ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2016. Том 23, № 1. С. 35–50

УДК 519.85 DOI: 10.17377/daio.2016.23.493

ЗАДАЧА КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ОБЪЁМАМИ ПРОИЗВОДСТВА *)

В. Л. Береснев[1,2], *А. А. Мельников*[1,2]
[1]Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
[2]Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия
e-mail: beresnev@math.nsc.ru, melnikov@math.nsc.ru

Аннотация. Рассматривается математическая модель, относящаяся к задачам конкурентного последовательного размещения предприятий. В этих задачах две соперничающие стороны последовательно открывают свои предприятия, стремясь «захватить» потребителей и максимизировать свою прибыль. В предлагаемой модели предполагается, что возможности предприятий по обслуживанию «захваченных» потребителей ограничены заданными объёмами производства этих предприятий. Модель формулируется в виде задачи двухуровневого целочисленного программирования, для которой исследуется вопрос поиска оптимального (кооперативного) решения. Показано, что данная задача может быть представлена как задача максимизации некоторой псевдобулевой функции с числом переменных, равным числу возможных мест размещения предприятий. Предлагается также способ вычисления верхней границы значений псевдобулевой функции на подмножествах решений, заданных частичными (0,1)-векторами, основанный на использовании системы оценочных подмножеств. Библиогр. 15.

Ключевые слова: двухуровневое математическое программирование, верхняя граница, конкурентное размещение.

Введение

Исследуется задача конкурентного размещения предприятий, которая отличается от аналогичных задач, рассмотренных в [2, 3, 5, 6, 8, 11], наличием ограничений на объёмы производства открываемых предприятий. В моделях конкурентного размещения в отличие от классической

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15–01–01446).

задачи размещения [1, 14] рассматривается две соперничающие стороны, последовательно открывающие предприятия и стремящиеся достичь своих целей. Цели сторон, обычно называемых Лидером и Последователем, связаны с «захватом» потребителей и удовлетворением их потребностей. При этом возможность захватить данного потребителя одной из сторон зависит от предпочтений этого потребителя, позволяющих понять, какая из сторон открыла наиболее предпочтительное для него предприятие.

Задача Лидера в этом соперничестве состоит в определении такого множества открываемых им предприятий, которое позволяет получить максимальную прибыль при условии, что часть потребителей будет захвачена Последователем. Задача Последователя заключается в том, чтобы, зная множество открытых Лидером предприятий, открыть такие предприятия, которые позволят получить наибольшую прибыль. Игровое взаимодействие сторон при конкурентном последовательном размещении предприятий можно рассматривать как игру Штакельберга [15].

Формально задача конкурентного последовательного размещения предприятий представляет собой задачу двухуровневого целочисленного программирования [7, 9, 10, 12], включающую в себя задачи верхнего уровня (задачу Лидера) и нижнего уровня (задачу Последователя). Вид этих задач зависит от того, какие в рассматриваемой модели приняты правила выбора сторонами открытого предприятия для обслуживания захваченного потребителя и какие дополнительные ограничения наложены на множества открываемых предприятий и на возможности предприятий по обслуживанию потребителей.

В исследуемой ниже модели присутствуют ограничения на объёмы производства предприятий, открываемых как Лидером, так и Последователем. Это означает, что каждое открытое предприятие может быть использовано для обслуживания только такого множества потребителей, чья суммарная потребность не превышает заданного объёма производства данного предприятия. При наличии таких ограничений естественно предполагать, что обе стороны используют правило свободного выбора открытого предприятия для обслуживания захваченного потребителя [3]. При действии этого правила сторона, захватившая потребителя, может использовать для его обслуживания любое открытое предприятие, которое не хуже с точки зрения предпочтений данного потребителя, чем любое предприятие, открытое другой стороной.

Важной особенностью настоящей модели, как и ранее рассмотренных постановок задач конкурентного размещения, является необходимость уточнения понятия наилучшего решения. Это связано с возмож-

ной неединственностью оптимального решения задачи Последователя, что создаёт неопределённость при вычислении значений целевой функции задачи Лидера.

Для моделей конкурентного размещения, рассмотренных в [2, 3, 5, 6, 8, 11], ставится задача поиска оптимальных гарантированных (некооперативных) решений и оптимальных (кооперативных) решений. В настоящей работе исследуется задача поиска оптимального решения рассматриваемой модели конкурентного размещения предприятий с ограниченными объёмами производства. Указанный выбор продиктован желанием использовать для построения алгоритмов поиска наилучшего решения разработанный в [2, 3, 5, 6, 8, 11] метод. Основная идея этого метода состоит в представлении исследуемой задачи в виде задачи максимизации некоторой псевдобулевой функции от числа переменных, равным числу возможных мест размещения предприятий Лидера. Для реализации указанного представления необходимо показать, что при фиксированном размещении предприятий Лидера соответствующее наилучшее решение может быть получено как оптимальное решение некоторой «обычной» задачи целочисленного программирования, размерность которой сравнима с размерностью задач Лидера и Последователя.

