ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2016. Том 23, № 1. С. 82–96

УДК 519.854 DOI: 10.17377/daio.2016.23.489

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЕБЕРА НА ЛИНИИ С ЗАПРЕЩЁННЫМИ ЗОНАМИ

Г. Г. Забудский[1], *Н. С. Веремчук*[1]
[1]Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия
e-mail: zabudsky@ofim.oscsbras.ru, n-veremchuk@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается задача оптимального размещения взаимосвязанных объектов на линии с запрещёнными зонами. Необходимо минимизировать суммарную стоимость связей объектов с зонами и между собой. Найдены свойства задачи, позволяющие исходную непрерывную задачу свести к дискретной. Разработан алгоритм поиска приближённого решения. Приведены результаты вычислительного эксперимента. Табл. 1, библиогр. 15.

Ключевые слова: задача размещения, взаимосвязанные объекты, приближеённое решение.

Введение

Задача Вебера — одна из известных задач оптимального размещения взаимосвязанных объектов [5, 7, 10], например, технологического оборудования. При этом часто требуется «регулярность» размещения для создания прямых проездов и удобства технического обслуживания оборудования [4]. Кроме того, могут быть участки (зоны), в которых размещение запрещено, например, при модернизации предприятия, когда часть оборудования остаётся на месте. Если объекты соизмеримы с областью размещения, то они часто аппроксимируются прямоугольниками, иначе их можно рассматривать как материальные точки.

Для решения задач оптимального размещения прямоугольных объектов разработаны различные подходы [3, 4, 7, 8, 14]. Для не связанных между собой объектов предложены эвристические алгоритмы двумерной упаковки при наличии запрещённых зон [8] и ветвей и границ — для размещения на параллельных линиях с минимальной длиной и шириной прямоугольной оболочки [4]. Алгоритмы локальной оптимизации на

плоскости и динамического программирования на линии без запрещённых зон для взаимосвязанных объектов с критерием минимума суммарной стоимости связей описаны в [7, 14]. Для задачи с возможностью поворотов объектов и построением маршрутов для прокладки связей предложен эвристический алгоритм [3]. Важный подкласс задач оптимального размещения прямоугольных объектов — это задачи планирования сверхбольших интегральных схем (VLSI chip design). Известны различные подходы к решению таких задач, например, использование линейного и квадратичного программирования, имитации отжига, генетических алгоритмов [11–13].

В данной работе рассматривается задача Вебера с запрещёнными зонами для отрезков, например, проекций размещаемых прямоугольников на линию. Найдены свойства, позволяющие исходную непрерывную задачу свести к дискретной задаче, а также к решению серии задач меньшей размерности. Предложен двухэтапный алгоритм поиска приближённого решения, включающий построение допустимого расположения и минимизацию суммарной стоимости связей. Проведён вычислительный эксперимент с использованием разработанного программного обеспечения и решения задачи с применением модели частично-целочисленного линейного программирования и пакета IBM ILOG CPLEX.

1. Постановка задачи и её свойства

На отрезке длины LS с фиксированными объектами размещаются новые объекты — отрезки, центры которых связаны между собой и с фиксированными отрезками. Заданы области (запрещённые зоны), в которых размещение не допускается. Необходимо расположить новые объекты на отрезке вне запрещённых зон так, чтобы они не пересекались между собой и с фиксированными отрезками и суммарная стоимость связей между всеми объектами была минимальной [5]. Без ограничения общности можно считать, что левая граница отрезка длины LS находится в начале координат.

Будем называть фиксированные объекты и запрещённые зоны *зонами*, а размещаемые отрезки — *объектами*. Обозначим через X_i, F_j объекты и зоны с координатами центров x_i, b_j и длинами l_i, p_j, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$; $w_{ij} \geqslant 0$, $u_{ik} \geqslant 0$ — удельные стоимости связей между X_i и F_j, X_i и X_k, $i,\ k \in I$, $j \in J$, $i < k$. Необходимо разместить объекты $X_1, \ldots, X_n$ на отрезке вне зон $F_1, \ldots, F_m$ так, чтобы они не пересекались и суммарная стоимость связей объектов между собой и с зонами была минимальной. Математическая модель имеет следующий вид:

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{ij} |x_i - b_j| + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} |x_i - x_k| \to \min, \quad (1)$$

$$|x_i - b_j| \geqslant \frac{l_i + p_j}{2}, \quad i \in I,\ j \in J, \quad (2)$$

$$|x_i - x_k| \geqslant \frac{l_i + l_k}{2}, \quad i, k \in I,\ i < k, \quad (3)$$

$$\frac{l_i}{2} \leqslant x_i \leqslant LS - \frac{l_i}{2}, \quad i \in I. \quad (4)$$

Первая составляющая в (1) определяет суммарную стоимость связей между объектами и зонами, вторая — объектов между собой, а (2) и (3) — условия на непересечение.

