ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2016. Том 23, № 1. С. 5–16

УДК 519.17 DOI: 10.17377/daio.2016.23.499

НЕЗАВИСИМЫЕ МНОЖЕСТВА В ГРАФАХ БЕЗ ПОДДЕРЕВЬЕВ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ЛИСТЬЕВ *)

В. Е. Алексеев[1], *Д. В. Захарова*[1]
[1]Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, корп. 2, 603950, Нижний Новгород, Россия
e-mail: aleve@rambler.ru, dvzakh@rambler.ru

Аннотация. Поддерево графа называется *вписанным*, если никакие три вершины этого поддерева не порождают треугольника в графе. Доказывается, что при любом фиксированном k задача о независимом множестве разрешима за полиномиальное время для графов, входящих в один из следующих классов: 1) графы, не имеющие поддеревьев с k листьями, 2) субкубические графы, не имеющие вписанных поддеревьев с k листьями, 3) графы со степенями, не превосходящими k, не имеющие порождённых поддеревьев с 4 листьями. Ил. 1, библиогр. 12.

Ключевые слова: граф, независимое множество, запрещённое поддерево, полиномиальный алгоритм.

Введение

Под *классом графов* понимаем множество графов, замкнутое относительно изоморфизма. Известно немало классов графов, для которых NP-трудная в общем случае задача о независимом множестве решается за полиномиальное время, такие классы будем называть НМ-*простыми*. Многие НМ-простые классы описываются запрещёнными подграфами, т. е. подграфами, которых не должно быть в графах из рассматриваемого класса. Мы используем общепринятое обозначение $\mathrm{Free}(\mathcal{X})$ для класса всех графов, не содержащих порождённых подграфов из множества $\mathcal{X}$ (эти классы замкнуты относительно удаления вершин, их называют *наследственными*). Если множество $\mathcal{X}$ состоит из единственного графа G, пишем просто $\mathrm{Free}(G)$.

Один из ранних результатов — доказательство НМ-простоты класса $\mathrm{Free}(K_{1,3})$ [11, 12]. Но уже для класса $\mathrm{Free}(K_{1,4})$ задача о независимом

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14–01–00515).

множестве остаётся NP-трудной (это следует, например, из результатов работы [3]). Поэтому возможным направлением расширения упомянутого результата о графах без $K_{1,3}$ может быть рассмотрение в качестве запрещённых подграфов других деревьев с тремя листьями. Обозначим через $S_{i,j,k}$ дерево с тремя листьями, находящимися на расстояниях i, j, k от вершины степени 3. Таким образом, $K_{1,3}$ — это $S_{1,1,1}$. В [1] доказана НМ-простота класса $\mathrm{Free}(S_{1,1,2})$. Продвинуться дальше в этом направлении пока удаётся только при дополнительных ограничениях на класс графов. Так, в [4] доказывается НМ-простота класса планарных графов из $\mathrm{Free}(S_{1,2,k})$, а в [8] — класса планарных субкубических графов из $\mathrm{Free}(S_{2,2,k})$ при любом фиксированном k.

В настоящей работе исследуется другое направление: мы рассматриваем классы, определяемые запрещёнными деревьями с ограниченным числом листьев. Это направление подсказано результатами работ [2, 7], из которых следует, что отсутствие в графе поддеревьев с большим числом листьев является необходимым условием ограниченности миноров расширенной матрицы инцидентности графа. Поэтому полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве для таких графов влечёт справедливость одного из частных вариантов гипотезы В. Н. Шевченко о том, что задача целочисленного линейного программирования решается за полиномиальное время, если миноры матрицы задачи ограничены по абсолютной величине [9].

Обозначим через $\mathcal{FT}(k)$ класс всех графов, в которых нет поддеревьев с k листьями, а через $\mathcal{FT}^*(k)$ — класс всех графов, в которых нет порождённых поддеревьев с k листьями. В разд. 2 показано, что класс $\mathcal{FT}(k)$ НМ-простой при любом фиксированном k. Мы не знаем, верно ли это в общем случае для классов $\mathcal{FT}^*(k)$. Случай $k = 2$ тривиален, а при $k = 3$ класс $\mathcal{FT}^*(3)$ совпадает с классом $\mathrm{Free}(K_{1,3})$, который, как отмечалось выше, НМ-прост. Однако класс $\mathcal{FT}^*(4)$ является собственным подмножеством класса $\mathrm{Free}(K_{1,4})$ и, возможно, тоже НМ-простой. В разд. 2 доказывается НМ-простота некоторых его подмножеств.

