ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2016. Том 23, № 1. С. 51–64

УДК 519.95 DOI: 10.17377/daio.2016.23.497

О ЛОКАЛЬНО РАВНОМЕРНЫХ КОДАХ ГРЕЯ

И. С. Быков[1]

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
e-mail: patrick.no10@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются локально равномерные коды Грея. Код Грея назовём *локально равномерным*, если в каждом подслове переходной последовательности «небольшой» длины содержатся все буквы алфавита $\{1, 2, \dots, n\}$. Наименьшую такую длину назовём *шириной окна кода*. Показано, что для каждого $n \geqslant 3$ существует код Грея такой, что ширина окна не превосходит $n + 3\lfloor \log n \rfloor$. Табл. 2, библиогр. 10.

Ключевые слова: код Грея, гамильтонов цикл, n-мерный куб, ширина окна кода.

Введение

n-Мерный куб Q_n (или *n-мерный гиперкуб*) — граф, вершинами которого являются слова длины n в алфавите $\{0, 1\}$; две вершины *смежны*, если соответствующие им слова отличаются ровно в одной позиции.

n-Мерным (*циклическим, двоичным*) *кодом Грея* называют гамильтонов цикл в Q_n. Альтернативным представлением кода является его переходная последовательность. *Переходная последовательность* кода — циклическое слово $\delta = \delta_1\delta_2 \dots \delta_{2^n}$ над алфавитом $\{1, 2, \dots, n\}$ такое, что i-е и $(i+1)$-е слова в коде отличаются в позиции δ_i, а первое и последнее — в позиции δ_{2^n}. *Спектром* кода Грея называется вектор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где a_i — количество вхождений i-й буквы в переходную последовательность этого кода.

Обозначим через H_n количество гамильтоновых циклов в Q_n, а через h_n — количество гамильтоновых циклов в Q_n с точностью до автоморфизма (здесь рассматривается группа автоморфизмов относительно расстояния Хэмминга). Значения H_n и h_n для $n = 6$ подсчитаны в [9]. Числа H_n и h_n для $n \leqslant 6$ приведены в OEIS (On-line Encyclopedia of Integer Sequences, URL: http://oeis.org) как последовательности A066037

и A159344. Эти значения приведены в табл. 1. В [7] получена асимптотическая оценка числа H_n:

$$\left(\frac{n\log 2}{e\log\log n}(1-o(1))\right)^{2^n} \leqslant H_n \leqslant \frac{1}{2}(n!)^{\frac{2^n}{2n}}((n-1)!)^{\frac{2^n}{2(n-1)}}.$$

В [6] проведена классификация гамильтоновых циклов в Q_5. В [5] 6-мерные коды Грея разделены на классы в зависимости от спектра переходной последовательности.

Т а б л и ц а 1

Количество гамильтоновых циклов в n-мерных кубах

n	h_n	H_n
2	1	1
3	1	6
4	9	1344
5	237675	906545760
6	777739016577752714	35838213722570883870720

Часто возникает потребность построить код Грея, обладающий специальными свойствами, отличными от свойств двоично-отражённого кода. Ряд свойств, которыми может обладать код Грея, приведён в [10]. В данной статье будем рассматривать локально равномерные коды Грея: переходная последовательность такого кода в каждом своём подслове определённой длины содержит все буквы алфавита $\{1, 2, \ldots, n\}$. Наименьшую такую длину для кода C будем обозначать через $l(C)$ и назовём *шириной окна* кода C.

Пусть $l(n)$ — минимальное значение $l(C)$ среди всех n-мерных кодов. Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Для всех $n \geqslant 3$ справедлива верхняя оценка*

$$l(n) \leqslant n + 3\lfloor \log n \rfloor.$$

Везде далее log — логарифм по основанию 2. В силу того, что $l(n) \geqslant n$, несложно понять, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l(n)}{n} = 1.$$

Задача оценки параметра $l(n)$ является в некотором смысле двойственной к более известной задаче: пусть $t(C)$ — наибольшее число такое, что в каждом подслове переходной последовательности длины $t(C)$ все буквы различны. Определим величину $t(n)$ — максимум среди величин $t(C)$ всех n-мерных кодов. В [8] показано, что справедлива оценка

$$t(n) \geqslant n - \lceil 2.001 \log n \rceil,$$

а следовательно, имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t(n)}{n} = 1.$$

Более ранняя конструкция, приведённая в [2], даёт $\frac{t(n)}{n} \geqslant \frac{1}{2}$.

