ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2016. Том 23, № 1. С. 97–112

УДК 519.865 DOI: 10.17377/daio.2016.23.487

МНОГОГРАННИКИ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ СБАЛАНСИРОВАННЫХ ИГР С ТРАНСФЕРАБЕЛЬНОЙ ПОЛЕЗНОСТЬЮ

А. Б. Зинченко[1]
[1]Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова, 8а, 344090 Ростов-на-Дону, Россия
e-mail: zinch46@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются $(0,1)$-нормализованные выпуклые, 1-выпуклые (двойственно симплексные) ТП-игры n лиц и монотонные игры большого босса. Решена проблема характеризации крайних точек многогранников 1-выпуклых игр, симметричных выпуклых игр и игр большого босса, симметричных относительно коалиции слабых агентов. Для остальных многогранников описаны подмножества крайних точек. Табл. 2, библиогр. 15.

Ключевые слова: ТП-игра, сбалансированность, 1-выпуклость, выпуклость, игра большого босса.

Введение

Актуальным направлением развития теории кооперативных игр является изучение структуры полиэдральных множеств, состоящих из дележей, удовлетворяющих некоторым принципам «справедливости», и исследование вспомогательных полиэдров. Получены, например, характеризации крайних точек C-ядра выпуклых игр [11] и некоторых других специальных классов. Барицентры C-ядер таких игр совпадают с известными одноточечными решениями — значением Шепли в выпуклой игре [11], N-ядром в 1-выпуклой игре [7], τ-значением в игре большого босса [8] и т. д. Описание крайних точек многогранника Вебера [2] позволило вывести дополнительные свойства C-ядра, множества Вебера и значений Шепли, получить простые доказательства известных результатов.

Игру с трансферабельной полезностью (ТП-игру) (N,ν), где $N = \{1,\dots,n\}$, $\nu : 2^N \to \mathbb{R}$, $\nu(\varnothing) = 0$, можно отождествить с вектором пространства $\mathbb{R}^{2^n-1}$, компоненты которого равны $\nu(S)$, $S \in 2^N \setminus \{\varnothing\}$. Параметрическое описание подмножеств игр, образующих конусы или многогранники в этом пространстве, полезно для исследования поведения их решений. Кроме того, зная экстремальные элементы полиэдрального множества, можно получить любое количество неповторяющихся игр рассматриваемого класса. Генераторы игр нужны для проверки гипотез, оценки эффективности алгоритмов в среднем, для тестирующих программ, при разработке учебных заданий.

Игру (N,ν) называют *сбалансированной*, если она имеет непустое С-ядро. Существует альтернативное определение, использующее условие Бондаревой — Шепли $[1,10]$. В данной статье рассматриваются многогранники $(0,1)$-нормализованных ТП-игр, удовлетворяющих более простым, чем условие Бондаревой — Шепли, критериям непустоты С-ядра, и исследуются соотношения между этими множествами. Решена проблема характеризации крайних точек многогранников 1-выпуклых игр и симметричных выпуклых игр n лиц, а также игр большого босса, симметричных относительно коалиции слабых агентов. Для остальных многогранников описаны подмножества крайних точек.

1. Основные понятия

ТП-игра (N,ν) называется *неотрицательной*, если $\nu(S)\geqslant 0$, $S\in 2^N$, *N-существенной*, если $\nu(N)>\sum\limits_{i\in N}\nu(i)$, *симметричной*, если из $S,T\in 2^N$ и $|S|=|T|$ следует $\nu(S)=\nu(T)$, *(0,1)-нормализованной*, если

$$\nu(N)=1,\quad \nu(i)=0,\ i\in N, \tag{1}$$

простой, если $\nu(N)=1$ и $\nu(S)\in\{0,1\}$, $S\in 2^N$, *выпуклой*, если $\nu(S)+\nu(T)\leqslant\nu(S\cap T)+\nu(S\cup T)$, $S,T\in 2^N$, и *игрой единогласия u_T* коалиции T, если $T\neq\varnothing$, $u_T(S)=1$ для $S\supseteq T$, $u_T(S)=0$ в остальных случаях.

Будем отождествлять игру (N,ν) с её характеристической функцией ν, предполагать, что $n\geqslant 3$, и использовать следующие сокращения: $\nu(i)$ вместо $\nu(\{i\})$, $K\cup i$ вместо $K\cup\{i\}$ и т. д. Для коалиции $S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ и вектора $x\in\mathbb{R}^n$ имеем $x(S)=\sum\limits_{i\in S}x_i$, $x(\varnothing)=0$. Агенты $i,j\in N$ *симметричны* в игре ν, если $\nu(S\cup i)=\nu(S\cup j)$ для всех $S\subseteq N\setminus\{i,j\}$. Агент $i\in N$ называется *вето-игроком*, если $\nu(S)=0$ для $S\not\ni i$, $\mathrm{Veto}(\nu)$ — множество вето-игроков игры ν, $m^\nu=\left(m_i^\nu\right)_{i\in N}$ — вектор вкладов $m_i^\nu=\nu(N)-\nu(N\setminus i)$ игроков в максимальную коалицию. Пусть

$$\Omega=2^N\setminus\{N,\varnothing\},\quad \Omega_{[i,j]}=\{S\in 2^N\mid i\leqslant|S|\leqslant j\},\ i,j\in N,\ i\leqslant j,$$

$X(\nu) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = \nu(N)\}$. Множества *дележей* и *двойственных дележей*, а также С-*ядро* игры ν определяются следующим образом:

$$I(\nu) = \{x \in X(\nu) \mid x_i \geqslant \nu(i),\ i \in N\},$$
$$I^*(\nu) = \{x \in X(\nu) \mid x_i \leqslant m_i^\nu,\ i \in N\},$$
$$C(\nu) = \{x \in X(\nu) \mid x(S) \geqslant \nu(S),\ |S| \in \Omega\}.$$

Сбалансированная игра ν называется *точной*, если для каждой коалиции $S \in \Omega$ существует делёж $x \in C(\nu)$ такой, что $x(S) = \nu(S)$.