Основной результат статьи относится к промежуточному варианту между произвольными и порождёнными поддеревьями. Поддерево некоторого графа назовём *вписанным*, если никакие три вершины этого дерева не порождают треугольника в графе. Класс всех графов, не имеющих вписанных поддеревьев с k листьями, обозначаем через $\mathcal{FT}^{**}(k)$. Предполагаем, что этот класс НМ-прост при любом фиксированном k. Однако доказать это пока можем только для частного случая субкубических графов (так называют графы, в которых степени вершин не превосходят 3).

Это доказательство составляет содержание разд. 3.

Отметим, что любую бинарную матрицу можно рассматривать как матрицу клик некоторого графа (т. е. матрицу инцидентности вершин и клик). Если в графе имеется вписанное дерево с k листьями, то строки, соответствующие вершинам этого дерева, и столбцы, соответствующие кликам, содержащим его рёбра, образуют матрицу инцидентности дерева с k листьями. Как показано в [7], у расширенной матрицы, полученной добавлением единичного столбца, имеется минор величины не менее $k/4$. Поэтому из НМ-простоты класса $\mathcal{FT}^{**}(k)$ при любом k следовала бы справедливость бинарного варианта гипотезы Шевченко для расширенной матрицы.

1. Полезные факты

Доказательства следующих двух утверждений можно найти, например, в [3].

Лемма 1. *Если множество всех двусвязных графов из некоторого класса $\mathcal{X}$ является* НМ-*простым классом, то и класс $\mathcal{X}$* НМ-*простой.*

Для класса графов $\mathcal{X}$ через $\mathcal{X}[+k]$ обозначим класс всех графов, у которых можно удалить не более k вершин так, что получится граф из $\mathcal{X}$.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{X}$ —* НМ-*простой класс графов, принадлежность к которому распознается за полиномиальное время. Тогда при любом k класс $\mathcal{X}[+k]$* НМ-*простой.*

Следующее утверждение следует из результатов работы [6].

Лемма 3. *В графе, имеющем s вершин степени не меньше 3, существует поддерево с не менее чем $s/4$ листьями.*

Рассмотрим замкнутые интервалы на прямой. Каждая пара интервалов находится в одном их трех симметричных отношений:

A — эти интервалы не пересекаются;

B — эти интервалы перекрываются, т. е. их пересечение непусто и ни один из них не вложен в другой;

C — один из интервалов содержится в другом.

Семейство интервалов, попарно не имеющих общих концов, назовём *семейством типа* A, если все пары интервалов этого семейства находятся в отношении A; аналогично для B и C. Из теоремы Рамсея следует, что в каждом большом семействе интервалов имеется достаточно большое однотипное подсемейство. В данном случае можно следующим образом уточнить размер этого подсемейства.

Лемма 4. *В любом семействе из n интервалов имеется подсемейство типа A, B или C из не менее чем $n^{1/3}$ интервалов.*

Доказательство. Пусть S — семейство интервалов $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $\ldots, [x_n, y_n]$, упорядоченных по левым концам: $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Пусть $D = A \cup B$. Обозначим через a, b, c, d наибольшее число интервалов в подсемействе типа A, B, C, D соответственно. Рассмотрим последовательность правых концов $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Всякому подсемейству типа C соответствует монотонно убывающая подпоследовательность этой последовательности, а всякому подсемейству типа D — монотонно возрастающая. По теореме Эрдёша — Секереша [10] любая последовательность длины не менее чем $cd + 1$ содержит либо убывающую подпоследовательность длины $c + 1$, либо возрастающую подпоследовательность длины $d + 1$. Отсюда следует, что

$$cd \geqslant n. \tag{1}$$

Рассмотрим подсемейство S' семейства S, состоящее из d интервалов, каждая пара из которых находится в отношении D. Построим граф пересечений G для этого семейства. Независимые множества этого графа соответствуют множествам попарно не пересекающихся интервалов, а клики — множествам попарно перекрывающихся интервалов. Следовательно, $a \geqslant \alpha(G)$, $b \geqslant \omega(G)$, где $\alpha(G)$ — число независимости, $\omega(G)$ — кликовое число графа G. Так как граф интервалов совершенный, для него имеет место равенство $\omega(G) = \chi(G)$, где $\chi(G)$ — хроматическое число. Для любого графа с d вершинами выполняется неравенство $\alpha(G)\chi(G) \geqslant d$. Поэтому $\alpha(G)\omega(G) \geqslant d$ и, следовательно, $ab \geqslant d$. Вместе с (1) это даёт $abc \geqslant n$, откуда вытекает утверждение леммы. Лемма 4 доказана.