1. Конструкции кодов Грея

1.1. Построение v-добавочного кода Грея. Пусть $v \in V(Q_n)$ — некоторая вершина чётного веса ($v \neq (\tilde{0})$). Код Грея G_v назовём *v-добавочным*, если для любых вершин w и u, находящихся друг от друга в коде на расстоянии 2^{n-1}, справедливо $w + u = v$.

Приведём способ построения такого кода. Выберем произвольную координату $i \in \mathrm{supp}(v)$, и пусть $\overline{v} = v + e_i$. Очевидно, что $\overline{v}$ — вершина нечётного веса. Все вершины $V(Q_n)$, имеющие 0 в i-й координате, образуют куб Q' размерности $n-1$, содержащий вершины $(\tilde{0})$ и $\overline{v}$. Так как эти вершины разной чётности, между ними в Q' существует гамильтонова цепь (это легко показать с помощью индукции по размерности куба). Пусть переходная последовательность этой цепи такова:

$$Z = z_1, z_2, \ldots, z_{2^{n-1}-1}.$$

Легко убедиться, что переходная последовательность $\widehat{Z} = Z, i, Z, i$ задаёт гамильтонов цикл в Q_n, а каждая вершина u после 2^{n-1} шагов переходит в вершину $u + v$.

1.2. Торическая конструкция. В [2] приведена конструкция для получения кодов Грея большей размерности из двух гамильтоновых циклов в кубах меньшей размерности.

Пусть δ и ε — переходные последовательности кодов Грея над алфавитами мощности n_1 и n_2, не имеющими общих букв. Периодически повторяя слова δ и ε, получим две последовательности:

$$\delta, \delta, \delta, \ldots \quad \text{и} \quad \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \ldots.$$

Пусть $P = \{p_i\}_{i=1}^{t}$ и $Q = \{q_i\}_{i=1}^{t}$ — последовательности положительных целых чисел такие, что $\sum\limits_{i=1}^{t}(p_i + q_i) = 2^{n_1+n_2}$. Начальный отрезок длины $\sum\limits_{i=1}^{t} p_i$ последовательности $\delta, \delta, \delta, \ldots$ разобьём на блоки длины $p_1, p_2, \ldots, p_t$, а начальный отрезок длины $\sum\limits_{i=1}^{t} q_i$ последовательности

$\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \ldots$ — на блоки длины $q_1, q_2, \ldots, q_t$, изображая это схематически так:

$$[\delta_1][\delta_2] \ldots [\delta_i] \ldots [\delta_t],$$

$$[\varepsilon_1][\varepsilon_2] \ldots [\varepsilon_i] \ldots [\varepsilon_t],$$

где $[\delta_i]$ и $[\varepsilon_i]$ — блоки длины p_i и q_i соответственно.

Образуем слово ζ последовательным чередованием блоков $[\delta_i]$ и $[\varepsilon_i]$:

$$\zeta = [\delta_1][\varepsilon_1][\delta_2][\varepsilon_2] \ldots [\delta_i][\varepsilon_i] \ldots [\delta_t][\varepsilon_t].$$

По построению длина слова ζ равна $2^{n_1+n_2}$. Для ζ справедлива доказанная в [2]

Лемма 1. *Слово ζ является переходной последовательностью кода Грея размерности $n_1 + n_2$ тогда и только тогда, когда последовательности P и Q периодические и $\sum\limits_{i=1}^{T} p_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{T} q_i$ — нечётные числа, сумма которых равна $2^{\min\{n_1,n_2\}}$, где T — наименьшее общее кратное периодов последовательностей P и Q.*

С помощью этой конструкции в [3] доказаны две леммы, позволяющие рекурсивно посчитать верхние оценки для $l(n)$.

Лемма 2. *Если $l(n_1), l(n_2) \leqslant 2^{n_1-1} - 1$ и $n_1 \leqslant n_2$, то*

$$l(n_1 + n_2) \leqslant 2\max\{l(n_1), l(n_2)\} + 2.$$

Доказательство. Пусть δ и ε — переходные последовательности кодов Грея размерности n_1 и n_2 соответственно над непересекающимися алфавитами такие, что $l(\delta) = l(n_1)$, $l(\varepsilon) = l(n_2)$, и выполнены условия леммы.