В настоящей работе показано, что в случае поиска оптимального решения необходимая псевдобулева функция может быть построена. Для вычисления значения этой функции и построения соответствующего оптимального решения необходимо решить две задачи целочисленного линейного программирования. Первая из них — задача Последователя, а вторая — некоторая вспомогательная задача, размерность которой равна суммарной размерности задач Лидера и Последователя.

Другим важным условием реализации указанного метода является возможность эффективного вычисления верхней границы построенной псевдобулевой функции на подмножествах (0,1)-векторов, заданных частичными (0,1)-векторами. В работе предложен способ построения верхней границы, основанный на использовании модифицированной системы оценочных подмножеств [3, 5, 6, 11].

Статья состоит из трёх разделов. В разд. 1 приводится формулировка задачи конкурентного размещения предприятий с ограниченными объёмами производства в виде задачи двухуровневого целочисленного программирования. В разд. 2 формулируется задача поиска оптимального решения рассматриваемой модели и осуществляется её редукция к задаче максимизации псевдобулевой функции. Разд. 3 посвящён описанию способа вычисления верхней границы построенной псевдобулевой

функции на подмножествах (0,1)-векторов, заданных частичными (0,1)-векторами.

1. Формулировка задачи

Для формальной записи задачи конкурентного последовательного размещения предприятий с ограниченными объёмами производства введём необходимые обозначения.

Как и в классической задаче размещения предприятий, обозначим через $I = \{1, \dots, m\}$ множество предприятий (возможных мест открытия предприятий), а через $J = \{1, \dots, n\}$ — множество потребителей.

Считаем, что предприятие $i \in I$ может быть открыто как Лидером, так и Последователем. Поэтому для всякого $i \in I$ предполагаем заданными величины f_i и g_i, равные фиксированным затратам на открытие предприятия i соответственно Лидером и Последователем. Если по каким-то причинам Лидер или Последователь не могут открыть предприятие i, то полагаем $f_i = \infty$ или $g_i = \infty$.

Для любых $i \in I$ и $j \in J$ через p_{ij} и q_{ij} обозначим величину дохода, получаемого предприятием i, открытым соответственно Лидером и Последователем, при обслуживании потребителя j.

Будем считать, что захват потребителя $j \in J$ Лидером или Последователем производится с учётом предпочтений этого потребителя, а предпочтения потребителя $j \in J$ задаются отношением порядка $\succ_j$ на множестве I. Для $i, k \in I$ отношение $i \succ_j k$ означает, что из двух открытых предприятий i и k для потребителя $j \in J$ более предпочтительным является предприятие i. Отношение $i \succcurlyeq_j k$ означает, что либо $i \succ_j k$, либо $i = k$.

Пусть $I_0 \subset I$. Для всякого $j \in J$ обозначим через $i_j(I_0)$ элемент $i_0 \in I_0$ такой, что $i_0 \succcurlyeq_j i$ для всякого $i \in I_0$. Если $I_0 = \{i \in I \mid w_i = 1\}$, где $w = (w_i),\ i \in I,$ — $(0,1)$-вектор, то для элемента $i_j(I_0)$ будем использовать также обозначение $i_j(w)$.

Для определения стороны, захватывающей потребителя $j \in J$, принимается следующее правило. Пусть единичные компоненты $(0,1)$-вектора $x = (x_i)$, $i \in I$, означают предприятия, открытые Лидером, а единичные компоненты $(0,1)$-вектора $z = (z_i)$, $i \in I$, — предприятия, открытые Последователем. Полагаем, что потребитель $j \in J$ будет захвачен Лидером, если $i_j(x) \succcurlyeq_j i_j(z)$, и Последователем, если $i_j(z) \succ_j i_j(x)$.

При выборе предприятия для обслуживания захваченного потребителя $j \in J$ считаем, что Лидер и Последователь используют правило *свободного выбора*. Это означает, что если потребитель j захвачен Лидером,

то для обслуживания этого потребителя может быть использовано любое открытое Лидером предприятие $i \in I$ такое, что $i \succcurlyeq_j i_j(z)$. Аналогично если потребитель j захвачен Последователем, то для обслуживания этого потребителя может быть назначено любое открытое Последователем предприятие $i \in I$ такое, что $i \succ_j i_j(x)$.

В отличие от ранее рассмотренных моделей конкурентного размещения предприятий будем считать, что возможность каждого открытого как Лидером, так и Последователем предприятий по обслуживанию захваченных потребителей ограничены. Обозначим через a_{ij} и b_{ij} объём производства предприятия $i \in I$, открытого Лидером и Последователем соответственно, необходимый для обслуживания потребителя $j \in J$. Через V_i и W_i обозначим ограничение на суммарный объём производства предприятия $i \in I$, открытого соответственно Лидером и Последователем.