Основные решения игры ν инвариантны относительно стратегической эквивалентности, а каждая N-существенная игра имеет единственную $(0,1)$-форму, поэтому далее будем рассматривать нормализованные ТП-игры.

2. Выпуклые игры

Многогранник $(0,1)$-нормализованных выпуклых игр n лиц обозначим через CO^n. Любая игра $\nu \in \mathrm{CO}^n$ неотрицательна. Свойства решений выпуклых игр хорошо изучены. Предложены различные характеризации выпуклой игры. В [11, с. 14] перечислены все крайние лучи конуса выпуклых игр 4-х лиц. Им соответствуют 36 крайних точек многогранника CO^4. В [11] сказано, что экстремальные элементы конусов выпуклых игр пяти и более лиц неизвестны. Покажем, что множество целочисленных крайних точек $\mathrm{Ex}_I\mathrm{CO}^n$ многогранника CO^n состоит из $2^n - n - 1$ игр единогласия.

Теорема 1. $\mathrm{Ex}_I CO^n = \{u_T\}_{T \in \Omega_{[2,n]}}$.

Доказательство. Для любой игры $\nu \in \mathrm{CO}^n$ справедливо $0 \leqslant \nu(S) \leqslant 1$, $S \in 2^N$, т. е. CO^n содержится в единичном гиперкубе. Значит, целочисленными крайними точками могут быть только простые игры. Все игры единогласия простые и выпуклые. Если $|T| \geqslant 2$, то $u_T \in \mathrm{CO}^n$. Следовательно, $\{u_T\}_{T \in \Omega_{[2,n]}} \subseteq \mathrm{Ex}_I\mathrm{CO}^n$.

Возьмём $\nu \in \mathrm{Ex}_I\mathrm{CO}^n$. В разложении $\nu = \sum\limits_{T \in 2^N \setminus \{\varnothing\}} \delta_T u_T$ выпуклой игры по базису, состоящему из игр единогласия, коэффициенты δ_T неотрицательны [12]. Из $\nu(i) = 0$, $i \in N$, и $\nu(N) = u_T(N) = 1$, $T \in 2^N \setminus \{\varnothing\}$, вытекает $\sum\limits_{T \in \Omega_{[2,n]}} \delta_T = 1$, т. е. $\nu \in \mathrm{conv}\{u_T\}_{T \in \Omega_{[2,n]}}$. Учитывая предположение $\nu \in \mathrm{Ex}_I\mathrm{CO}^n$, получаем, что ν совпадает с одной из игр u_T. Доказано включение $\{u_T\}_{T \in \Omega_{[2,n]}} \supseteq \mathrm{Ex}_I\mathrm{CO}^n$. Теорема 1 доказана.

Крайние точки многогранника $S\mathrm{CO}^n \subset \mathrm{CO}^n$ симметричных, выпуклых и $(0,1)$-нормализованных игр характеризует

Теорема 2. $\mathrm{Ex}SCO^n = \{\nu^m\}_{m=1}^{n-1}$, *где*

$$\nu^m(S) = \begin{cases} f^m_{|S|}, & S \in \Omega_{[2,n-1]}, \\ 1, & |S| = n, \\ 0, & |S| = 1, \end{cases} \qquad f^m_{|S|} = \begin{cases} 0, & S \in \Omega_{[2,m]}, \\ \frac{|S|-m}{n-m}, & S \in \Omega_{[m+1,n-1]}. \end{cases}$$

Доказательство. Для $\nu \in S\mathrm{CO}^n$ и $S \in \Omega_{[2,n-1]}$ обозначим $f_{|S|} = \nu(S)$. Рассмотрим многогранник F^n, $n \geqslant 4$, заданный системой

$$\begin{cases} 2f_2 - f_3 \leqslant 0, \\ -f_{|S|} + 2f_{|S|+1} - f_{|S|+2} \leqslant 0, \quad S \in \Omega_{[2,n-3]}, \\ -f_{n-2} + 2f_{n-1} \leqslant 1, \\ f \in \mathbb{R}^{n-2}_+, \end{cases} \tag{2}$$

которая получена из условия выпуклости [12]

$$\nu(S \cup i) + \nu(S \cup j) \leqslant \nu(S \cup \{i,j\}) + \nu(S),$$

где $S \subseteq N \setminus \{i,j\}$, $i,j \in N$, $i \neq j$, и условия нормализации (1) с учётом предположения о симметричности игры. Матрица $A \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ системы (2) и обратная матрица определяются формулами

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} 2, & i = j, \\ -1, & (i = j+1) \vee (i = j-1), \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \qquad [A]^{-1}_{i,j} = \begin{cases} \frac{j(n-1-i)}{n-1}, & i > j, \\ \frac{i(n-1-j)}{n-1} & \text{иначе}, \end{cases}$$

из которых следует, что система, полученная из (2) заменой основных ограничений равенствами, имеет единственное решение, совпадающее с f^1.