Возьмём конструкцию, приведённую выше, со следующими параметрами: если $l(n_1) \leqslant l(n_2)$, то

$$T = 2^{n_1-1} - 1,$$

$$p_i = 1, \quad q_i = \begin{cases} 2 & \text{при } i \equiv 0, 1 \pmod{2^{n_1-1}} \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, 2^{n_1-1} - 1,$$

иначе

$$T = 2^{n_1-1} - 1,$$

$$p_i = \begin{cases} 2 & \text{при } i \equiv 0, 1 \pmod{2^{n_1-1}} \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases}, \quad q_i = 1, \quad i = 1, \ldots, 2^{n_1-1} - 1.$$

Пусть $l(n_1) \leqslant l(n_2)$, в противном случае рассуждения аналогичны. Покажем, что в любом подслове длины $2l(n_2) + 2$ слова ζ встречаются все буквы.

Так как $l(n_2) \leqslant 2^{n_1 - 1}$, по построению в отрезок длины $2l(n_2) + 2$ полностью могут попасть только два блока длины 2 из q_i. Проезжая окном длины $2l(n_2) + 2$ по слову ζ и рассматривая все случаи, легко убедиться, что в это окно попадают все буквы. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если* $l(n_1) < l(n_2) \leqslant 2^{n_1 - 1}$, *то* $l(n_1 + n_2) \leqslant 2l(n_2)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

1.3. Потоковая конструкция. Перед тем как ввести конструкцию, приведём ряд определений. *Смежная перестановка вершин* в $V(Q_n)$ — перестановка вершин Q_n такая, что каждая вершина переходит в одну из соседних. Список смежных перестановок $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ и начальная вершина v задают путь в Q_n:

$$W(v; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k) = v\ v^{\pi_1}\ v^{\pi_1 \pi_2} \ldots v^{\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_k}.$$

Тогда *потоком* в Q_n, порождённым последовательностью смежных перестановок $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$, назовём совокупность 2^n путей:

$$S(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k) = \{W(v; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k) \mid v \in V(Q_n)\}.$$

Поток определяет перестановку $\pi(S)$ (в общем случае не смежную), которая переставляет вершины по правилу $\pi : v \to v^{\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_k}$. Путь из потока S с начальной вершиной v будем обозначать через $W(v; S)$.

Для потоков определим операцию конкатенации. Пусть поток S_1 задан последовательностью смежных перестановок $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k_1}$, а S_2 — последовательностью смежных перестановок $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k_2}$. Тогда результатом конкатенации потоков S_1 и S_2 является поток

$$S_1 S_2 = S(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k_1}, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k_2}).$$

Конкатенацию k одинаковых потоков S будем обозначать через S^k.

Пусть $r(v)$ — длина орбиты вершины v относительно $\pi(S)$. Тогда определим величину $l(S)$ как наибольшее значение $l(w)$ среди всех замкнутых путей $\{w = W(v; S^{r(v)}) \mid v \in V(Q_n)\}$.

Построим код Грея в декартовом произведении $Q_a \times Q_b \cong Q_{a+b}$ из потока в Q_a и кода Грея в Q_b. Пусть (X, Y) — разбиение $V(Q_a)$ на слова чётного и нечётного веса соответственно.

Пусть S — поток длины 2^b в Q_a такой, что X — орбита $\pi(S)$, где $\pi(S)$ — перестановка, порождаемая S на множестве $V(Q_a)$. Поток $S' = S^{2^{a-1}}$,