Целью Лидера и Последователя является получение максимальной прибыли, которая складывается из прибылей, получаемых открытыми ими предприятиями, с учётом ограниченных объёмов производства этих предприятий. Считаем, что прибыль каждого открытого предприятия равняется сумме прибылей, полученных от потребителей, которые обслуживаются данным предприятием, за вычетом величины фиксированных затрат на открытие этого предприятия.

Введём следующие переменные, аналогичные переменным классической задачи размещения предприятий:

x_i — переменная, равная единице, если Лидер открывает предприятие $i \in I$, и принимающая значение нуль в противном случае;

x_{ij} — переменная, принимающая значение единица, если предприятие $i \in I$, открытое Лидером, назначается для обслуживания потребителя $j \in J$, и равная нулю в противном случае;

z_i — переменная, равная единице, если Последователь открывает предприятие $i \in I$, и принимающая значение нуль в противном случае;

z_{ij} — переменная, принимающая значение единица, если предприятие $i \in I$, открытое Последователем, назначается для обслуживания потребителя $j \in J$, и равная нулю в противном случае.

С использованием введённых переменных математическая модель взаимодействия Лидера и Последователя при конкурентном последовательном размещении предприятий с ограниченными объёмами производства записывается как следующая задача двухуровневого целочисленно-

го программирования:

$$\max_{(x_i),(x_{ij})} \Big\{ -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} p_{ij} x_{ij} \Big\}, \tag{1}$$

$$\widetilde{z}_i + \sum_{k|i \succ_j k} x_{kj} \leqslant 1, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{2}$$

$$x_i \geqslant x_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{3}$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_{ij} \leqslant V_i, \quad i \in I, \tag{4}$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{5}$$

$$(\widetilde{z}_i),\ (\widetilde{z}_{ij}) \text{— оптимальное решение задачи}, \tag{6}$$

$$\max_{(z_i),(z_{ij})} \Big\{ -\sum_{i\in I} g_i z_i + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} q_{ij} z_{ij} \Big\}, \tag{7}$$

$$x_i + z_i \leqslant 1, \quad i \in I, \tag{8}$$

$$x_i + \sum_{k|i \succ_j k} z_{kj} \leqslant 1, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{9}$$

$$z_i \geqslant z_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{10}$$

$$\sum_{j\in J} b_{ij} z_{ij} \leqslant W_i, \quad i \in I, \tag{11}$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I,\ j \in J. \tag{12}$$

Задачу верхнего уровня (1)–(5) будем обозначать через $\mathcal{L}$, а задачу нижнего уровня (7)–(12) — через $\mathcal{F}$. Для задачи (1)–(12) в целом будем использовать обозначение $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, а целевую функцию (1) задачи $\mathcal{L}$ будем считать также целевой функцией задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Целевая функция (1) задачи $\mathcal{L}$ выражает величину прибыли, получаемой Лидером. Неравенства (2) запрещают использовать для обслуживания потребителя те открытые Лидером предприятия, которые менее предпочтительны для данного потребителя, чем предприятия, открытые Последователем. Эти же неравенства гарантируют, что для обслуживания каждого потребителя может быть выбрано только одно предприятие, открытое Лидером. Ограничение (3) показывает, что для обслуживания потребителей могут быть использованы только открытые предприятия. Условие (4) гарантирует, что суммарный объём потребностей, удовлетворяемых каждым открытым предприятием, не может превышать объёма производства этого предприятия. Аналогичный смысл имеют целевая функция и ограничения задачи $\mathcal{F}$. Дополнительное ограничение (8) по-

казывает, что Последователь не может открыть предприятие, которое уже открыто Лидером.

2. Оптимальные решения задачи

Пару $(X, \widetilde{Z})$, где $X = ((x_i), (x_{ij}))$ — допустимое решение задачи $\mathcal{L}$ при заданном векторе $(\widetilde{z}_i)$, а $\widetilde{Z} = ((\widetilde{z}_i), (\widetilde{z}_{ij}))$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{F}$ при заданном векторе (x_i), назовём *допустимым решением* задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Обозначим через $L(X, \widetilde{Z})$ значение целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на допустимом решении $(X, \widetilde{Z})$, а через $F(Z)$ — значение целевой функции задачи $\mathcal{F}$ на допустимом решении Z.

Допустимое решение (X^*, Z^*) назовём *оптимальным решением* задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, если $L(X^*, Z^*) \geqslant L(X, \widetilde{Z})$ для всякого допустимого решения $(X, \widetilde{Z})$.