Допустимая область B несвязная и состоит из набора r непересекающихся отрезков (блоков) B_k с длинами L_k, в которые размещаются объекты X_i, $i \in I$, $B = \bigcup\limits_{k=\overline{1,r}} B_k$. Задача (1)–(4) NP-трудна, поиск её допустимого решения — построение одномерной упаковки в контейнеры [1, 2, 6]. В данном случае упаковываются объекты с длинами l_i, $i \in I$, в контейнеры размерами L_k, $k = \overline{1,r}$. Кроме того, если нет зон, то (1)–(4) — задача оптимального линейного упорядочения [15], которая NP-трудна для произвольной структуры связей между объектами.

Для допустимого размещения будем называть *остатком* в блоке B_k отрезок между двумя соседними объектами без общей границы либо между границей блока и соседним объектом. Блок без объектов будем считать блоком с остатком. Пары элементов (объекты, зоны, остатки) будем называть *склеенными*, если они имеют общую границу.

Обозначим через $J_L(B_k)$, $J_R(B_k)$ множество зон левее, правее блока B_k, через $I_L(A)$, $I_R(A)$ — множество объектов левее, правее блока (зоны) A соответственно. Для каждого объекта X_i в блоке B_k определим суммарные стоимости связей Lw_i и Rw_i следующим образом:

$$Lw_i = \sum_{j \in J_L(B_k)} w_{ij} + \sum_{k \in I_L(B_k)} u_{ik}, \quad Rw_i = \sum_{j \in J_R(B_k)} w_{ij} + \sum_{k \in I_R(B_k)} u_{ik}.$$

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — допустимое решение задачи (1)–(4), которое однозначно определяет разбиение $X_1, \ldots, X_n$ по блокам. Обозначим через $I_k(x)$ множество номеров объектов в B_k, $I = \bigcup\limits_{k=\overline{1,r}} I_k(x)$, а через $H_k(x)$ — совокупность остатков в B_k для x. Пусть величина n_k задаёт мощность множества $I_k(x)$, тогда $|H_k(x)| \leqslant n_k + 1$. Отметим, что x можно представить в виде $x = (x^1, \ldots, x^r)$, где x^k — координаты центров объектов, расположенных в B_k с номерами из $I_k(x)$.

Утверждение 1. *Для произвольного допустимого решения x задачи (1)–(4) можно построить допустимое решение x' такое, что*

$$|H_k(x')| \leqslant 1,\ k = 1,\dots,r, \quad G(x') \leqslant G(x).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный блок B_k, для которого $|H_k(x)| \geqslant 2$. Тогда в B_k найдётся совокупность S склеенных объектов, слева и справа от которой имеются остатки. Обозначим через l_L и l_R длины этих остатков, а через $LI(S)$ и $RI(S)$ — подмножество номеров объектов из $I_k(x)$, находящихся левее и правее S соответственно. Если

$$\sum_{i\in S} Lw_i + \sum_{i\in S}\sum_{j\in LI(S)} u_{ij} \geqslant \sum_{i\in S} Rw_i + \sum_{i\in S}\sum_{j\in RI(S)} u_{ij},$$

то полагаем $x'_i = x_i,\ i \notin S$, и $x'_i = x_i - l_L,\ i \in S$. Тогда целевая функция $G(x')$ уменьшится на величину $l_L\big(\sum\limits_{i\in S} Lw_i + \sum\limits_{i\in S}\sum\limits_{j\in LI(S)} u_{ij}\big)$, а увеличится на $l_L\big(\sum\limits_{i\in S} Rw_i + \sum\limits_{i\in S}\sum\limits_{j\in RI(S)} u_{ij}\big)$:

$$\begin{aligned} G(x')-G(x) &= l_L\Big(\sum_{i\in S} Rw_i+\sum_{i\in S}\sum_{j\in RI(S)} u_{ij}\Big)-l_L\Big(\sum_{i\in S} Lw_i+\sum_{i\in S}\sum_{j\in LI(S)} u_{ij}\Big) \\ &= l_L\Big(\sum_{i\in S} Rw_i + \sum_{i\in S}\sum_{j\in RI(S)} u_{ij} - \Big(\sum_{i\in S} Lw_i + \sum_{i\in S}\sum_{j\in LI(S)} u_{ij}\Big)\Big) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Таким образом, число остатков в B_k уменьшится на единицу, а целевая функция не увеличится. Аналогично рассматривается случай, если

$$\sum_{i\in S} Lw_i + \sum_{i\in S}\sum_{j\in LI(S)} u_{ij} < \sum_{i\in S} Rw_i + \sum_{i\in S}\sum_{j\in RI(S)} u_{ij}.$$

Повторяем такой процесс пока $|H_k(x')| \geqslant 2$. Утверждение 1 доказано.