полученный в результате конкатенации исходного потока 2^{a-1} раз, определяет замкнутый путь W в Q_a с начальной вершиной $w_0 \in X$:

$$W = W(w_0, S') = w_0, w_1, \ldots, w_{2^{a+b-1}}, w_0.$$

Пусть $Z = z_0, z_1, \ldots, z_{2^b-1}, z_0$ — код Грея в Q_b. Рассмотрим маршрут C в Q_a, который имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} C = {} & (w_0, z_0)(w_1, z_0)(w_1, z_1)(w_2, z_1)(w_2, z_2) \ldots (w_{2^b-1}, z_{2^b-1})(w_{2^b}, z_{2^b-1}) \\ & (w_{2^b}, z_0)(w_{2^b+1}, z_0)(w_{2^b+1}, z_1) \ldots (w_{2\cdot 2^b-1}, z_{2^b-1})(w_{2\cdot 2^b}, z_{2^b-1})(w_{2\cdot 2^b}, z_0) \\ & (w_{2\cdot 2^b+1}, z_0)(w_{2\cdot 2^b+1}, z_1) \ldots (w_{3\cdot 2^b-1}, z_{2^b-1})(w_{3\cdot 2^b}, z_{2^b-1})(w_{3\cdot 2^b}, z_0) \ldots \\ & (w_{(2^{a-1}-1)\cdot 2^b}, z_0)(w_{(2^{a-1}-1)\cdot 2^b+1}, z_0) \ldots (w_{(2^{a-1})2^b-1}, z_{2^b-1})(w_0, z_{2^b-1}) \\ & (w_0, z_0). \end{aligned}$$

В [8] доказана

Лемма 4. *Маршрут C является гамильтоновым циклом, и для него справедливо $l(C) \leqslant 2\max\{l(S), l(Z)\}$.*

2. Доказательство теоремы 1

2.1. Построение искомого потока. Сперва построим поток в Q_a, обладающий необходимыми свойствами: длина равна 2^b и значение $l(S)$ «хорошее».

Лемма 5. *Существует поток S_a в Q_a длины $2a+2$ такой, что X — орбита $\pi(S_a)$ и $l(S_a) \leqslant a+2$.*

Доказательство. Пусть $G = x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{2^{a-1}}, y_{2^{a-1}}$ — произвольный код Грея размерности a ($x_i \in X$). Код G задаёт перестановку σ_G на множестве $V(Q_a)$:

$$\sigma_G(x_i) = y_i, \quad \sigma_G(y_i) = x_{i+1}.$$

Пусть τ_i — перестановка, меняющая местами вершины, отличающиеся в координате i. Рассмотрим поток

$$S_a = \sigma_G, \sigma_G, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{a-1}, \tau_a, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{a-1}\tau_a.$$

Очевидно, что длина потока S_a равна $2a+2$ и $l(S_a) \leqslant a+2$. Осталось показать, что X — орбита $\pi(S_a)$. Действие перестановки $\pi = \pi(S_a)$ на $x_i \in X$ таково:

$$\pi(x_i) = \tau_a(\ldots\tau_1(\tau_a(\ldots\tau_1(\sigma_G(\sigma_G(x_i))\ldots)$$
$$= \tau_a(\ldots\tau_1(\tau_a(\ldots\tau_1(\sigma_G(y_i))\ldots) = \tau_a(\ldots\tau_1(\tau_a(\ldots\tau_1(x_{i+1}))\ldots) = x_{i+1}.$$

Значит, X — орбита $\pi(S_a)$. Лемма 5 доказана.

Докажем ещё одну лемму, с помощью которой сможем увеличивать длину полученного потока с сохранением ширины окна этого потока.

Лемма 6. *Для любого чётного целого* $d \geqslant 2a+2+2\left\lfloor\frac{a^2}{2}\right\rfloor$ *существует поток* S' *в* Q_a *длины* d *такой, что* X *— орбита* $\pi(S')$ *и* $l(S') \leqslant a+2$.

Доказательство. Рассмотрим поток $S' = S_a T^{2\alpha} R^{2\beta} P^{2\gamma}$, где S_a — поток, построенный в лемме 5, $T = \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{a-1}, \tau_a$, $R = \tau_a, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{a-1}, \tau_a$, $P = \tau_{a-1}, \tau_a, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{a-1}, \tau_a$. Пусть $d = 2a+2+2t$ — длина потока S', где

$$t = \alpha a + \beta(a+1) + \gamma(a+2).$$

В [4] показано, что такое диофантово уравнение относительно α, β и γ имеет неотрицательные решения для всех $t \geqslant \lfloor a^2/2 \rfloor$. Значит, для любых целых чётных $d \geqslant 2a+2+2\left\lfloor\frac{a^2}{2}\right\rfloor$ можно построить такой поток S' длины d.