2. Произвольные и порождённые поддеревья

Из леммы 3 следует, что граф, не имеющий поддеревьев с k листьями, принадлежит классу $\mathcal{D}_2[+4k]$, где $\mathcal{D}_2$ — класс всех графов, у которых степени вершин не превышают 2. Последний класс, очевидно, НМ-простой, ввиду леммы 2 класс $\mathcal{FT}(k)$ таков же.

Теорема 1. *Класс $\mathcal{FT}(k)$ НМ-простой при любом k.*

Рассмотрим теперь порождённые поддеревья и класс $\mathcal{FT}^*(4)$. Порождённый подграф $K_{1,3}$ некоторого графа будем называть *звездой*, а центр звезды — *звёздной вершиной*.

Лемма 5. *В связном графе из $\mathcal{FT}^*(4)$ расстояние между любыми двумя звёздами не превосходит 1.*

Доказательство. Допустим, что A и B — две звезды в некотором графе из $\mathcal{FT}^*(4)$ и кратчайший соединяющий их путь имеет длину не менее 2. Пусть a и b — вершины этого пути, смежные с A и B соответственно (возможно, $a = b$), а P — часть пути между a и b. Возможны следующие варианты соединений вершины a с вершинами звезды A: a смежна по крайней мере с двумя листьями звезды; a смежна с одним из листьев звезды и с её центром; a смежна с единственным из листьев звезды и не смежна с её центром.

В каждом из этих случаев вершина a и некоторые вершины звезды порождают дерево с двумя листьями, отличными от a. Кроме вершины a в это дерево входят в случае 1 два смежных с ней листа звезды, в случае 2 — два не смежных с a листа звезды и её центр, в случае 3 — все вершины звезды. Подобное же дерево образует вершина b с вершинами звезды B. Добавив к объединению этих двух деревьев путь P, получим порождённое дерево с четырьмя листьями. Лемма 5 доказана.

Теорема 2. *При любом k класс всех графов из $\mathcal{FT}^*(4)$, у которых степени вершин не превосходят k, является* НМ-*простым.*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что достаточно доказать НМ-простоту множества всех связных графов из этого класса. Пусть G — связный граф из $\mathcal{FT}^*(4)$ со степенями не выше k, S — звезда в графе G. В графе имеется меньше чем $4k-4$ вершин, смежных с вершинами из S. По лемме 5 каждая из остальных звёзд графа имеет хотя бы одну вершину, смежную с вершиной из S. Следовательно, удалив из графа вершины звезды S и все смежные с ними, получим граф без звёзд. Значит, граф G принадлежит классу $\mathrm{Free}(K_{1,3})[+4k]$. Остаётся применить лемму 2. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Класс всех планарных графов из $\mathcal{FT}^*(4)$* НМ-*прост.*

Доказательство. Допустим, что в связном графе $G \in \mathcal{FT}^*(4)$ имеется пять попарно не пересекающихся (не имеющих общих вершин) звёзд. Если стянуть каждую из этих звёзд в одну вершину, то согласно лемме 5 образуется полный граф K_5. По теореме Вагнера граф G не планарен. Значит, в планарном графе из $\mathcal{FT}^*(4)$ может быть не более четырёх попарно не пересекающихся звёзд. Удалив все вершины некоторого максимального множества непересекающихся звёзд (не более 16 вершин), получим граф из класса $\mathrm{Free}(K_{1,3})$. Таким образом, каждый планарный граф из $\mathcal{FT}^*(4)$ принадлежит классу $\mathrm{Free}(K_{1,3})[+16]$, и по лемме 2 класс всех таких графов НМ-простой. Теорема 3 доказана.

3. Вписанные поддеревья

Теорема 4. *Класс всех субкубических графов из* $\mathcal{FT}^{**}(k)$ НМ-*прост при любом* k.

Доказательство. Ввиду леммы 1 можно рассматривать только двусвязные графы. Пусть G — двусвязный субкубический граф, не имеющий вписанных поддеревьев с k листьями. Покажем, что число звёзд в таком графе ограничено сверху некоторой функцией от k, после чего останется применить лемму 2. Доказательство включает три этапа:

1) покажем, что если в графе G много звёздных вершин, то в нём имеется простой путь с большим количеством звёздных вершин на нём;

2) рассмотрим подграф, порождённый вершинами такого пути и смежными с ними, и докажем, что у него имеется порождённый подграф без треугольников с большим количеством звёздных вершин;

3) покажем, что в последнем подграфе существует вписанное поддерево с большим числом листьев.