Из утверждения 1 следует, что для заданного разбиения объектов по блокам и фиксированного порядка их расположения можно построить размещение с наименьшим значением целевой функции, имеющее не более одного остатка в блоке. Длину остатка в блоке B_k обозначим через Δ_k.

Отметим, что число разбиений объектов по блокам не превосходит r^n. Для каждого разбиения достаточно рассматривать не более одного остатка в блоках, поэтому исходная непрерывная задача сводится к дискретной.

Обозначим через LB_k и RB_k координаты левой и правой границ блока B_k. Тогда при фиксированном разбиении объектов по блокам целевую функцию $G(x)$ можно представить в виде

$$G(x) = \sum_{k=1}^{r} G_k(x^k) + \overline{C},$$

где

$$G_k(x^k) = \sum_{s\in I_k(x)} \sum_{t\in I_k(x),\, t>s} u_{st}|x_s - x_t| + \sum_{s\in I_k(x)} |x_s - LB_k|\Big(\sum_{j\in J_L(B_k)} w_{sj} + \sum_{i\in I_L(B_k)} u_{si}\Big) + \sum_{t\in I_k(x)} |x_t - RB_k|\Big(\sum_{j\in J_R(B_k)} w_{tj} + \sum_{i\in I_R(B_k)} u_{ti}\Big),$$

$\overline{C}$ — некоторая константа.

Первая составляющая в $G_k(x^k)$ — суммарная стоимость связей между объектами в блоке B_k, вторая — между объектами из B_k и LB_k, третья — между объектами из B_k и RB_k.

Для случая, когда область размещения на отрезке ограничена слева и справа зонами, имеем

$$\overline{C} = \frac{1}{2}p_1 \sum_{k\in I_R(F_1)} w_{k1} + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{m-1} p_j\Big(\sum_{k\in I_L(F_j)} w_{kj} + \sum_{k\in I_R(F_j)} w_{kj} + 2\sum_{k\in I_L(F_j)}\sum_{t\in J,\, t>j} w_{kt} + 2\sum_{k\in I_R(F_j)}\sum_{s\in J,\, s<j} w_{ks} + 2\sum_{k\in I_L(F_j)}\sum_{t\in I_R(F_j)} u_{kt}\Big) + \frac{1}{2}p_m \sum_{k\in I_L(F_m)} w_{km}.$$

Таким образом, для нахождения оптимума задачи (1)–(4) при фиксированном разбиении объектов по блокам достаточно найти минимумы функций $G_k(x^k)$, $k = 1, \ldots, r$.

2. Алгоритм решения

Итерация алгоритма состоит из двух этапов. На первом этапе находится очередное допустимое разбиение объектов по блокам с помощью алгоритма последовательно-одиночного размещения [9], на втором — объекты переставляются в блоках. Критерии остановки алгоритма: время работы, число итераций, просмотр всех возможных разбиений. Трудоёмкость алгоритма можно оценить величиной $O(r^n(mn^2 + n^3))$.

Блок B_k будем называть *допустимым* для объекта X_i, если $L_k \geqslant l_i$, и *условно-допустимым*, если $L_k \geqslant \sum\limits_h l_h + l_i$, где $\sum\limits_h l_h$ — суммарная длина объектов, размещённых в B_k. Блок B_k будем называть *просмотренным* для X_i, если при фиксированном размещении $X_1, \dots, X_{i-1}$ объект X_i размещался в B_k, иначе — *непросмотренным*.

2.1. Поиск допустимых разбиений. Пусть $L_1 \geqslant \dots \geqslant L_r$, $l_1 \geqslant \dots \geqslant l_n$. В ходе работы алгоритма А1 для построения начального допустимого разбиения в заданном порядке для каждого объекта находится первый условно-допустимый блок. Если такого блока нет, то отменяется принадлежность блоку для предыдущего объекта, и т. д. После отмены для каждого следующего объекта поиск условно-допустимого блока начинается с B_1. Если допустимое разбиение не построено и при этом для X_1 просмотрены все допустимые блоки, то задача не имеет решения.

Для построения очередного допустимого разбиения, начиная с X_n, осуществляется поиск следующих условно-допустимых блоков для объектов.