Далее сосредоточим внимание на задаче поиска оптимального решения модели $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Поскольку при фиксированном допустимом решении X задачи $\mathcal{L}$ оптимальное решение $\widetilde{Z}$ задачи $\mathcal{F}$ определяется, вообще говоря, не однозначно и при различных решениях $\widetilde{Z}_1$ и $\widetilde{Z}_2$ величины $L(X, \widetilde{Z}_1)$ и $L(X, \widetilde{Z}_2)$ могут быть различными, данная задача формулируется следующим образом: найти

$$\max_{(x_i),(x_{ij})} \max_{(\widetilde{z}_i),(\widetilde{z}_{ij})} \Big\{ -\sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{i \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \Big\}$$

при ограничениях (2)–(12). Эту задачу будем также обозначать через $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Заметим, что при фиксированном (0,1)-векторе $x = (x_i), i \in I$, соответствующее оптимальное решение (X^*, Z^*), где $X^* = ((x_i), (x^*_{ij}))$, задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ может быть построено алгоритмом, состоящим из следующих двух этапов.

На первом этапе при фиксированном (0,1)-векторе $x = (x_i),\ i \in I$, решается задача $\mathcal{F}$ и определяется оптимальное значение F^* её целевой функции.

На втором этапе решается следующая вспомогательная задача: найти

$$\max_{(x_{ij})} \max_{(z_i),(z_{ij})} \Big\{ -\sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{i \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \Big\}$$

при ограничениях

$$z_i + \sum_{k | i \succ_j k} x_{kj} \leqslant 1, \quad i \in I,\ j \in J,$$

$$x_i \geqslant x_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J,$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_{ij} \leqslant V_i, \quad i \in I,$$

$$-\sum_{i \in I} g_i z_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} q_{ij} z_{ij} \geqslant F^*,$$

$$x_i + z_i \leqslant 1, \quad i \in I,$$

$$x_i + \sum_{k | i \succcurlyeq_j k} z_{kj} \leqslant 1, \quad i \in I,\ j \in J,$$

$$z_i \geqslant z_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J,$$

$$\sum_{j \in J} b_{ij} z_{ij} \leqslant W_i, \quad i \in I,$$

$$x_{ij}, z_i, z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I,\ j \in J.$$

Нетрудно видеть, что если $((x_{ij}^*), (z_i^*), (z_{ij}^*))$ — оптимальное решение этой задачи, то $Z^* = ((z_i^*), (z_{ij}^*))$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{F}$, а допустимое решение (X^*, Z^*), $X^* = ((x_i), (x_{ij}^*))$, будет оптимальным решением рассматриваемой задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ при фиксированном векторе $x = (x_i),\ i \in I$.

Отсюда следует, что задача $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ может быть представлена как задача максимизации некоторой псевдобулевой функции $f(x)$. Значение этой функции на (0,1)-векторе x есть оптимальное значение целевой функции рассмотренной вспомогательной задачи. Таким образом, для того чтобы вычислить значение функции $f(x)$ на векторе x, необходимо решить задачу $\mathcal{F}$, а затем решить указанную вспомогательную задачу. В результате будет найдено не только значение функции $f(x)$ на (0,1)-векторе x, но и соответствующее допустимое решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

3. Верхняя граница

Исследуем вопрос о возможности эффективного вычисления верхней границы значений рассматриваемой псевдобулевой функции $f(x)$, $x = (x_i)$, $i \in I$, на подмножествах множества $(0, 1)$-векторов. Такие подмножества удобно задавать с помощью частичных $(0, 1)$-векторов. Вектор $y = (y_i)$, $i \in I$, элементы которого принимают значения 0, 1 и неопределённое значение $*$, назовём *частичным* $(0, 1)$*-вектором*, или *частичным решением*. Частичное решение делит переменные функции $f(x)$ на переменные с заданным значением 0 или 1 и свободные переменные. Для частичного $(0, 1)$-вектора $y = (y_i)$ определим множества $I^0 = \{i \in I \mid y_i =$

$0\}$ и $I^1 = \{i \in I \mid y_i = 1\}$. Частичное решение $y = (y_i)$ задаёт множество $(0,1)$-векторов $x = (x_i)$ таких, что $x_i = 0$, $i \in I^0$, и $x_i = 1$, $i \in I^1$. Это множество обозначим через $P(y)$.

Значение функции $f(x)$ на $(0,1)$-векторе $x \in P(y)$ есть значение целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на соответствующем вектору x допустимом решении (X^*, Z^*). Пусть $y = (y_i),\ i \in I$, — частичный (0,1)-вектор, для которого $I^0(y) \cup I^1(y) \neq I$.