Легко заметить, что перестановки $\pi(T^{2\alpha}), \pi(R^{2\beta})$ и $\pi(P^{2\gamma})$ оставляют вершины на местах при любых значениях α, β, γ. Значит, X — орбита $\pi(S')$, так как

$$\pi(S') = \pi(S_a T^{2\alpha} R^{2\beta} P^{2\gamma}) = \pi(S_a).$$

Для того чтобы показать, что $l(S') \leqslant a+2$, нужно рассмотреть все значения $l(S_1 S_2)$, где $S_1, S_2 \in \{S_a, T, R, P\}$. Рассмотрев все случаи, легко убедиться, что каждое из этих значений не превосходит $a+2$. Лемма 6 доказана.

Из лемм 6 и 4 получаем

Следствие 1. *Если* $2a+2+2\left\lfloor\frac{a^2}{2}\right\rfloor \leqslant 2^b$, *то* $l(a+b) \leqslant 2\max\{a+2, l(b)\}$.

Вернёмся к доказательству основной теоремы, которое проведём по индукции. Сначала необходимо определить значение N, для которого любое целое $n \geqslant N$ можно представить в виде суммы $n = a+b$ двух слагаемых таких, что выполняются условия

$$2a+2+2\lfloor a^2/2 \rfloor \leqslant 2^b, \tag{1}$$

$$n + 3\lfloor \log n \rfloor \geqslant \max\{2(a+2),\ 2b + 6\lfloor \log b \rfloor\}. \tag{2}$$

Поясним эти условия. Можно применять потоковую конструкцию для построения кодов Грея в случае, если выполнено неравенство (1). Выполнение неравенства (2) обеспечивает получение нового кода Грея C

размерности n такого, что верхняя оценка $l(C) \leqslant n + 3\lfloor \log n \rfloor$ справедлива, если эта оценка справедлива для всех чисел, меньших n (в том числе b).

2.2. Шаг индукции. Рассмотрим множество

$$M = \{2m + 3\lfloor \log m \rfloor \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Очевидно, что натуральные числа можно разбить на пять непересекающихся множеств: $M_0 = M$, $M_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid (n+1) \in M\}$, $M_2 = \{n \in (\mathbb{N} \setminus M_0) \mid (n+2) \in M\}$, $M_3 = \{n \in (\mathbb{N} \setminus M_1) \mid (n+3) \in M\}$, $M_4 = \{n \in (\mathbb{N} \setminus (M_0 \cup M_2) \mid (n+4) \in M\}$.

Для каждого из этих множеств приведём разбиение его элементов в сумму слагаемых a и b и определим, для каких элементов при данном разбиении выполняются условия (1) и (2). Подробно рассмотрим множество M_0 — остальные множества рассматриваются аналогично.

Если $n \in M_0$, то $n = 2m + 3\lfloor \log m \rfloor$ для некоторого m. Положим $a = m + 3\lfloor \log m \rfloor - 1$, а $b = m + 1$. При таком разбиении n неравенство (1) приобретает вид

$$2(m + 3\lfloor \log m \rfloor - 1) + 2 + 2\left\lfloor \frac{(m + 3\lfloor \log m \rfloor - 1)^2}{2} \right\rfloor \leqslant 2^{m+1}.$$

Оно выполняется для всех целых $m \geqslant 7$.

Подставляя значения a и b, получаем

$$\begin{gathered} n + 3\lfloor \log n \rfloor = 2m + 3\lfloor \log m \rfloor + 3\lfloor \log(2m + 3\lfloor \log m \rfloor) \rfloor, \\ 2(a+2) = 2m + 6\lfloor \log m \rfloor + 2, \\ 2b + 6\lfloor \log b \rfloor = 2m + 6\lfloor \log(m+1) \rfloor + 2. \end{gathered}$$

Выполнение условия (2) эквивалентно выполнению двух неравенств, каждое из которых выполняется для всех $m \geqslant 1$.

Результаты для всех множеств $M_0, M_1, \ldots, M_4$ представим в табл. 2.

