатика. 2008. № 3. С. 31–37.
6. Евдокимов А. А., Лиховидова Е. О. Дискретная модель генной сети циркулянтного типа с пороговыми функциями // Вестн. Томск. гос. ун-та. Управление, вычисл. техника и информатика. 2008. № 2. С. 18–21.
7. Евдокимов А. А., Пережогин А. Л. Дискретные динамические системы циркулянтного типа с линейными функциями в вершинах сети // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 3. С. 39–48.
8. Кутумова Е. О., Евдокимов А. А. Обратимые состояния функционирования регуляторных контуров дискретных моделей генных сетей // Вестн. Томск. гос. ун-та. Управление, вычисл. техника и информатика. 2011. № 1. С. 85–94.
9. Лихошвай В. А., Голубятников В. П., Демиденко Г. В., Евдокимов А. А., Матвеева И. И., Фадеев С. И. Теория генных сетей // Системная компьютерная биология. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. С. 397–482.
10. Нажмиденова А. М., Пережогин А. Л. Дискретная динамическая система на двойном циркулянте // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 4. С. 80–88.
11. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980. 336 с.
12. Evdokimov A. A., Kutumova E. O. The discrete model of the gene networks regulatory loops with the threshold functions // Proc. 7th Int. Conf. Bioinformatics of genom regulation and structure (Novosibirsk, June 20–27, 2010). Novosibirsk: SB RAS Press, 2010. P. 155.
13. Kauffman S. A. At home in the universe: the search for the laws of self-organization and complexity. New York: Oxford Univ. Press, 1995. 336 p.

14. **Kauffman S. A., Smith R. G.** Adaptive automata based on Darwinian selection // *Physica D*. 1986. V. 22, No. 1–3. P. 68–82.
15. **Laubenbacher R., Mendes P.** A discrete approach to top-down modeling of biochemical networks // *Comput. Syst. Biology*. Burlington, MA: Elsevier Acad. Press, 2005. P. 229–247.

Батуева Цындыма Чимит-Доржиевна

Статья поступила

7 февраля 2015 г.

Исправленный вариант —

14 сентября 2015 г.

DISKRETNYYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII

January–March 2016. Volume 23, No. 1. P. 17–34

UDC 519.174

DOI: 10.17377/daio.2016.23.473

DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS WITH THRESHOLD FUNCTIONS
OF UP TO THREE VARIABLESTs. Ch.-D. Batueva¹¹Sobolev Institute of Mathematics,

4 Koptug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia

e-mail: batueva@math.nsc.ru

Abstract. We propose a method for finding sources of discrete dynamical systems of the circulant type with a q -valued arbitrary function at the vertices. We find all the sources, all the fixed points and some cycles, as well as lengths of some maximal chains outside cycles for the systems with Boolean threshold functions of up to three variables at the vertices. Tab. 1, ill. 4, bibliogr. 6.

Keywords: discrete dynamical system, circulant, gene network, functional graph, threshold function, source.

REFERENCES

1. **Ts. Ch.-D. Batueva**, Properties of gene networks with threshold functions, *Prikl. Diskretn. Mat., Suppl.*, No. 6, 72–73, 2013.
2. **Ts. Ch.-D. Batueva**, Discrete dynamical systems with threshold functions at the vertices, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **21**, No. 4, 25–32, 2014.
3. **E. D. Grigorenko, A. A. Evdokimov, V. A. Likhoshvai, and A. I. Lobareva**, The fixed points and cycles of automaton mappings modeling functioning of genetic networks, *Vestn. TGU, Suppl.*, No. 14, 206–212, 2005.
4. **G. V. Demidenko, N. A. Kolchanov, V. A. Likhoshvai, Yu. G. Matushkin, and S. I. Fadeev**, Mathematical modeling of regular contours of gene networks, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **44**, No. 12, 2276–2295, 2004. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.*, **44**, No. 12, 2166–2183, 2004.
5. **A. A. Evdokimov**, Discrete models of gene networks: Analysis and complexity of functioning, *Vychisl. Technol.*, **13**, 2008 and *Vestn. KazNU, Ser. Mat. Mekh. Inform.*, No. 3, 2008 (A joint issue based on Proc. Int. Conf. “Comput. Inf. Technol. Sci. Eng. Educ.”, Almaty, Kazakhstan, Sept. 10–14, 2008) Pt. II, pp. 31–37, Izd. KazNU, Almaty, 2008.
6. **A. A. Evdokimov and E. O. Likhovidova**, A discrete model for a gene network of a circulant type with threshold functions, *Vestn. TGU, Upr. Vychisl. Tech. Inform.* No. 2, 18–21, 2008.

7. **A. A. Evdokimov** and **A. L. Perezhogin**, Discrete dynamical systems of a circulant type with linear functions at the vertices of a network, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **18**, No. 3, 39–48, 2011. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **6**, No. 2, 160–166, 2012.
8. **E. O. Kutumova** and **A. A. Evdokimov**, Reversible states in functioning of regulatory loops in discrete models for gene networks, *Vestn. TGU, Upr. Vychisl. Tech. Inform.*, No. 1, 85–94, 2011.
9. **V. A. Likhoshvai**, **V. P. Golubyatnikov**, **G. V. Demidenko**, **A. A. Evdokimov**, **I. I. Matveeva**, and **S. I. Fadeev**, Theory of gene networks, in *Sistemnaya komp'yuternaya biologiya* (Computational Systems Biology), pp. 397–482, Izd. SO RAN, Novosibirsk, 2008.
10. **A. M. Nazhmidenova** and **A. L. Perezhogin**, A discrete dynamical system on a double circulant, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **21**, No. 4, 80–88, 2014.
11. **O. Ore**, *Theory of Graphs*, AMS, Providence, 1962 (AMS Colloq. Publ., Vol. 38). Translated under the title *Teoriya grafov*, Nauka, Moscow, 1980.
12. **A. A. Evdokimov** and **E. O. Kutumova**, The discrete model of the gene networks regulatory loops with the threshold functions, in *Abstr. 7th Int. Conf. Bioinform. Genome Regul. Struct. Syst. Biol.*, Novosibirsk, Russia, June 20–27, 2010, p. 155, SB RAS Press, Novosibirsk, 2010.
13. **S. A. Kauffman**, *At Home in the Universe: The Search for the Laws of Self-Organization and Complexity*, Oxford Univ. Press, New York, 1995.
14. **S. A. Kauffman** and **R. G. Smith**, Adaptive automata based on Darwinian selection, *Physica D*, **22**, No. 1–3, 68–82, 1986.
15. **R. Laubenbacher** and **P. Mendes**, A discrete approach to top-down modeling of biochemical networks, in A. Kriete and R. Eils, eds., *Computational Systems Biology*, pp. 229–247, Elsevier Acad. Press, Burlington, MA, USA, 2005.

Tsyndyma Ch.-D. Batueva

Received

7 February 2015

Revised

14 September 2015