Максимальное значение функции $f(x)$ на множестве $P(y)$ есть оптимальное значение целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ с дополнительным ограничением $x_i = y_i$ для $i \in I^0(y) \cup I^1(y)$. Такая задача записывается следующим образом: найти

$$\max_{(x_i),(x_{ij})} \max_{(\widetilde{z}_i),(\widetilde{z}_{ij})} \Big\{ -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} p_{ij} x_{ij} \Big\}, \tag{13}$$

при ограничениях

$$\widetilde{z}_i + \sum_{k \mid i \succcurlyeq_j k} x_{kj} \leqslant 1, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{14}$$

$$x_i \geqslant x_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{15}$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_{ij} \leqslant V_i, \quad i \in I, \tag{16}$$

$$x_i = y_i, \quad i \in I^0(y) \cup I^1(y), \tag{17}$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{18}$$

$$(\widetilde{z}_i), (\widetilde{z}_{ij}) \text{ — оптимальное решение задачи (7)–(12).} \tag{19}$$

Задачу (13)–(18) обозначим через $\mathcal{L}(y)$, а задачу (13)–(19), (7)–(12) в целом — через $(\mathcal{L}(y), \mathcal{F})$. Для целевой функции задачи $(\mathcal{L}(y), \mathcal{F})$ оставим обозначение $L(X, \widetilde{Z})$.

Модифицируем метод построения системы оценочных подмножеств $\{I_j(y)\},\ j \in J$, из [5, 6, 11] применительно к задаче $(\mathcal{L}(y), \mathcal{F})$. Построим оценочную задачу, оптимальное значение целевой функции которой даст верхнюю границу для значений целевой функции задачи $(\mathcal{L}(y), \mathcal{F})$.

При заданном частичном (0,1)-векторе $y = (y_i),\ i \in I$, для фиксированного $j_0 \in J$ сформулируем правила, позволяющие для всякого $i \in I$ установить $i \in I_{j_0}(y)$ или $i \notin I_{j_0}(y)$.

Если $y_i = 0$, то $i \notin I_{j_0}(y)$. Пусть $y_i \neq 0$. Рассмотрим множество $N(i) = \{k \in I \mid k \succ_{j_0} i\}$. Если $N(i) = \varnothing$, то $i \in I_{j_0}(y)$. Пусть $N(i) \neq \varnothing$. Если $N(i) \cap I^1(y) \neq \varnothing$, то $i \notin I_{j_0}(y)$.

Пусть $N(i) \cap I^1(y) = \varnothing$. Рассмотрим множество

$$J(i) = \{j \in J \mid \text{если } k \succ_j i_j(I^1(y) \cup \{i\}),\ \text{то } k \in N(i)\}.$$

Заметим, что $J(i) \neq \varnothing$, поскольку $j_0 \in J(i)$. Для всякого $k \in N(i)$ рассмотрим множество

$$J(k, i) = \{j \in J(i) \mid k \succ_j i_j(I^1(y) \cup \{i\})\}.$$

Считаем, что $i \notin I_{j_0}(y)$, если для некоторого $k \in N(i)$ существует подмножество $S(k) \subset J(k, i)$ такое, что $g_k < \sum\limits_{j \in S(k)} q_{kj}$ и $W_k \geqslant \sum\limits_{j \in S(k)} b_{kj}$. Если элемента $k \in N(i)$ с указанным свойством найти не удаётся, то $i \in I_{j_0}(y)$.

Следующая лемма устанавливает основное свойство оценочных подмножеств.

Лемма 1. *Пусть $(X, \widetilde{Z})$, $X = ((x_i), (x_{ij}))$, $\widetilde{Z} = ((\widetilde{z}_i), (\widetilde{z}_{ij}))$, — допустимое решение задачи $(\mathcal{L}(y), \mathcal{F})$, а $\{I_j(y)\}$, $j \in J$, — система оценочных подмножеств. Тогда для всякого $j_0 \in J$, если $i_{j_0}(x) \notin I_{j_0}(y)$, где $x = (x_i)$, $i \in I$, то $\sum\limits_{i \in I} x_{ij_0} = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим (0,1)-векторы $x = (x_i)$, $i \in I$, $\widetilde{z} = (\widetilde{z}_{ij})$, $i \in I$, и пусть $i_0 = i_{j_0}(x) \notin I_{j_0}(y), i_j = i_j(I^1(x) \cup I^1(\widetilde{z}))$, $j \in J$. Рассмотрим множество $N(i_0) = \{k \in I \mid k \succ_{j_0} i_0\}$. Оно непусто, поскольку $i_0 \notin I_{j_0}(y)$. Заметим, что $x_i = 0$ для $i \in N(i_0)$. Заметим также, что если $\widetilde{z}_i \neq 0$ для некоторого $i \in N(i_0)$, то $\sum\limits_{i \in I} x_{ij_0} = 0$ в силу ограничений (14) и (15).

Пусть $\widetilde{z}_i = 0$ для $i \in N(i_0)$. Рассмотрим множество $J(i_0) = \{j \in J \mid \text{если } k \succ_j i_j(I^1(y) \cup \{i_0\}),\ \text{то } k \in N(i_0)\}$. Поскольку $x_i = \widetilde{z}_i = 0$ для $i \in N(i_0)$, то $i_j = i_j(I^1(y) \cup \{i_0\})$ для всякого $j \in J(i_0)$.