Рассмотрев все множества, можно заключить, что индукционный переход (построение кодов большей размерности с использованием потоковой конструкции с сохранением верхней оценки) справедлив для всех $n \geqslant 25$, а также для $n = 20$ и для $n = 23$. Для доказательства теоремы осталось доказать базу индукции, т. е. что неравенство $l(n) \leqslant n + 3\lfloor \log n \rfloor$ выполняется для всех $n \leqslant 24$, кроме $n = 20$ и $n = 23$.

Таблица 2

	a	b	Неравенство (1) выполняется для всех m, больших либо равных	Неравенство (2) выполняется для всех m, больших либо равных
M_0	$m+3\lfloor\log m\rfloor-1$	$m+1$	7	1
M_1	$m+3\lfloor\log m\rfloor-1$	m	9	2
M_2	$m+3\lfloor\log m\rfloor-2$	m	6	2
M_3	$m+3\lfloor\log m\rfloor-2$	$m-1$	10	2
M_4	$m+3\lfloor\log m\rfloor-3$	$m-1$	9	3

2.3. База индукции. В [1] приведены верхние оценки величины $l(n)$ для $4 \leqslant n \leqslant 16$. Продолжая таблицу из [1] до значения $n = 24$ с использованием лемм 2 и 3, получим табл. 3.

Таблица 3

Жирным шрифтом выделены значения n, для которых $l(n) > n + 3\lfloor\log n\rfloor$

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$l(n) \leqslant$	6	7	8	9	14	14	16	16	18	18	20
n	**15**	16	**17**	18	19	20	**21**	22	**23**	24	
$l(n) \leqslant$	**28**	28	**30**	30	32	32	**34**	34	**36**	36	

Так как для $n = 23$ можно применить потоковую конструкцию (т. е. индукционный переход), для завершения проверки базы индукции достаточно улучшить верхние оценки для $n = 15, 17, 21$.

2.3.1. База. Случай $n = 15, n = 21$. Рассмотрим сначала случай $n = 15$. Представим $n = a + b$, где $a = 10$, а $b = 5$. Используя потоковую конструкцию, построим код Грея в Q_{a+b} из потока в Q_a и кода Грея в Q_b.

В качестве требуемого потока в Q_a возьмём

$$S = \sigma_{G_v}, \sigma_{G_v}, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a,$$

где $v = (\tilde{1})$. Очевидно, что длина потока равна $3a + 2 = 32 = 2^b$, а $l(S) \leqslant a+2$. Осталось показать, что X (множество всех вершин чётного веса в Q_a) — орбита $\pi(S)$. Легко видеть, что X — орбита $\sigma_{G_v}\sigma_{G_v}$. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_{2^{a-1}-1}$ — вершины чётного веса в Q_a, причём $\sigma_{G_v}\sigma_{G_v}(x_i) = x_{i+1}$ (по циклу). Рассмотрим действие $\pi(S)$ на x_i:

$$\pi(S)(x_i) = \tau_a\tau_{a-1}\ldots\tau_1\sigma_{G_v}\sigma_{G_v}(x_i) = \tau_a\tau_{a-1}\ldots\tau_1(x_{i+1}).$$

Так как G_v — $(\tilde{1})$-добавочный код, имеем $x_{i+1} + (\tilde{1}) = x_{i+2^{a-2}+1}$. Таким образом,

$$\pi(S)(x_i) = x_{i+2^{a-2}+1}.$$

Число $2^{a-2}+1$ взаимно просто с числом 2^{a-1}, следовательно, X — орбита $\pi(S)$.

Стало быть, полученный поток S, удовлетворяет условиям применения потоковой конструкции. В качестве кода Грея в Q_b можно взять код C, для которого $l(C) = 7$. Согласно табл. 2 такой код существует.

В результате применения конструкции получим код C_{a+b}. Для него справедливо

$$l(C_{a+b}) \leqslant 2\max\{a+2, l(b)\} = 2\max\{12, 7\} = 24.$$

Получили новую оценку сверху: $l(15) \leqslant 24 \leqslant 15 + 3\lfloor \log 15 \rfloor$.

Аналогичные рассуждения можно провести для $n = 21$. Представим $n = a+b$, где $a = 14$, а $b = 7$. В качестве требуемого потока в Q_a возьмём

$$S = \sigma_{G_v}, \sigma_{G_v}, \overbrace{\overbrace{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a}, \overbrace{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a}, \ldots, \overbrace{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a}, \overbrace{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a}}^{9\text{ раз}},$$

где $v = (\tilde{1})$.