Количество вариантов разбиений X_i, $i \in I$, по блокам $B_1, \dots, B_r$ не превосходит r^n. Действительно, в соответствии с алгоритмом А1 объект X_1 в каждом блоке будет фиксироваться не более одного раза, т. е. число просмотров не более r. Так как просмотр блоков для любого объекта начинается с B_1, на каждое изменение блока для X_1 будет просмотрено не более r блоков для X_2, т. е. общее число просмотров для X_1 и X_2 не превосходит r^2, и т. д.

Отметим, что с помощью алгоритма А1 будут просмотрены всевозможные допустимые разбиения. Действительно, при нахождении для произвольного объекта X_i следующего условно-допустимого блока просмотр блоков начинается с B_1 для всех X_j, $j > i$.

2.2. Минимизация суммарной стоимости связей. Предлагается два варианта алгоритма минимизации суммарной стоимости связей объектов: А2 — с учётом их длин и А3 — без учёта. Объекты в блоках последовательно склеиваются в зависимости от суммарной стоимости связей с объектами и зонами, расположенными левее (правее) блока. Обозначим через $N_L(B_k)$ множество объектов, склеенных между собой, самый левый из которых склеен с левой границей B_k, а через $N_R(B_k)$ — с правой границей B_k, и пусть объекты в B_k имеют номера от 1 до n_k.

Алгоритм А2

Шаг 0. $T := I_k(x)$; $N_L(B_k) := \varnothing$; $N_R(B_k) := \varnothing$.

Шаг 1. Если $(N_L(B_k) = \varnothing)\&(N_R(B_k) = \varnothing))$, то на шаг 2. Если $t \in N_L(B_k)$, то $Lw_i := Lw_i + Lw_t$, иначе $Rw_i := Rw_i + Rw_t$, для всех $i \in T$.

Шаг 2. Определяем t: $\max\limits_{i \in T} |Lw_i - Rw_i|/l_i = |Lw_t - Rw_t|/l_t$.

Шаг 3. Если $(Lw_t \geqslant Rw_t)$, то

$$x_t := LB_k + \sum_{i \in N_L(B_k)} l_i + \frac{l_t}{2}, \quad N_L(B_k) := N_L(B_k) \cup \{t\},$$

иначе $x_t := RB_k - \sum\limits_{i \in N_R(B_k)} l_i - \frac{l_t}{2}$, $N_R(B_k) := N_R(B_k) \cup \{t\}$.

Шаг 4. $T := T \backslash \{t\}$. Если $(T \neq \varnothing)$, то на шаг 1, иначе СТОП (объекты размещены в B_k).

В варианте А3 для склеивания выбирается объект X_t такой, что $\max\limits_{i \in T} |Lw_i - Rw_i| = |Lw_t - Rw_t|$.

Утверждение 2. *Пусть* $u_{st} = 0$, $s, t \in I_k(x)$, $s < t$, $k = 1, \ldots, r$, *и фиксировано разбиение объектов по блокам. Тогда оптимальное решение задачи* (1)–(4) *может быть найдено с помощью алгоритма* А2, *применяемого в каждом блоке.*

Доказательство. Для произвольного блока B_k справедливо, что Lw_i, Rw_i не зависят от порядка расположения объектов в B_k для любого $i \in I_k(x)$ и

$$G_k(x^k) = \sum_{s \in I_k(x)} |x_s - LB_k| \Big(\sum_{j \in J_L(B_k)} w_{sj} + \sum_{i \in I_L(B_k)} u_{si} \Big) + \sum_{t \in I_k(x)} |x_t - RB_k| \Big(\sum_{j \in J_R(B_k)} w_{tj} + \sum_{i \in I_R(B_k)} u_{ti} \Big).$$

Покажем, что в произвольном оптимальном решении объекты упорядочены в соответствии с алгоритмом А2. Рассмотрим варианты расположения двух соседних объектов X_s, X_t.

1. Объекты X_s, X_t склеены, $s, t \in N_L(B_k)$, $(Lw_s - Rw_s)/l_s \geqslant (Lw_t - Rw_t)/l_t$ и хотя бы одно из неравенств $Lw_s \geqslant Rw_s$, $Lw_t \geqslant Rw_t$ строгое.