Так как $i_0 \notin I_{j_0}(y)$, найдутся $k \in N(i_0)$ и множество $S(k) \subset \{j \in J(i_0) \mid k \succ_j i_j(I^1(y) \cup \{i_0\})\}$ такие, что $g_k < \sum\limits_{j \in S(k)} q_{kj}$ и $W_k \geqslant \sum\limits_{j \in S(k)} b_{kj}$. Построим допустимое решение $Z = ((z_i), (z_{ij}))$ задачи $\mathcal{F}$, которое отличается от оптимального решения $\widetilde{Z}$ лишь тем, что $z_k = 1$ и $z_{kj} = 1$ для $j \in S(k)$. Для решений Z и $\widetilde{Z}$ справедливо неравенство

$$F(Z) - F(\widetilde{Z}) = -g_k + \sum_{j \in S(k)} q_{kj} > 0.$$

Это противоречит тому, что $\widetilde{Z}$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{F}$. Лемма 1 доказана.

Для вычисления верхней границы значений целевой функции задачи $(\mathcal{L}(y), \mathcal{F})$ построим вспомогательную задачу, введя в задачу $\mathcal{L}(y)$ фиктивные переменные $t_{ij} \in \{0,1\},\ i \in I,\ j \in J$, и дополнительные ограничения.

Указанная задача имеет вид: найти

$$\max_{(x_i),(x_{ij}),(t_{ij})} \max_{(\widetilde{z}_i),(\widetilde{z}_{ij})} \Big\{ -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} p_{ij} x_{ij} \Big\} \tag{20}$$

при ограничениях

$$\widetilde{z}_i + \sum_{k \mid i \succcurlyeq_j k} x_{kj} \leqslant 1, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{21}$$

$$x_i \geqslant x_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{22}$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_{ij} \leqslant V_i, \quad i \in I, \tag{23}$$

$$x_i + \sum_{k \mid i \succ_j k} t_{kj} \leqslant 1, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{24}$$

$$x_i \geqslant t_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{25}$$

$$\sum_{i\in I} t_{ij} = 1, \quad j \in J, \tag{26}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \leqslant \sum_{i\in I_j} t_{ij}, \quad j \in J, \tag{27}$$

$$x_i = y_i, \quad i \in I^0(y) \cup I^1(y), \tag{28}$$

$$x_i, x_{ij}, t_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{29}$$

$$(\widetilde{z}_i), (\widetilde{z}_{ij}) \text{ — оптимальное решение задачи (7)–(12).} \tag{30}$$

Задачу (20)–(30) обозначим через $\mathcal{L}'(y)$, а задачу (20)–(30), (7)–(12) в целом — через $(\mathcal{L}'(y), \mathcal{F})$. Обозначим через $L'(X, T, \widetilde{Z})$ значение целевой функции (20) на допустимом решении $(X, T, \widetilde{Z})$, $X = ((x_i), (x_{ij}))$, $T = (t_{ij})$, $\widetilde{Z} = ((\widetilde{z}_i), (\widetilde{z}_{ij}))$.

Заметим, что если (X, T), $X = ((x_i), (x_{ij}))$, $T = (t_{ij})$, — допустимое решение задачи $\mathcal{L}'(y)$, то в силу (24)–(26) для любых $i \in I,\ j \in J$ выполняется равенство

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = i_j(x), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $x = (x_i),\ i \in I$.

Рассмотрим также следующую задачу, которую будем называть *оценочной* для задачи $(\mathcal{L}'(y), \mathcal{F})$ и которая получается из задачи $\mathcal{L}'(y)$ исключением ограничений, содержащих оптимальные значения переменных задачи $\mathcal{F}$: найти

$$\max_{(x_i),(x_{ij}),(t_{ij})} \Big\{ -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} p_{ij}x_{ij} \Big\},$$
$$x_i \geqslant x_{ij}, \quad i\in I,\ j\in J,$$
$$\sum_{j\in J} a_{ij}x_{ij} \leqslant V_i, \quad i\in I,$$
$$x_i + \sum_{k|i\succ_j k} t_{kj} \leqslant 1, \quad i\in I,\ j\in J,$$
$$x_i \geqslant t_{ij}, \quad i\in I,\ j\in J,$$
$$\sum_{i\in I} t_{ij} = 1, \quad j\in J,$$
$$\sum_{i\in I} x_{ij} \leqslant \sum_{i\in I_j(y)} t_{ij}, \quad j\in J,$$
$$x_i = y_i, \quad i\in I^0(y)\cup I^1(y),$$
$$x_i, x_{ij}, t_{ij} \in \{0,1\}, \quad i\in I,\ j\in J.$$

Обозначим через $B(X,T)$ значение целевой функции этой задачи на допустимом решении (X,T), $X = ((x_i),(x_{ij}))$, $T = (t_{ij})$, а через (X^0,T^0), $X^0 = \big((x_i^0),(x_{ij}^0)\big)$, $T^0 = \big(t_{ij}^0\big)$, — оптимальное решение оценочной задачи.