Определим матрицы $P, R \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$, где

$$[P]_{i,j} = \begin{cases} \frac{n-1-j}{n-1-i}, & i \leqslant j, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \qquad [R]_{i,j} = \begin{cases} \frac{j}{i}, & i \geqslant j, \\ 0 & \text{иначе}. \end{cases}$$

Преобразуем (2), используя умножение слева на матрицу P. Получаем систему

$$\begin{cases} f_2 \leqslant \frac{1}{n-1}, \\ -f_{|S|-1} + \frac{n-|S|+1}{n-|S|} f_{|S|} \leqslant \frac{1}{n-|S|}, \quad S \in \Omega_{[3,n-1]}, \\ f \in \mathbb{R}^{n-2}_+, \end{cases} \tag{3}$$

из которой видно, что для любого $m = \overline{2, n-1}$ вектор f^m является решением системы $n-2$ линейно независимых уравнений

$$\begin{cases} f_{|S|} = 0, & S \in \Omega_{[2,m]}, \\ -f_{|S|-1} + \frac{n-|S|+1}{n-|S|} f_{|S|} = \frac{1}{n-|S|}, & S \in \Omega_{[m+1,n-1]}, \end{cases}$$

и удовлетворяет (3). Доказано включение $\{f^m\}_{m=1}^{n-1} \subseteq \mathrm{Ex}F^n$.

Возьмём $f^* \in \mathrm{Ex}F^n$ и предположим, что $f^* \neq f^m$ для всех $m = \overline{1, n-1}$. Используя умножение слева на матрицу R, представим систему (2) в виде

$$\frac{|S|}{|S|-1} f_{|S|} - f_{|S|+1} \leqslant 0, \quad |S| \in \Omega_{[2,n-2]},\ f_{n-1} \leqslant \frac{n-2}{n-1},\ f \in \mathbb{R}_+^{n-2}.$$

Если $f^*_{|S|} = 0$ для всех $S \in \Omega_{[2,n-1]}$, то $f^* = f^{n-1}$; противоречие. В противном случае (как видно из последней системы) существует коалиция $K \in \Omega_{[2,n-1]}$ такая, что $f^*_{|S|} = 0$ для $S \in \Omega_{[2,|K|-1]}$ и $f^*_{|S|} > 0$ для $S \in \Omega_{[|K|,n-1]}$. Если f^* удовлетворяет ограничениям системы (3), соответствующим коалициям $S \in \Omega_{[|K|,n-1]}$, как равенствам, то $f^* = f^{|K|-1}$; противоречие. Значит, f^* удовлетворяет, по крайней мере, одному из таких неравенств как строгому, т. е.

$$-f^*_{|T|-1} + \frac{n-|T|+1}{n-|T|} f^*_{|T|} < \frac{1}{n-|T|}$$

для некоторой коалиции $T \in \Omega_{[|K|,n-1]}$. Положим

$$\theta = \begin{cases} \frac{n-|T|}{n-|T|+1}\left(\frac{1}{n-|T|} + f^*_{|T|-1} - \frac{n-|T|+1}{n-|T|} f^*_{|T|}\right), & T \in \Omega_{[3,n-1]}, \\ \frac{1}{n-1} - f^*_2, & |T| = 2, \end{cases}$$

$$\beta = \min\left\{\theta, \min_{0 \leqslant k \leqslant n-|T|-1} \frac{n-|T|}{n-|T|-k} f^*_{|T|+k}\right\}$$

и рассмотрим векторы $\dot{f},\ \ddot{f} \in \mathbb{R}_+^{n-2}$, где

$$\dot{f}_{|S|} = \ddot{f}_{|S|} = f^*_{|S|}, \quad S \in \Omega_{[2,|T|-1]},$$

$$\dot{f}_{|T|+r} = f^*_{|T|+r} + \frac{n-|T|-r}{n-|T|}\beta, \quad \ddot{f}_{|T|+r} = f^*_{|T|+r} - \frac{n-|T|-r}{n-|T|}\beta,$$

$r = \overline{0, n-|T|-1}$. Из определения β вытекает, что векторы $\dot{f}, \ddot{f}$ неотрицательны и удовлетворяют неравенствам системы (3), соответствующим $S \in \Omega_{[2,|T|]}$. Для всех $S \in \Omega_{[|T|+r,n-1]}$ и $r = \overline{1, n-|T|-1}$ справедливо

$$-\left(f^*_{|T|+r-1} \pm \frac{n-|T|-r+1}{n-|T|}\beta\right) + \frac{n-|T|-r+1}{n-|T|-r}\left(f^*_{|T|+r} \pm \frac{n-|T|-r}{n-|T|}\beta\right)$$
$$= -f^*_{|T|+r-1} + \frac{n-|T|-r+1}{n-|T|-r} f^*_{|T|+r}.$$

Следовательно, $\dot{f}, \ddot{f}$ удовлетворяют остальным неравенствам системы (3). Получили $\dot{f}, \ddot{f} \in F^n$ и $f^* = \frac{\dot{f}+\ddot{f}}{2}$, что противоречит $f^* \in \mathrm{Ex}F^n$. Доказано включение $\mathrm{Ex}F^n \subseteq \{f^m\}_{m=1}^{n-1}$. Окончательно имеем $\mathrm{Ex}F^n = \{f^m\}_{m=1}^{n-1}$, $n \geqslant 4$.

Для многогранника F^3, определённого условием $2f_2 \leqslant 1$, $f_2 \in \mathbb{R}_+$, равенство $\mathrm{Ex}F^3 = \{f^m\}_{m=1}^{2}$ очевидно. Оператор $\Psi : \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^{2^n-1}$, который каждому вектору $f \in F^n$, $n \geqslant 3$, ставит в соответствие игру ν, где

$$\nu(S) = \Psi_{|S|}(f) = \begin{cases} f_{|S|}, & S \in \Omega_{[2,n-1]}, \\ 1, & |S| = n, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

отображает многогранник F^n на $S\mathrm{CO}^n$, сохраняя смежность граней. Следовательно, $ExS\mathrm{CO}^n = \{\Psi(f^m)\}_{m=1}^{n-1} = \{\nu^m\}_{m=1}^{n-1}$. Теорема 2 доказана.

Заметим, что игра ν^1 из теоремы 2 удовлетворяет полученному в [14] достаточному условию совпадения C-ядра с множеством двойственных дележей, а игра ν^{n-1} — достаточному условию совпадения C-ядра с множеством дележей.