Если объекты в оптимальном решении расположены в порядке X_t, X_s, то, переставляя их, получаем

$$Lw_s\Big(l_t + \frac{l_s}{2}\Big) + Lw_t\frac{l_t}{2} + Rw_s\Big(\frac{l_s}{2} + \Delta_k\Big) + Rw_t\Big(\frac{l_t}{2} + l_s + \Delta_k\Big) - Lw_s\frac{l_s}{2}$$

$$- Lw_t\left(l_s + \frac{l_t}{2}\right) - Rw_s\left(\frac{l_s}{2} + l_t + \Delta_k\right) - Rw_t\left(\frac{l_t}{2} + \Delta_k\right)$$

$$= Lw_s\left(l_t + \frac{l_s}{2} - \frac{l_s}{2}\right) + Lw_t\left(\frac{l_t}{2} - l_s - \frac{l_t}{2}\right) + Rw_s\left(\frac{l_s}{2} + \Delta_k - \frac{l_s}{2} - l_t - \Delta_k\right)$$

$$+ Rw_t\left(\frac{l_t}{2} + l_s + \Delta_k - \frac{l_t}{2} - \Delta_k\right) = l_t(Lw_s - Rw_s) + l_s(Rw_t - Lw_t) < 0,$$

что противоречит условию. Случай, когда $s, t \in N_R(B_k)$, рассматривается аналогично.

2. Объекты X_s, X_t склеены в порядке X_s, X_t, $s \in N_L(B_k)$, $t \in N_R(B_k)$, и хотя бы одно из неравенств $Rw_s \geqslant Lw_s$, $Lw_t \geqslant Rw_t$ строгое.

По алгоритму А2 оптимальным в этом случае будет расположение X_t, X_s. Предположим, что это не так. Тогда

$$Lw_s\left(l_t + \frac{l_s}{2}\right) + Lw_t\frac{l_t}{2} + Rw_s\frac{l_s}{2} + Rw_t\left(\frac{l_t}{2} + l_s\right) - Lw_s\frac{l_s}{2}$$

$$- Lw_t\left(l_s + \frac{l_t}{2}\right) - Rw_s\left(\frac{l_s}{2} + l_t\right) - Rw_t\frac{l_t}{2}$$

$$= Lw_s\left(l_t + \frac{l_s}{2} - \frac{l_s}{2}\right) + Lw_t\left(\frac{l_t}{2} - l_s - \frac{l_t}{2}\right) + Rw_s\left(\frac{l_s}{2} - \frac{l_s}{2} - l_t\right)$$

$$+ Rw_t\left(\frac{l_t}{2} + l_s - \frac{l_t}{2}\right) = l_t(Lw_s - Rw_s) + l_s(Rw_t - Lw_t) \geqslant 0,$$

что противоречит условию.

3. Объекты X_s и X_t соседние, остаток Δ_k расположен между ними. Покажем, что $s \in N_L(B_k)$, $t \in N_R(B_k)$. Возможные расположения X_s и X_t в этом случае: X_s, Δ_k, X_t и X_t, Δ_k, X_s. Тогда из оптимальности расположения X_s, Δ_k, X_t имеем

$$Lw_s\left(l_t + \Delta_k + \frac{l_s}{2}\right) + Lw_t\frac{l_t}{2} + Rw_s\frac{l_s}{2} + Rw_t\left(\frac{l_t}{2} + l_s + \Delta_k\right) - Lw_s\frac{l_s}{2}$$

$$- Lw_t\left(l_s + \Delta_k + \frac{l_t}{2}\right) - Rw_s\left(\frac{l_s}{2} + l_t + \Delta_k\right) - Rw_t\frac{l_t}{2}$$

$$= (l_t + \Delta_k)(Lw_s - Rw_s) + (l_s + \Delta_k)(Rw_t - Lw_t) \geqslant 0.$$

Если $t \in N_L(B_k)$ и $s \in N_L(B_k)$, то, склеивая их, получаем X_s, X_t, Δ_k, что приводит к уменьшению функции $G_k(x^k)$; противоречие с оптимальностью расположения X_s, Δ_k, X_t.

Если $t \in N_R(B_k)$ и $s \in N_R(B_k)$, то, поменяв X_s и X_t местами, имеем уменьшение функции $G_k(x^k)$, что также противоречит оптимальности расположения X_s, Δ_k, X_t.

Если $t \in N_L(B_k)$, $s \in N_R(B_k)$, получим противоречие с выполнением последнего неравенства.

Таким образом, $t \in N_R(B_k)$, $s \in N_L(B_k)$. Утверждение 2 доказано.