Теорема 1. *Если $(X,\widetilde{Z})$ — допустимое решение задачи $(\mathcal{L}(y),\mathcal{F})$, то $L(X,\widetilde{Z}) \leqslant B(X^0,T^0)$.*

Доказательство. Построим по допустимому решению $(X,\widetilde{Z})$, $X = ((x_i),(x_{ij}))$, $\widetilde{Z} = ((\widetilde{z}_i),(\widetilde{z}_{ij}))$, решение $(X,T,\widetilde{Z})$ задачи $(\mathcal{L}'(y),\mathcal{F})$, положив для $i\in I,\ j\in J$

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = i_j(x), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $x = (x_i),\ i\in I$.

Заметим, что $(X,T,\widetilde{Z})$ — допустимое решение задачи $(\mathcal{L}'(y),\mathcal{F})$. Действительно, ограничения (24)–(26) справедливы по построению, а ограничение (27) выполняется в силу леммы 1. Заметим также, что значения

целевых функций рассматриваемых задач на решении $(X, \widetilde{Z})$ и соответствующим ему решении $(X, T, \widetilde{Z})$ совпадают.

Заметим далее, что если $(X, T, \widetilde{Z})$ — допустимое решение задачи $(\mathcal{L}'(y), \mathcal{F})$, то (X, T) — допустимое решение оценочной задачи и при этом значения целевых функций задач совпадают.

Тем самым получаем

$$L(X, \widetilde{Z}) = L'(X, T, \widetilde{Z}) = B(X, T) \leqslant B(X^0, T^0).$$

Теорема 1 доказана.

Таким образом, вычисление верхней границы значений построенной псевдобулевой функции $f(x)$ на множестве $P(y)$, где $y = (y_i)$, $i \in I$, — частичный (0,1)-вектор, для которого $I^0(y) \cup I^1(y) \neq I$, сводится к нахождению оптимального значения целевой функции оценочной задачи.

Представление задачи отыскания оптимального решения в модели конкурентного размещения предприятий с ограниченными объёмами производства в виде задачи максимизации псевдобулевой функции от тех же переменных, что и в случае других вариантов задач конкурентного размещения предприятий $[2, 3, 5, 6, 8, 11]$, позволяет использовать для её решения апробированный арсенал алгоритмов, построенных на базе метода локального поиска $[2, 5, 12, 13]$. Показанная возможность эффективного вычисления верхней границы значений рассматриваемой псевдобулевой функции на подмножествах решений, заданных частичными (0,1)-векторами, позволяет построить для исследуемой задачи алгоритмы ветвей и границ по аналогии с алгоритмами для задач из $[1, 6, 7]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Береснев В. Л.** Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005. 408 с.
2. **Береснев В. Л.** Алгоритмы локального поиска для задачи конкурентного размещения предприятий // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 12–27.
3. **Береснев В. Л.** О задаче конкурентного размещения предприятий со свободным выбором поставщиков // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 94–105.
4. **Береснев В. Л., Гончаров Е. Н., Мельников А. А.** Локальный поиск по обобщённой окрестности для задачи оптимизации псевдобулевых функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 4. С. 3–16.
5. **Береснев В. Л., Мельников А. А.** Приближённые алгоритмы для задачи конкурентного размещения предприятий // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 6. С. 3–19.

6. **Береснев В. Л., Мельников А. А.** Алгоритм ветвей и границ для задачи конкурентного размещения предприятий с предписанным выбором поставщиков // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 2. С. 3–23.
7. **Кононов А. В., Кочетов Ю. А., Плясунов А. В.** Конкурентные модели размещения производства // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 6. С. 1037–1054.
8. **Мельников А. А.** Рандомизированный локальный поиск для дискретной задачи конкурентного размещения предприятий // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 134–152.
9. **Плясунов А. В., Панин А. А.** Задача ценообразования. I. Точные и приближённые алгоритмы решения // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 5. С. 83–100.
10. **Плясунов А. В., Панин А. А.** Задача ценообразования. II. Вычислительная сложность // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 6. С. 56–71.
11. **Beresnev V. L.** Branch-and-bound algorithm for a competitive facility location problem // Comput. Oper. Res. 2013. Vol. 40, No. 8. P. 2062–2070.
12. **Dempe S.** Foundations of bilevel programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 309 p.
13. **Hammer P. L., Rudeanu S.** Pseudo-Boolean programming // Oper. Res. 1969. Vol. 17, No. 2. P. 233–261.
14. **Krarup J., Pruzan P. M.** The simple plant location problem: survey and synthesis // Eur. J. Oper. Res. 1983. Vol. 12, No. 1. P. 36–81.
15. **Von Stackelberg H.** The theory of the market economy. London: Hedge, 1952. 289 p.