Приступим к реализации этого плана.

1) Допустим, что в графе G имеется s звёздных вершин. Построим в этом графе корневое остовное дерево T с помощью поиска в глубину. Оно обладает следующим свойством: если (x, y) — ребро графа, не принадлежащее дереву, то одна из вершин x, y является предком другой, т. е. лежит на пути, соединяющем в дереве другую вершину с корнем (см., например, [5]). *Ветвь* $T(x)$ дерева T в вершине x — это поддерево, порождённое вершиной x и всеми её потомками в T. *Вес* вершины x определяется как число звёздных вершин графа, принадлежащих $T(x)$. Вершину назовём *развилкой*, если у неё два сына (ближайших потомка) в дереве, при этом сына большего веса будем называть *старшим*, другого — *младшим* (если веса равны, старший выбирается произвольно). Построим путь P, двигаясь от корня к листу по рёбрам дерева и выбирая в каждой развилке для дальнейшего движения старшего сына этой развилки. Пусть c — число звёздных вершин на пути P. Если $c > \log_2 s$, то P — искомый путь. В противном случае пусть $a_1, a_2, \ldots, a_t$ — все развилки на пути P (пронумерованные в порядке их прохождения при движении от корня к листу), у которых младшие сыновья $b_1, b_2, \ldots, b_t$ имеют ненулевые веса. Тогда

$$w(b_t) \leqslant c,$$

$$w(b_{t-1}) \leqslant w(b_t) + c \leqslant 2c,$$

$$w(b_{t-2}) \leqslant w(b_{t-1}) + w(b_t) + c \leqslant 4c,$$

$$\dots$$

$$w(b_1) \leqslant w(b_2) + \ldots + w(b_t) + c \leqslant 2^{t-1}c.$$

Отсюда $s = c + w(b_1) + \ldots + w(b_t) \leqslant c2^t \leqslant 2^t \log_2 s$ и

$$t = \Omega(\log s). \tag{2}$$

Пусть c_i — звёздная вершина, являющаяся потомком вершины b_i. Так как граф двусвязен, в нём существует цикл, проходящий через вершины c_i и a_i. Пусть P_i — отрезок этого цикла, содержащий вершину c_i, у которого концевые вершины принадлежат пути P, а все остальные (внутренние) вершины ему не принадлежат. Отметим, что концевые вершины пути P_i различны, поскольку граф субкубический, а корень дерева T не является развилкой (поскольку граф двусвязный).

Таким образом, имеем множество путей $F = \{P_1, \ldots, P_t\}$, каждый из которых содержит хотя бы одну звёздную вершину, соединяет две вершины пути P и не содержит других вершин из P. Отметим, что все внутренние вершины пути P_i принадлежат ветви $T(b_i)$ (это следует из упомянутого выше свойства дерева T: всякое ребро графа, не принадлежащее дереву, соединяет предка с потомком). Поэтому при $i \neq j$ пути P_i и P_j не имеют общих вершин вне P. Так как граф субкубический, они не могут иметь общих вершин и на P, за единственным возможным исключением, когда концевые вершины двух путей совпадают с корнем дерева. В этом случае просто удалим один из этих путей из множества F, это не повлияет на асимптотическую оценку (2).

Если путь P изобразить в виде прямой линии, то каждому пути из множества F будет соответствовать отрезок прямой, концами которого являются концевые вершины пути. По лемме 4 в этом множестве интервалов существует подмножество типа A, B или C (в обозначениях леммы 4) мощности $\Omega((\log s)^{1/3})$. Нетрудно видеть, что в любом случае из соответствующих путей множества F и отрезков пути P можно составить простой путь, содержащий все вершины этих путей, в том числе и звёздные.

2) Итак, в графе G имеется простой путь, содержащий p звёздных вершин, где $p = \Omega((\log s)^{1/3})$. Пусть Q — путь наибольшей длины с этим свойством. Никакая вершина вне пути Q не может быть смежной с двумя последовательными вершинами этого пути, иначе можно было бы эту вершину вставить в путь и получить более длинный путь с тем же числом звёздных вершин на нём. Рассмотрим подграф H, порождённый всеми вершинами пути Q и всеми смежными с ними. В дальнейшем путь Q

и подграф H могут подвергнуться некоторым трансформациям, будем сохранять те же обозначения для изменённого пути и подграфа.