3. Модель частично-целочисленного линейного программирования

Запишем задачу (1)–(4) в виде модели ЧЦЛП. Поиск минимума функции (1) без условий (2), (3) можно сформулировать как задачу линейного программирования с помощью введения дополнительных параметров [10]: $s_{ij} \geqslant 0,\ t_{ik} \geqslant 0,\ i,k \in I,\ j \in J,\ i < k$, которые позволяют заменить модули в выражении (1) линейными неравенствами. Для записи условия непересечения объектов между собой и с зонами и определения взаимного порядка их расположения (левее, правее) введём дополнительные булевы переменные z^2_{ik}, $i,k \in I$, $i < k$, и z^1_{ij}, $i \in I$, $j \in J$ ($z^2_{ik} = 1$, если X_i располагается левее X_k, иначе $z^2_{ik} = 0$; $z^1_{ij} = 1$, если X_i левее F_j, иначе $z^1_{ij} = 0$). Получаем модель ЧЦЛП задачи (1)–(4):

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w_{ij} \cdot s_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} \cdot t_{ik} \to \min, \tag{5}$$

$$-s_{ij} \leqslant x_i - b_j \leqslant s_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{6}$$

$$-t_{ik} \leqslant x_i - x_k \leqslant t_{ik}, \quad i,k \in I,\ i < k, \tag{7}$$

$$\begin{cases} x_i - b_j - (l_i + p_j)/2 + C z^1_{ij} \geqslant 0, \\ b_j - x_i - (l_i + p_j)/2 + C\bigl(1 - z^1_{ij}\bigr) \geqslant 0, \end{cases} \quad i \in I,\ j \in J, \tag{8}$$

$$\begin{cases} x_i - x_k - (l_i + l_k)/2 + C z^2_{ik} \geqslant 0, \\ x_k - x_i - (l_i + l_k)/2 + C\bigl(1 - z^2_{ik}\bigr) \geqslant 0, \end{cases} \quad i,k \in I,\ i < k, \tag{9}$$

$$s_{ij} \geqslant 0, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{10}$$

$$t_{ik} \geqslant 0, \quad i,k \in I,\ i < k, \tag{11}$$

$$z^1_{ij} \in \{0,\ 1\}, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{12}$$

$$z^2_{ik} \in \{0,\ 1\}, \quad i,k \in I,\ i < k, \tag{13}$$

$$\frac{l_i}{2} \leqslant x_i \leqslant LS - \frac{l_i}{2}, \quad i \in I. \tag{14}$$

Достаточно большая константа $C > 0$ необходима для выполнения альтернативных условий и может выбрана, например, так: $C = 2\sum\limits_{k=1}^{r} L_k$.

Используя указанную модель, задача (1)–(4) может быть решена, например, с помощью пакета IBM ILOG CPLEX.

4. Результаты вычислительного эксперимента

Проведён вычислительный эксперимент по сравнению решений, полученных с помощью разработанного алгоритма и пакета IBM ILOG CPLEX 12.2 с применением модели ЧЦЛП. Эксперимент проводился на компьютере со следующими техническими характеристиками: Intel Core$^{\text{TM}}$ i5-2450M 2.50GHz 6,00ГБ. Варианты алгоритма реализованы в среде Borland C++ Builder Version 6.0 (Build 10.166). Исходные данные генерировались случайным образом с помощью функции random(). Протестировано свыше 200 задач, при этом количество запрещённых зон варьировалось от 2 до 10, а объектов — от 5 до 40. Критерий остановки предложенного алгоритма — перебор всех допустимых разбиений. Частично результаты сравнения решений, полученных с помощью алгоритма A2 и пакета, приведены в табл. 1, где $F2$, F_{cplex} — значения целевых функций, найденных алгоритмом и пакетом. В среднем относительная погрешность A2 составила 3%.

Случайным образом с равномерным распределением сгенерировано три серии тестовых задач, каждая из которых включает 15 задач одинаковой размерности. Для каждой серии сравнивалось среднее время работы алгоритма A2 и пакета CPLEX. Для размерностей $|I| = 20$, $|J| = 10$ и $|I| = 40$, $|J| = 6$ не удалось получить решения с помощью пакета CPLEX за время 1000 с; среднее время решения задачи таких размерностей с помощью предложенного алгоритма A2 составило 214 с и 490 с при погрешности 3%. Стоит отметить, что среднее время решения задачи размерности $|I| = 5$, $|J| = 5$ с помощью алгоритма A2 составило 1,29 с, что превышает среднее время работы пакета, равное 0,016 с.

Также проведён вычислительный эксперимент по сравнению решений, полученных с помощью разработанных вариантов алгоритма минимизации суммарной стоимости связей. Исследовалось влияние учёта размеров объектов на полученное решение, для этого рассматривалось три типа тестовых задач в зависимости от разницы длин объектов. При разнице длин объектов от 0 до 5 единиц, от 6 до 9, от 10 до 50 вариант алгоритма с учётом длин A2 находит решение на $1,4\%$, $2,4\%$, $5,5\%$ лучше, чем без учёта длин A3.