Табл. 1 содержит векторы, являющиеся прообразами крайних точек многогранников симметричных, выпуклых, $(0,1)$-нормализованных игр трёх, четырёх и пяти лиц.

Таблица 1

Крайние точки многогранников F^n, $n \in \{3,4,5\}$

$f^m = \left(f_2^m, f_3^m, \ldots, f_{n-1}^m\right)$				
$n=3$	$f^2 = (0)$,	$f^1 = \left(\frac{1}{2}\right)$,		
$n=4$	$f^3 = (0,0)$,	$f^2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$,	$f^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,	
$n=5$	$f^4 = (0,0,0)$,	$f^3 = \left(0,0,\frac{1}{2}\right)$,	$f^2 = \left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$,	$f^1 = \left(\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right)$

3. Игры большого босса

В некоторых социально-экономических ситуациях, моделируемых кооперативными играми, один из участников (сильный агент) имеет больше возможностей, чем остальные (слабые агенты). Например, рынок с одним продавцом и несколькими покупателями, парламент с одной большой и несколькими малыми партиями, аналогичные ситуации банкротства и инвестирования, а также холдинг. Коалицию слабых агентов называют *союзом*. Соответствующие кооперативные игры часто бывают играми большого босса. Известно несколько типов таких игр: немонотонные, монотонные, тотальные (total), обобщённые, сильного босса. Все они сбалансированы. В играх большого босса многие концепции решения (переговорное множество, τ-значение, N-ядро, значение Шепли) имеют специальные свойства [8], а C-ядро является суперядром.

Монотонная игра большого босса [8] с игроком k в качестве босса определяется следующими условиями:

$$\begin{array}{ll}
\nu(S) \leqslant \nu(T), \quad S \subset T \subseteq N & \text{(монотонность)}, \\
\nu(S) = 0, \quad k \notin S \subset N & \text{(свойство босса)}, \\
\nu(N) - \nu(S) \geqslant \sum\limits_{i \in N \setminus S} m_i^\nu, \quad k \in S \subset N & \text{(свойство союза)}.
\end{array}$$

Если монотонность заменить условием неотрицательности игры ν и вектора m^ν, то получим немонотонную игру большого босса, являющуюся частным случаем клановой игры [9].

Крайними лучами конусов клановых игр и немонотонных игр большого босса являются простые игры [9]. При добавлении условия монотонности это свойство уже не выполняется. Многогранник монотонных (0,1)-нормализованных игр большого босса с игроком k в качестве босса обозначим через MB_k^n. Из монотонности вытекает неотрицательность игры $\nu \in \mathrm{MB}_k^n$. Неприводимая система для MB_k^n получена в [13]. Доказано, что MB_k^3 и MB_k^4 — целочисленные многогранники, а бинарное отношение $\nu \equiv \omega \;\leftrightarrow\; C(\nu) = C(\omega)$ на MB_k^n разбивает все целочисленные крайние точки этого многогранника на n классов эквивалентности. Описаны [13] некоторые типы нецелочисленных крайних точек, их значения Шепли и консенсус-значения. Был рассмотрен также многогранник $S\mathrm{MB}_k^n \subset \mathrm{MB}_k^n$ игр, симметричных относительно коалиции $N \setminus k$. Показано, что для его нецелочисленных крайних точек $\nu \in \mathrm{Ex}_{NI} S\mathrm{MB}_k^n$ справедливо

$$\nu(S) = \frac{n-2}{n-1}, \quad S \ni k,\ |S| = n-1,$$

и существует биекция между $\mathrm{Ex}_{NI} S\mathrm{MB}_k^n$, $n \geqslant 4$, и множеством

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^{n-3} : y_i \in \{0,1\},\ i = \overline{2, n-2}\}$$

двоичных кодов длины $n-3$. Доказана [13] следующая характеризующая

Теорема 3. *Имеет место равенство*:

$$\mathrm{Ex} S\mathrm{MB}_k^n = \left(\bigcup_{l=2}^{n-1} \nu^l \right) \cup \Big(\bigcup_{y \in Y} \nu^y \Big),$$

где

$$\nu^l(S) = \begin{cases} 1, & (|S| \geqslant l) \wedge (S \ni k), \\ 0 & \textit{иначе}, \end{cases} \qquad \nu^y(S) = \begin{cases} 1, & |S| = n, \\ 0, & (S \not\ni k) \vee (|S| = 1), \\ g^y_{|S|} & \textit{иначе}, \end{cases}$$

$$g^y_{|S|} \begin{cases} 0, & (y_2 = 0) \wedge (|S| = 2), \\ \frac{|S|-1}{n-1}, & (y_{|S|} = 1) \vee (|S| = n-1), \\ g^y_{|S|-1}, & (y_{|S|} = 0) \wedge (S \in \Omega_{[3,n-2]}). \end{cases}$$

$\left|\mathrm{Ex}SMB^n_k\right| = 2^{n-3} + n - 2.$

Табл. 2 содержит некоторые из двоичных кодов и соответствующие векторы g^y, определяющие крайние точки многогранника $S\mathrm{MB}^6_1$.