Заметим, что $9a + 2 = 128 = 2^b$. В итоге имеем

$$l(C_{a+b}) \leqslant 2\max\{a+2, l(b)\} = 2\max\{16, 9\} = 32.$$

Получили новую оценку сверху: $l(21) \leqslant 32 \leqslant 21 + 3\lfloor \log 21 \rfloor$.

2.3.2. База. Случай $n = 17$. Пусть $n = 17$. Представим $n = a+b$, где $a = 11$, а $b = 6$. Используя потоковую конструкцию, построим код Грея в Q_{a+b} из потока в Q_a и кода Грея в Q_b.

В качестве требуемого потока в Q_a возьмём

$$S = \overbrace{\sigma_{G_v}, \sigma_{G_v}, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a}^{13}, \overbrace{\tau_1, \tau_2, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a}^{13}, \overbrace{\tau_1, \tau_2, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a}^{13},$$
$$\overbrace{\tau_1, \tau_2, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a}^{13}, \overbrace{\tau_2, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a}^{12},$$

где $v = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Длина потока равна $4(a+2) + (a+1) = 64 = 2^b$, а $l(S) \leqslant a+2$.

Осталось показать, что X — орбита $\pi(S)$. Вновь замечаем, что X — орбита $\sigma_{G_v}\sigma_{G_v}$. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_{2^{a-1}-1}$ — вершины чётного веса в Q_a, причём $\sigma_{G_v}\sigma_{G_v}(x_i) = x_{i+1}$ (по циклу). Рассмотрим действие $\pi(S)$ на x_i:

$$\pi(S)(x_i) = \tau_a\tau_{a-1}\ldots\tau_2\sigma_{G_v}\sigma_{G_v}(x_i) = \tau_a\tau_{a-1}\ldots\tau_2(x_{i+1}).$$

Так как G_v — v-добавочный код, то $x_{i+1}+v = x_{i+2^{a-2}+1}$. Таким образом,

$$\pi(S)(x_i) = x_{i+2^{a-2}+1}.$$

Число $2^{a-2}+1$ взаимно просто с числом 2^{a-1}, следовательно, X — орбита $\pi(S)$.

Стало быть, полученный поток S удовлетворяет условиям применения потоковой конструкции. В качестве кода Грея в Q_b можно взять код C, для которого $l(C) = 8$. Согласно табл. 2 такой код существует.

В результате применения конструкции получим код C_{a+b}. Для него справедливо

$$l(C_{a+b}) \leqslant 2\max\{a+2, l(b)\} = 2\max\{13, 8\} = 26.$$

Получили новую оценку сверху: $l(17) \leqslant 26 \leqslant 17 + 3\lfloor \log 17 \rfloor$.

Таким образом, база индукции доказана, что и завершает доказательство теоремы 1.

Автор выражает благодарность А. Л. Пережогину за неоценимую помощь в написании статьи, А. А. Евдокимову за внимание к работе, а также рецензенту за справедливые и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годовых О. П.** Исследование равномерных кодов Грея // Мат. 50 междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 13–19 апреля 2012 г.). Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2012. С. 133.
2. **Евдокимов А. А.** О нумерации подмножеств конечного множества // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач. 1980. Вып. 34. С. 8–26.
3. **Короленко Л. А.** Нахождение сильно равномерных кодов Грея // Мат. XLVIII междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 10–14 апреля 2010 г.). Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010. С. 162.
4. **Aguilo F., Miralles A.** On the Frobenius' problem of three numbers // Proc. 2005 Eur. Conf. Comb., Graph Theory Appl. (Berlin, Germany, Sept. 5–9, 2005). Nancy: DMTCS, 2005. P. 317–322.
5. **Chebiryak Yu., Kroening D.** Towards a classification of Hamiltonian cycles in the 6-cube // J. Satisf., Boolean Model. Comput. 2008. Vol. 4, No. 1. P. 57–74.
6. **Dejter I. J., Delgado A. A.** Classes of Hamilton cycles in the 5-cube // J. Comb. Math. Comb. Comput. 2007. Vol. 61. P. 81–95.