Заключение

Исходная непрерывная задача Вебера на линии с запрещёнными зонами для отрезков сведена к дискретной. Разработан алгоритм построения

приближённого решения, состоящий из двух этапов — поиска допустимого размещения и минимизации суммарной стоимости связей. При этом решается серия задач меньшей размерности. Проведён вычислительный эксперимент с использованием предложенного алгоритма и решения задачи с применением пакета IBM ILOG CPLEX и модели частично-целочисленного линейного программирования.

Таблица 1

№	n	m	$F2$	F_{cplex}	Отн.погр., %
1	4	3	506,5	506,5	0,0
2	3	3	2113,0	2113,0	0,0
3	4	3	4751,5	4751,5	0,0
4	5	4	15610,0	14802,0	5,5
5	4	3	7850,5	7787,5	0,8
6	5	3	1287,0	1287,0	0,0
7	2	3	1120,0	1120,0	0,0
8	4	3	1717,0	1717,0	0,0
9	4	3	1804,5	1515,0	19,1
10	6	3	668,0	668,0	0,0
11	6	4	7467,0	7467,0	0,0
12	6	5	7841,5	7841,5	0,0
13	5	5	13991,0	12580,0	0,0
14	5	5	15525,0	14519,0	6,9
15	5	5	15059,5	14996,5	0,4
16	6	5	16277,5	16277,5	0,0
17	6	5	18369,0	18369,0	0,0
18	6	5	17646,5	17646,5	0,0
19	8	2	12496,5	11760,5	6,3
20	8	2	27640,0	26250,0	5,3
21	7	4	7556,0	7144,0	5,8
22	7	4	8172,0	7657,0	6,7
23	7	4	7851,5	7851,5	0,0
24	7	4	29638,5	29638,5	0,0
25	8	2	20833,5	17727,5	17,5

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гончаров Е. Н., Кочетов Ю. А.** Вероятностный поиск с запретами для дискретных задач безусловной оптимизации // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2002. Т. 9, № 2. С. 13–30.
2. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.

3. **Ерзин А. И., Чо Д. Д.** Задача одновременного размещения и маршрутизации при проектировании интегральных схем // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 177–190.
4. **Забудский Г. Г., Амзин И. В.** Алгоритмы компактного размещения технологического оборудования на параллельных линиях // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 86–94.
5. **Забудский Г. Г., Веремчук Н. С.** Алгоритмы поиска приближённого решения задачи Вебера на линии с запрещёнными зонами // Мат. XV Всерос. конф. «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 2–6 марта, 2015 г.). Екатеринбург: ИММ Уро РАН, 2015. С. 133.
6. **Мухачёва Э. А.** Обзор и перспективы развития комбинаторных методов решения задач раскроя и упаковки // Мат. междунар. конф. «Дискретный анализ и исследование операций». Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. С. 80–87.
7. **Панюков А. В.** Задача размещения прямоугольных объектов с минимальной стоимостью связывающей сети // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8, № 1. С. 70–87.
8. **Руднев А. С.** Вероятностный поиск с запретами для задачи упаковки кругов и прямоугольников в полосу // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 4. С. 61–86.
9. **Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.** Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наукова думка, 1986. 268 с.
10. **Трубин В. А.** Эффективный алгоритм для задачи Вебера с прямоугольной метрикой // Кибернетика. 1978. № 6. С. 67–70.
11. **Cheng L., Wong M. D. F.** Floorplan design for multi-million gate FPGAs // Proc. 2004 IEEE/ACM Int. Conf. Comput.-Aided Des. (San Jose, CA, USA, Nov. 7–11, 2004). Washington, DC: IEEE Comput. Soc., 2004. P. 292–299.
12. **Cong J., Jagannathan A., Reinman G., Romesis M.** Microarchitecture evaluation with physical planning // Proc. 40th Annu. Des. Autom. Conf. (Anaheim, USA, June 2–6, 2003). New York: ACM, 2003. P. 32–35.
13. **Kahng A. B.** Classical floorplanning harmful? // Proc. 2000 Int. Symp. Phys. Des. (San Diego, USA, Apr. 9–12, 2000). New York: ACM, 2000. P. 207–213.
14. **Simmons D. M.** One-dimensional space allocation: an ordering algorithm // Oper. Res. 1969. Vol. 17, No. 5. P. 812–826.

15. **Suresh G., Sahu S.** Multiobjective facility layout using simulated annealing // Int. J. Prod. Econ. 1993. Vol. 32, No. 2. P. 239–254.

Забудский Геннадий Григорьевич,
Веремчук Наталья Сергеевна

Статья поступила
29 апреля 2015 г.