Береснев Владимир Леонидович,
Мельников Андрей Андреевич

Статья поступила
20 мая 2015 г.

Исправленный вариант —
22 июня 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
January–March 2016. Volume 23, No. 1. P. 35–50

UDC 519.85 DOI: 10.17377/daio.2016.23.493

A CAPACITATED COMPETITIVE FACILITY LOCATION PROBLEM

V. L. Beresnev[1,2] and *A. A. Melnikov*[1,2]
[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
[2]Novosibirsk State University,
2 Pirogov St., 630090 Novosibirsk, Russia
e-mail: beresnev@math.nsc.ru, melnikov@math.nsc.ru

Abstract. We consider a mathematical model relative to competitive location problems. In such problems, there are two competing sides which subsequently open their facilities aiming to “capture” clients and maximize profit. In our model, we assume that capacitiy of facilities are bounded. The model is formulated as a bi-level integer mathematical program and we study the problem of obtaining its optimal (cooperative) solution. It is shown that the problem can be reformulated as a problem of maximization of a pseudo-Boolean function with the number of arguments equal to the number of places available for facility opening. We propose an algorithm for calculation of an upper bound for values that the function takes on subsets which are specified by partial (0,1)-vectors. Bibl. 15.

Keywords: bi-level programming, upper bound, competitive facility location.

REFERENCES

1. **V. L. Beresnev,** *Diskretnye zadachi razmeshcheniya i polinomy ot bulevykh peremennykh* (Discrete Location Problems and Polynomials of Boolean Variables), Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 2005.
2. **V. L. Beresnev,** Local search algorithms for the problem of competitive location of enterprises, *Avtom. Telemekh.,* No. 3, 12–27, 2012. Translated in *Autom. Remote Control,* **73**, No. 3, 425–439, 2012.
3. **V. L. Beresnev,** On the competitive facility location problem with a free choice of suppliers, *Avtom. Telemekh.,* No. 4, 94–105, 2014. Translated in *Autom. Remote Control,* **75**, No. 4, 668–676, 2014.
4. **V. L. Beresnev, E. N. Goncharov,** and **A. A. Melnikov,** Local search with a generalized neighborhood in the optimization problem for pseudo-Boolean functions, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **18**, No. 4, 3–16, 2011. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **6**, No. 1, 22–30, 2012.

5. **V. L. Beresnev** and **A. A. Melnikov,** Approximate algorithms for the competitive facility location problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **17**, No. 6, 3–19, 2010. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **5**, No. 2, 180–190, 2011.
6. **V. L. Beresnev** and **A. A. Melnikov,** The branch-and-bound algorithm for a competitive facility location problem with the prescribed choice of suppliers, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **21**, No. 2, 3–23, 2014. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **8**, No. 2, 177–189, 2014.
7. **A. V. Kononov, Yu. A. Kochetov,** and **A. V. Plyasunov,** Competitive facility location models, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **49**, No. 6, 1037–1054, 2009. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.,* **49**, No. 6, 994–1009, 2009.
8. **A. A. Mel'nikov,** Randomized local search for the discrete competitive facility location problem, *Avtom. Telemekh.,* No. 4, 134–152, 2014. Translated in *Autom. Remote Control,* **75**, No. 4, 700–714, 2014.
9. **A. V. Plyasunov** and **A. A. Panin,** The pricing problem. Part I: Exact and approximate algorithms, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **19**, No. 5, 83–100, 2012. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **7**, No. 2, 241-251, 2013.
10. **A. V. Plyasunov** and **A. A. Panin,** The pricing problem. Part II: Computational complexity, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **19**, No. 6, 56–71, 2012. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **7**, No. 3, 420-430, 2013.
11. **V. L. Beresnev,** Branch-and-bound algorithm for a competitive facility location problem, *Comput. Oper. Res.,* **40**, No. 8, 2062–2070, 2013.
12. **S. Dempe,** *Foundations of Bilevel Programming,* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
13. **P. L. Hammer** and **S. Rudeanu,** Pseudo-Boolean programming, *Oper. Res.,* **17**, No. 2, 233–261, 1969.
14. **J. Krarup** and **P. M. Pruzan,** The simple plant location problem: Survey and synthesis, *Eur. J. Oper. Res.,* **12**, No. 1, 36–81, 1983.
15. **H. von Stackelberg,** *The Theory of the Market Economy,* Hedge, London, 1952.

Vladimir L. Beresnev,
Andrey A. Melnikov

Received
20 May 2015
Revised
22 June 2015