Т а б л и ц а 2

Двоичные коды и векторы g^y

(y_2, y_3, y_4)	$(0,0,0)$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(1\ ,0,\ 1)$	$(1,\ 1,\ 1)$
$(g^y_2, g^y_3, g^y_4, g^y_5)$	$(0,0,0,\frac{4}{5})$	$(0,\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5})$	$(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5})$	$(\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

4. Двойственно симплексные (1-выпуклые) игры

Двойственно симплексные (1-*выпуклые*) игры [7] возникают, например, при коллективном страховании [6]. Обозначим через $1\mathrm{CO}^n$ многогранник 1-выпуклых, неотрицательных, $(0,1)$-нормализованных игр n лиц. Он определяется (1) и следующими условиями: $\nu \in \mathbb{R}^{2^n-1}_+$,

$$\sum_{i\in N} \nu(N \setminus i) \leqslant n - 1, \tag{4}$$

$$\sum_{i\in N\setminus j} \nu(N \setminus i) \geqslant n - 2, \quad j \in N, \tag{5}$$

$$-\nu(S) + \sum_{i\in N\setminus S} \nu(N \setminus i) \geqslant n - |S| - 1, \quad S \in \Omega_{[2,n-2]}. \tag{6}$$

C-ядро 1-выпуклой игры совпадает с непустым множеством двойственных дележей, т. е. является симплексом. Крайние точки C-ядра легко вычисляются. Известен [7] простой метод нахождения τ-значения, которое в классе 1-выпуклых игр аддитивно, а также совпадает с N-ядром и барицентром C-ядра. В [15] описаны решения по Нейману — Моргенштерну некоторых 1-выпуклых игр. Каждое из них состоит из C-ядра и дополнительного полиэдрального множества.

Многогранник $1\mathrm{CO}^n$ имеет размерность $2^n - 2 - n$, так как значения $\nu(S)$ для пустой, максимальной и одноэлементных коалиций фиксированы, а симметричная игра $\widehat{\nu}$, нефиксированные компоненты которой определены формулой

$$\widehat{\nu}(S) = \begin{cases} \frac{n^2-n-1}{n^2-1}, & |S| = n-1, \\ \frac{1}{n+1}, & S \in \Omega_{[2,n-2]}, \end{cases}$$

принадлежит $1\mathrm{CO}^n$ и удовлетворяет всем неравенствам (4)–(6) как строгим. Насколько известно автору, структура многогранника $1\mathrm{CO}^n$ не исследовалась.

В следующих двух теоремах дано описание множеств целочисленных $\mathrm{Ex}_I 1\mathrm{CO}^n$ и нецелочисленных $\mathrm{Ex}_{NI} 1\mathrm{CO}^n$ крайних точек этого многогранника.

Теорема 4. *Имеет место равенство* $\mathrm{Ex}_I 1CO^n = \bigcup\limits_{k\in N} E^k$, *где* E^k — *множество игр, определённых формулой*

$$\nu(S) = \begin{cases} 0, & (S \subseteq N \setminus k) \vee (S = \{k\}), \\ 1, & (|S| = n-1) \wedge (S \ni k) \vee (S = N), \\ 0 \text{ или } 1 & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{7}$$

$|\mathrm{Ex}_I 1CO^n| = n \cdot 2^{(2^{n-1}-n-1)}$.

Доказательство. Из (4), (5) вытекает, что $\nu(N \setminus i) \leqslant 1$ для всех $i \in N$. Учитывая (6), имеем $\nu(S) \leqslant 1$, $S \in \Omega_{[2,n-2]}$, т. е. множество $\mathrm{Ex}_I 1\mathrm{CO}^n$ состоит из простых игр $\nu \in 1\mathrm{CO}^n$. Определённые (7) игры простые и принадлежат $1\mathrm{CO}^n$, следовательно, $\bigcup\limits_{k\in N} E^k \subseteq \mathrm{Ex}_I 1\mathrm{CO}^n$.

Пусть $\overline{\nu} \in \mathrm{Ex}_I 1\mathrm{CO}^n$. Тогда $\overline{\nu}$ — простая игра. Если $\overline{\nu}(N \setminus i) = 1$ для всех $i \in N$, то $\overline{\nu}$ не удовлетворяет (4); противоречие. Значит, существует $p \in N$ такое, что $\overline{\nu}(N \setminus p) = 0$. Из неравенств (5), соответствующих $j \in N \setminus p$, вытекает, что $\overline{\nu}(N \setminus i) = 1$ для всех $i \in N \setminus p$. Если $S \in \Omega_{[2,n-2]}$ и $S \not\ni p$, то соответствующее неравенство из (6) (после подстановки в него значений $\overline{\nu}(N \setminus i)$, $i \in N \setminus S$) принимает вид $\overline{\nu}(S) \leqslant 0$. Для таких S имеем $\overline{\nu}(S) = 0$. Если $S \in \Omega_{[2,n-2]}$ и $S \ni p$, то соответствующее неравенство из (6) примет вид $\overline{\nu}(S) \leqslant 1$. Для таких S $\overline{\nu}(S)$ может быть равным 0 или 1. Получили $\overline{\nu} \in E^p$, т. е. доказано включение $\mathrm{Ex}_I 1\mathrm{CO}^n \subseteq \bigcup\limits_{k\in N} E^k$.

Каждая игра $\nu \in E^k$, $k \in N$, имеет $2^{n-1} + n + 1$ фиксированных компонент (для пустой, максимальной, одноэлементных, $(n-1)$-элементных коалиций и коалиций $S \in \Omega_{[2,n-2]}$, не содержащих игрока k). Следовательно, число нефиксированных компонент равно $2^{n-1} - n - 1$. Нефиксированные компоненты могут принимать два значения, а количество множеств E^k равно n. Второе утверждение теоремы доказано. Теорема 4 доказана.