Исправленный вариант —
10 августа 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
January–March 2016. Volume 23, No. 1. P. 82–96

UDC 519.854 DOI: 10.17377/daio.2016.23.489

AN ALGORITHM FOR APPROXIMATE SOLUTION TO THE WEBER PROBLEM ON A LINE WITH FORBIDDEN GAPS

G. G. Zabudsky[1] and *N. S. Veremchuk*[1]
[1] Omsk department of S. L. Sobolev Institute of Mathematics, SB RAS,
13 Pevtsov St., 644099 Omsk, Russia
e-mail: zabudsky@ofim.oscsbras.ru, n-veremchuk@rambler.ru

Abstract. The location problem of interconnected facilities on a line with forbidden gaps is considered. The properties of the problem which allow the initial continuous problem to be reduced to the discrete problem are found. The approximate algorithm for solving the problem is developed and the results of computational experiments are presented. Tab. 1, bibliogr. 15.

Keywords: location problem, interconnected facilities, approximate decision.

REFERENCES

1. **E. N. Goncharov** and **Yu. A. Kochetov,** Probabilistic search with exclusions for discrete unconstrained optimization, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **9**, No. 2, 13–30, 2002.
2. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness,* Freeman, San Francisco, 1979. Translated under the title *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi,* Mir, Moscow, 1982.
3. **A. I. Erzin** and **J. D. Cho,** Concurrent placement and routing in the design of integrated circuits, *Avtom. Telemekh.,* No. 12, 177–190, 2003. Translated in *Autom. Remote Control,* **64**, No. 12, 1988–1999, 2003.
4. **G. G. Zabudskii** and **I. V. Amzin,** Algorithms of compact location for technological equipment on parallel lines, *Sib. Zh. Ind. Mat.,* **16**, No. 3, 86–94, 2013.
5. **G. G. Zabudskii** and **N. S. Veremchuk,** Algorithms of approximate solution of the Weber problem on a line with forbidden gaps, in *Materialy XV Vserossiiskoi konferentsii "Matematicheskoe programmirovanie i prilozheniya"* (Proc. XV All-Russian Conf. "Mathematical Programming and Applications"), *Ekaterinburg, Russia, Mar. 2–6, 2015,* p. 133, IMM UrO RAN, Ekaterinburg, 2015.

6. **E. A. Mukhacheva,** The review and prospects of development of combinatorial methods for solution of cutting and packing problems, in *Materialy rossiiskoi konferentsii "Diskretnaya optimizatsiya i issledovanie operatsii"* (Proc. Russian Conf. "Discrete Optimization and Operation Research"), *Novosibirsk, Russia, June 24–28, 2002,* pp. 80–87, Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 2002.
7. **A. V. Panyukov,** The problem of locating rectangular plants with minimal cost for the connecting network, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **8**, No. 1, 70–87, 2001.
8. **A. S. Rudnev,** Probabilistic tabu search algorithm for the packing circles and rectangles into the strip, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **16**, No. 4, 61–86, 2009.
9. **Yu. G. Stoyan** and **S. V. Yakovlev,** *Matematicheskie modeli i optimizatsionnye metody geometricheskogo proektirovaniya* (Mathematical Models and Optimization Methods in Geometric Design), Naukova Dumka, Kiev, 1986.
10. **V. A. Trubin,** Effective algorithm for the Weber problem with a rectangular metric, *Kibern.,* No. 6, 67–70, 1978. Translated in *Cybern.,* **14**, No. 6, 874–878, 1978.
11. **L. Cheng** and **M. D. F. Wong,** Floorplan design for multi-million gate FPGAs, in *Proc. 2004 IEEE/ACM Int. Conf. Comput.-Aided Des., San Jose, CA, USA, Nov. 7–11, 2004,* pp. 292–299, IEEE Comput. Soc., Washington, DC, USA, 2004.
12. **J. Cong, A. Jagannathan, G. Reinman,** and **M. Romesis,** Microarchitecture evaluation with physical planning, in *Proc. 40th Annual Des. Autom. Conf., Anaheim, USA, June 2–6, 2003,* pp. 32–35, ACM, New York, 2003.
13. **A. B. Kahng,** Classical floorplanning harmful?, in *Proc. 2000 Int. Symp. Phys. Des., San Diego, USA, Apr. 9–12, 2000,* pp. 207–213, ACM, New York, 2000.
14. **D. M. Simmons,** One-dimensional space allocation: An ordering algorithm, *Oper. Res.,* **17**, No. 5, 812–826, 1969.
15. **G. Suresh** and **S. Sahu,** Multiobjective facility layout using simulated annealing, *Int. J. Prod. Econ.,* **32**, No. 2, 239–254, 1993.

Gennady G. Zabudsky,
Natalia S. Veremchuk

Received
29 April 2015
Revised
10 August 2015