7. **Feder T., Subi C.** Nearly tight bounds on the number of Hamiltonian circuits of the hypercube and generalizations // Inf. Process. Lett. 2009. Vol. 109, No. 5. P. 267–272.
8. **Goddyn L., Gvozdjak P.** Binary Gray codes with long bit runs // The Electron. J. Comb. 2003. Vol. 10, No. R27. P. 1–10.
9. **Haanpää H., Östergård P. R. J.** Counting Hamiltonian cycles in bipartite graphs // Math. Comput. 2014. Vol. 83, No. 286. P. 979–995.
10. **Savage C.** A survey of combinatorial Gray codes // SIAM Rev. 1997. Vol. 39, No. 4. P. 605–629.

Быков Игорь Сергеевич

Статья поступила
9 июня 2015 г.

Исправленный вариант —
17 августа 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
January–March 2016. Volume 23, No. 1. P. 51–64

UDC 519.95 DOI: 10.17377/daio.2016.23.497

ON LOCALLY BALANCED GRAY CODES

I. S. Bykov[1]
[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
e-mail: patrick.no10@gmail.com

Abstract. We consider locally balanced Gray codes. We say that a Gray code is *locally balanced* if each "short" subword of transition sequence contains all letters of the set $\{1, 2, \ldots, n\}$. The minimal length of such subwords is called *the window width of the code*. We show that for each $n \geqslant 3$ there exists a Gray code with window width not greater than $n + 3\lfloor \log n \rfloor$. Tab. 2, bibliogr. 10.

Keywords: Gray code, Hamilton cycle, n-cube, window width code.

REFERENCES

1. **O. P. Godovykh,** A study of uniform Gray codes, *Materialy Yubileinoi* 50*-i Mezhdunarodnoi nauchnoi studencheskoi konferentsii "Student i nauchno-tekhnicheskii progress".* Proc. 50th Int. Student Sci. Conf. "Students and Progress in Science and Technology", *Novosibirsk, Russia, Apr. 13–19, 2012,* p. 133, NGU, Novosibirsk, 2012.
2. **A. A. Evdokimov,** On enumeration of subsets of a finite set, in *Metody diskretnogo analiza v reshenii kombinatornykh zadach* (Methods of Discrete Analysis for Solving Combinatorial Problems), Vol. 34, pp. 8–26, Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1980.
3. **L. A. Korolenko,** Finding strongly uniform Gray codes, *Materialy XLVIII Mezhdunarodnoi nauchnoi studencheskoi konferentsii "Student i nauchno-tekhnicheskii progress".* Proc. 48th Int. Student Sci. Conf. "Students and Progress in Science and Technology", *Novosibirsk, Russia, Apr. 10–14, 2010,* p. 162, NGU, Novosibirsk, 2010.
4. **F. Aguiló** and **A. Miralles,** Frobenius' problem, in *Proc. 2005 Eur. Conf. Comb., Graph Theory Appl., Berlin, Germany, Sept. 5–9, 2005,* p. 317–322, DMTCS, Nancy, 2005.
5. **Yu. Chebiryak** and **D. Kroening,** Towards a classification of Hamiltonian cycles in the 6-cube, *J. Satisf., Boolean Model. Comput.,* **4**, 57–74, 2008.
6. **I. J. Dejter** and **A. A. Delgado,** Classes of Hamilton cycles in the 5-cube, *J. Comb. Math. Comb. Comput.,* **61**, 81–95, 2007.

7. **T. Feder** and **C. Subi,** Nearly tight bounds on the number of Hamiltonian circuits of the hypercube and generalizations, *Inf. Process. Lett.,* **109**, No. 5, 267–272, 2009.
8. **L. Goddyn** and **P. Gvozdjak,** Binary Gray codes with long bit runs, *Electron. J. Comb.,* **10**, No. R27, 1–10, 2003.
9. **H. Haanpää** and **P. R. J. Östergård,** Counting Hamiltonian cycles in bipartite graphs, *Math. Comput.,* **83**, No. 286, 979–995, 2014.
10. **C. Savage,** A survey of combinatorial Gray codes, *SIAM Rev.,* **39**, No. 4, 605–629, 1997.

Igor S. Bykov

Received
9 June 2015

Revised
17 August 2015