Следствие 1. *Множество* $\mathrm{Ex}_I 1CO^n$ *состоит из невыпуклых игр большого босса. Все игры* $\nu \in E^k$ *имеют одноэлементное C-ядро*

$$C(\nu) = \{e^k\}, \quad \text{где } e^k \in \mathbb{R}^n, \ e_i^k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Доказательство. Каждая игра $\overline{\nu} \in E^k$ и соответствующий вектор $m^{\overline{\nu}}$ неотрицательны. Свойство босса (для агента k) и свойство союза выполняются. Значит, целочисленными крайними точками многогранника $1\mathrm{CO}^n$ являются игры большого босса, среди которых есть монотонные и немонотонные. Возьмём $i, j \in N$, $i \neq j \neq k$. Согласно (7) $\overline{\nu}(N \setminus i) = \overline{\nu}(N \setminus j) = 1$, $\overline{\nu}(i, j) = 0$. Неравенство $\overline{\nu}(N \setminus i) + \overline{\nu}(N \setminus j) \leqslant \overline{\nu}(N) + \overline{\nu}(i, j)$ не выполняется, т. е. игра $\overline{\nu}$ невыпуклая; $C(\overline{\nu}) = \mathrm{conv}\{e^j\}_{j \in \mathrm{Veto}(\overline{\nu})}$, так как $\overline{\nu}$ — простая игра. Из $\mathrm{Veto}(\overline{\nu}) = \{k\}$ вытекает $C(\overline{\nu}) = \{e^k\}$. Следствие 1 доказано.

Замечание 1. Согласно единственному дележу C-ядра каждой игры ν, принадлежащей выпуклой оболочке элементов множества E^k, вся прибыль от кооперации достаётся агенту k (боссу), несмотря на его нулевые собственные возможности. В игре большого босса этот дележ, называемый *тираническим*, совпадает с переговорным множеством, k-ядром, τ-значением, AL-значением, любым селектором C-ядра. В данном случае более «справедливым» выглядит консенсус-значение игры или коалиционное консенсус-значение [5].

Замечание 2. Множества целочисленных крайних точек многогранников выпуклых и 1-выпуклых игр содержат игры большого босса. Однако согласно следствию 1 $\mathrm{Ex}_I \mathrm{CO}^n \cap \mathrm{Ex}_I 1\mathrm{CO}^n = \varnothing$.

Теорема 5. *Множество* $\mathrm{Ex}_{NI} 1CO^n$ *состоит из игр* ν, *где*

$$\nu(S) = \begin{cases} \frac{|S|-1}{n-1}, & |S| \in \{1, n-1, n\}, \\ 0 \text{ или } \frac{|S|-1}{n-1} & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{8}$$

$|\mathrm{Ex}_{NI} 1CO^n| = 4^{(2^{n-1}-n-1)}$.

Доказательство. Каждая из игр, определённых (8), принадлежит $1\mathrm{CO}^n$ и удовлетворяет системе $2^n - 2 - n$ линейно независимых уравнений

$$\sum_{i\in N\setminus j}\nu(N\setminus i)=n-2,\ j\in N,\quad \nu(S)=0,\ S\in\Omega^0\subseteq\Omega_{[2,n-2]},$$
$$-\nu(S)+\sum_{i\in N\setminus S}\nu(N\setminus i)=n-|S|-1,\ S\in\Omega_{[2,n-2]}\setminus\Omega^0.$$

Следовательно, все такие игры содержатся в $\mathrm{Ex}_{NI}1\mathrm{CO}^n$. Возьмём игру $\overline{\nu}\in\mathrm{Ex}_{NI}1\mathrm{CO}^n$ и предположим, что она не совпадает ни с одной из игр, определённых (8). Если существует такая коалиция $T\in\Omega_{[2,n-2]}$, что $\overline{\nu}(T)>0$ и $\overline{\nu}$ удовлетворяет соответствующему T неравенству (6) как строгому, то игры $\dot{\nu}$ и $\ddot{\nu}$, где

$$\dot{\nu}(T)=\overline{\nu}(T)+\beta,\quad \dot{\nu}(T)=\overline{\nu}(T)-\beta,$$
$$\dot{\nu}(S)=\ddot{\nu}(S)=\overline{\nu}(S),\quad S\subseteq N\setminus T,$$
$$\beta=\min\Big\{\overline{\nu}(T),\ \sum_{i\in N\setminus T}\overline{\nu}(N\setminus i)-\overline{\nu}(T)-n+|T|+1\Big\},$$

принадлежат $1\mathrm{CO}^n$ и $\overline{\nu}=\frac{\dot{\nu}+\ddot{\nu}}{2}$; противоречие. Значит,

$$\overline{\nu}(S)\Big(-\overline{\nu}(S)+\sum_{i\in N\setminus S}\overline{\nu}(N\setminus i)-n+|S|+1\Big)=0,\ S\in\Omega_{[2,n-2]}. \tag{9}$$

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1: $\overline{\nu}(N\setminus p)=0$ для некоторого $p\in N$. Тогда согласно (4), (5) $\overline{\nu}(N\setminus i)=1$ для всех $i\in N\setminus p$. Из (9) получаем, что $\overline{\nu}$ — целочисленная игра; противоречие.

Случай 2: $\overline{\nu}(N\setminus i)>0$ для всех $i\in N$.

Случай 2.1: $\overline{\nu}$ удовлетворяет всем неравенствам (5) как равенствам. Тогда $\overline{\nu}$ совпадает с одной из игр, определённых (8); противоречие.

Случай 2.2: существует $r\in N$ такое, что $\sum_{i\in N\setminus r}\overline{\nu}(N\setminus i)>n-2$. Система (4)–(6) содержит 2^n-n-1 неравенств и 2^n-n-2 переменных. Поэтому должны выполняться равенства

$$\sum_{i\in N}\overline{\nu}(N\setminus i)=n-1,\qquad \sum_{i\in N\setminus j}\overline{\nu}(N\setminus i)=n-2,\ j\in N\setminus r,$$

из которых получаем $\overline{\nu}(N\setminus r)=0$, что противоречит предположению $\overline{\nu}(N\setminus i)>0,\ i\in N$.

Доказано, что $\overline{\nu}$ совпадает с одной из игр, определённых (8). Каждая такая игра имеет $2+2n$ фиксированных компонент. Количество нефиксированных компонент равно $2(2^{n-1}-n-1)$, и каждая из них может принимать два значения. Второе утверждение теоремы доказано. Теорема 5 доказана.

Следствие 2. *Пусть* $\nu \in \mathrm{Ex}_{NI}1CO^n$. *Тогда*

$$C(\nu) = \mathrm{conv}\{g^r\}_{r\in N}, \text{ где } \quad g_i^r = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & i \neq r, \\ 0, & i = r. \end{cases}$$

Доказательство. Играм, определённым (8), соответствуют одинаковые векторы m^ν, где $m_i^\nu = \frac{1}{n-1}$, $i \in N$. Подставляя их в известные формулы для крайних точек множества двойственных дележей $I^*(\nu)$ и учитывая равенство $C(\nu) = I^*(\nu)$, получаем доказываемое представление С-ядра. Следствие 2 доказано.

Следствие 3. *Множество* $\mathrm{Ex}_{NI}1CO^n$ *содержит симметричную выпуклую игру* ν^1 *из теоремы* 2. *Игра* ν^1 *является уточнением каждой игры* $\nu \in \mathrm{Ex}_{NI}1CO^n$.

Доказательство. Любой сбалансированной игре ν соответствует единственная точная игра ν^E с тем же С-ядром, что исходная, $\nu^E(N) = \nu(N)$, $\nu^E(S) = \min\{x(S) : x \in C(\nu)\}$, $S \in \Omega$. Для игры $\nu \in \mathrm{Ex}_{NI}1\mathrm{CO}^n$ имеем

$$\min_{x\in C(\nu)} x(S) = \frac{|S|-1}{n-1}, \quad S \in \Omega,$$

т. е. $\nu^E = \nu^1$. Следствие 3 доказано.

Замечание 3. Невыпуклые сбалансированные ТП-игры, которым соответствует выпуклая точная игра, имеют специальные свойства. Из следствия 3 вытекает, что лексикографическое ядро (lexicore) нецелочисленных экстремальных игр многогранника $1\mathrm{CO}^n$ совпадает с их С-ядром и множеством двойственных дележей. AL-значения $AL(\nu)$ всех игр $\nu \in \mathrm{Ex}_{NI}1\mathrm{CO}^n$ равны $AL(\nu^1)$, а также значению Шепли выпуклой игры ν^1, т. е. принадлежат С-ядру $C(\nu) = C(\nu^1)$. Кроме того, все $\nu \in \mathrm{Ex}_{NI}1\mathrm{CO}^n$ имеют одинаковые решения, инвариантные относительно уточнения игры.

Замечание 4. Из следствий 1, 2 вытекает, что бинарное отношение $\nu \equiv \omega \ \leftrightarrow \ C(\nu) = C(\omega)$ разбивает $Ex1\mathrm{CO}^n$ на $n+1$ классов эквивалентности, причём все нецелочисленные крайние точки принадлежат одному и тому же классу.

5. Соотношения между многогранниками

Системы, определяющие многогранники $1\mathrm{CO}^n$ и MB_k^n, $k \in N$, содержат неравенства, противоположные условиям выпуклости. Тем не менее, они пересекаются с многогранником выпуклых игр. В [4] доказано, что

$$\mathrm{CO}^n \cap 1\mathrm{CO}^n = \{\nu^1\},$$

где ν^1 — симметричная игра из теоремы 2. Таким образом, единственная $(0,1)$-нормализованная игра может быть одновременно 1-выпуклой и выпуклой. Согласно теореме 4 и следствию 1 многогранник 1-выпуклых игр пересекается со всеми многогранниками монотонных игр большого босса:

$$1\mathrm{CO}^n \cap \mathrm{MB}_k^n \neq \varnothing, \quad k \in N.$$

Каждая игра единогласия u_T двухэлементной коалиции $T = \{i, j\}$ является клановой игрой с кланом T. Нетрудно проверить её принадлежность MB_i^n и MB_j^n, т. е. игра большого босса может иметь двух боссов. Это свойство, из которого следует, что все многогранники монотонных игр большого босса попарно пересекаются:

$$\mathrm{MB}_i^n \cap \mathrm{MB}_j^n \neq \varnothing, \quad i, j \in N, \ i \neq j,$$

не отражено в литературе. Из описания целочисленных точек многогранника MB_k^n [3] следует, что более двух боссов в игре $\nu \in \mathrm{MB}_k^n$ быть не может. Выпуклость игр единогласия u_T, $T = \{i, j\}$, $i \neq j$, и их принадлежность классу игр большого босса подтверждает известный факт

$$\mathrm{CO}^n \cap \mathrm{MB}_k^n \neq \varnothing, \quad k \in N.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бондарева О. Н.** Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр // Пробл. кибернетики. 1963. Вып. 10. С. 119–140.
2. **Васильев В. А.** Крайние точки многогранника Вебера // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 2. С. 17–55.
3. **Зинченко А. Б.** Свойства многогранника специальных функций множества // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. 2012. № 1. С. 13–17.
4. **Зинченко А. Б.** Устойчивость ядер кооперативной игры в форме характеристической функции // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. 2014. № 3. С. 14–18.
5. **Зинченко А. Б., Мироненко Г. В., Провоторова П. А.** Консенсус-значение для игр с коалиционной структурой // Мат. теория игр и её прил. 2010. Т. 2, вып. 1. С. 93–106.
6. **Driessen T. S. H., Fragnelli V., Katsev I. V., Khmelnitskaya A. B.** A game theoretic approach to co-insurance situations // Contrib. Game Theory Manage. 2010. Vol. 3. P. 49–66.
7. **Driessen T. S. H., Tijs S. H.** The τ-value, the nucleolus and the core for a subclass of games // Methods Oper. Res. 1983. Vol. 46. P. 395–406.
8. **Muto S., Nakayama M., Potters J., Tijs S.** On big boss games // Econ. Stud. Quarterly. 1988. Vol. 39, No. 4. P. 303–321.

9. **Potters J., Poos R., Tijs S., Muto S.** Clan games // Games Econ. Behav. 1989. Vol. 1, No. 3. P. 275–293.
10. **Shapley L. S.** On balanced sets and cores // Naval Res. Logist. Quarterly. 1967. Vol. 14, No. 4. P. 453–460.
11. **Shapley L. S.** Cores of convex games // Int. J. Game Theory. 1971. Vol. 1, No. 1. P. 11–26.
12. **Voorneveld M., Grahn S.** A minimal test for convex games and the Shapley value // Working paper series. Department of Economics Methods of Operations Research. 2001. No. 2. P. 1–8.
13. **Zinchenko A. B.** On polytope of (0-1)-normal big boss games: redundancy and extreme points // Contrib. Game Theory Manage. 2012. Vol. 5. P. 386–397.
14. **Zinchenko A. B.** A simple way to obtain the sufficient nonemptiness conditions for core of TU game // Contrib. Game Theory Manage. 2013. Vol. 6. P. 447–457.
15. **Zinchenko A. B.** Von Neumann–Morgenstern solutions for 1-convex games // Appl. Math. Sci. 2015. Vol. 9, No. 4. P. 161–169.

Зинченко Александра Борисовна

Статья поступила
22 апреля 2015 г.

Исправленный вариант —
16 октября 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
January–March 2016. Volume 23, No. 1. P. 97–112

UDC 519.865 DOI: 10.17377/daio.2016.23.487

POLYTOPES OF SPECIAL CLASSES OF BALANCED GAMES WITH TRANSFERABLE UTILITY

A. B. Zinchenko[1]
[1]Southern Federal University,
8a Milchakov Ave., 344090 Rostov-on Don, Russia
e-mail: zinch46@mail.ru

Abstract. The polytopes of (0,1)-normalized convex and 1-convex (dual simplex) n-person TU-games, as well as monotonic big boss games are considered. The problems of characterization of extreme points of polytopes of 1-convex games, symmetric convex games and big boss games, symmetric w.r.t. coalition of powerless agents, are solved. For other polytopes, the description of subsets of extreme points is given. Tab. 2, bibliogr. 15.

Keywords: TU-game, balancedness, 1-convexity, convexity, big boss game.

REFERENCES

1. **O. N. Bondareva,** Some applications of linear programming methods to cooperative game theory, in A. A. Lyapunov, ed., *Problemy kibernetiki* (Problems of Cybernetics), Vol. 10, pp. 119–140, Fizmatgiz, Moscow, 1963.
2. **V. A. Vasil'ev,** Extreme points of the Weber polytope, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **10**, No. 2, 17–55, 2003.
3. **A. B. Zinchenko,** Properties of a polytope of special set functions, *Izv. VUZ., Sev.-Kavk. Reg., Ser. Estestv. Nauki,* No. 1, 13–17, 2012.
4. **A. B. Zinchenko,** Stability of cores of a cooperative game in characteristic function form, *Izv. VUZ., Sev.-Kavk. Reg., Ser. Estestv. Nauki,* No. 3, 14–18, 2014.
5. **A. B. Zinchenko, G. V. Mironenko,** and **P. A. Provotorova,** A consensus value for games with coalition structure, *Mat. Teor. Igr Prilozh.,* **2**, No. 1, 93–106, 2010.
6. **T. S. H. Driessen, V. Fragnelli, I. V. Katsev,** and **A. B. Khmelnitskaya,** A game theoretic approach to co-insurance situations, in L. A. Petrosyan and N. A. Zenkevich, eds., *Contributions to Game Theory and Management,* Vol. 3, pp. 49–66, St. Petersbg. State Univ., St. Petersburg, 2010.

7. **T. S. H. Driessen** and **S. H. Tijs,** The τ-value, the nucleolus and the core for a subclass of games, *Methods Oper. Res.,* **46**, 395–406, 1983.
8. **S. Muto, M. Nakayama, J. Potters,** and **S. H. Tijs,** On big boss games, *Econ. Stud. Q.,* **39**, No. 4, 303–321, 1988.
9. **J. Potters, R. Poos, S. H. Tijs,** and **S. Muto,** Clan games, *Games Econ. Behav.,* **1**, No. 3, 275–293, 1989.
10. **L. S. Shapley,** On balanced sets and cores, *Nav. Res. Logist. Q.,* **14**, No. 4, 453–460, 1967.
11. **L. S. Shapley,** Cores of convex games, *Int. J. Game Theory,* **1**, No. 1, 11–26, 1971.
12. **M. Voorneveld** and **S. Grahn,** A minimal test for convex games and the Shapley value, *Work. Pap. Ser., Dep. Econ., Upps. Univ.* No. 2001:2, 1–8, 2001.
13. **A. B. Zinchenko,** On polytope of (0-1)-normal big boss games: redundancy and extreme points, in L. A. Petrosyan and N. A. Zenkevich, eds., *Contributions to Game Theory and Management,* Vol. 5, pp. 386–397, Grad. Sch. Manag. SPbU, St. Petersburg, 2012.
14. **A. B. Zinchenko,** A simple way to obtain the sufficient nonemptiness conditions for core of TU game, in L. A. Petrosyan and N. A. Zenkevich, eds., *Contributions to Game Theory and Management,* Vol. 6, pp. 447–457, Grad. Sch. Manag. SPbU, St. Petersburg, 2013.
15. **A. B. Zinchenko,** Von Neumann–Morgenstern solutions for 1-convex games, *Appl. Math. Sci.,* **9**, No. 4, 161–169, 2015.

Alexandra B. Zinchenko

Received
22 April 2015

Revised
16 October 2015