Так как граф G субкубический, в графе H треугольники, не содержащие концевых вершин пути Q, могут быть только двух типов:

A — образованные тремя последовательными вершинами пути Q;

B — образованные тремя вершинами вне Q.

Если концевая вершина x пути Q принадлежит треугольнику, не относящемуся к одному из этих типов, то она смежна с двумя последовательными вершинами y и z пути (она не может быть смежной с вершинами вне пути Q ввиду максимальности последнего). В этом случае вставим вершину x в путь между вершинами y и z. Поступив так с обеими концевыми вершинами, получим путь, состоящий из тех же вершин, но любой треугольник в графе H принадлежит одному из типов A, B.

Рассмотрим сначала треугольники типа B. Каждая вершина такого треугольника смежна с единственной вершиной на пути Q. Удалим из графа H каждую вершину треугольника типа B, у которой смежная с ней вершина пути Q не является звёздной. Останутся треугольники типа B, у которых каждая смежная с ними вершина на Q является звёздной. Удалим по одной вершине из каждого такого треугольника. Число звёздных вершин на пути Q при этом уменьшится не более чем на одну треть, т. е. их останется не менее $2p/3$. В полученном графе могут быть только треугольники типа A.

Объявим один из концов пути Q левым, другой — правым. Каждая вершина треугольника типа A теперь становится левой, средней или правой. Треугольники типа A разделим на подтипы:

A0 — те, у которых средняя вершина не смежна со звёздной вершиной на Q;

AL — те, у которых средняя вершина смежна со звёздной вершиной на Q и эта звёздная вершина расположена левее треугольника;

AR — те, у которых средняя вершина смежна со звёздной вершиной на Q и эта звёздная вершина расположена правее треугольника.

Допустим, что треугольников типа AL имеется не меньше чем треугольников типа AR. Удалим из графа H среднюю вершину каждого треугольника типа A0 или AR. При удалении каждой такой вершины два ребра соответствующего треугольника в пути Q заменяются третьим ребром того же треугольника, т. е. путь становится на одно ребро короче. В результате всех этих удалений число звёздных вершин на пути Q уменьшится не более чем вдвое, т. е. их останется не менее $p/3$, и останутся только треугольники типа AL.

С треугольниками типа AL поступим следующим образом. Найдём самый левый из них. Пусть a — звёздная вершина, смежная со средней вершиной этого треугольника, b — левая вершина треугольника, c — правая, d — вершина, соседняя слева с вершиной b на пути Q. Удалим из графа H вершину b. Вершина d, если она была звёздной, перестанет быть таковой, и если она смежна со средней вершиной некоторого треугольника, то этот треугольник перейдёт из категории AL в категорию A0. Поступим с ним соответствующим образом, т. е. удалим его среднюю вершину из графа и «спрямим» путь Q. Это преобразование показано на рис. 1. Отметим, что граф H остался связным. Все вершины, которые находились на пути Q левее вершины c, удалим из этого пути (но сохраним в графе H), так что теперь левым концом пути Q становится вершина c. Заметим, что звезда с центром a сохранилась после этих преобразований, причём теперь она не имеет общих вершин с путём Q. Такую звезду назовём *свободной*.

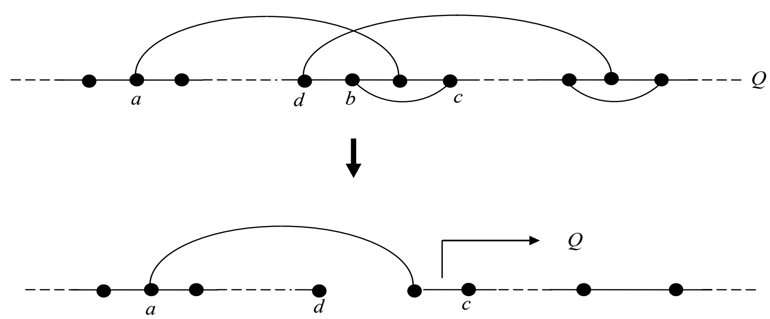

Рис. 1.

Будем поступать так, как описано в предыдущем абзаце, пока не будут разрушены все треугольники. При этом каждый раз при уничтожении очередного треугольника может быть уничтожена и одна звезда, но появляется одна новая свободная звезда. В итоге получим связный граф H без треугольников, являющийся порождённым подграфом графа G. При этом число звёздных вершин в H не меньше половины числа звёздных вершин, имевшихся до начала процесса обработки треугольников типа AL, т. е. не меньше $p/6$.

3) По лемме 3 в графе H имеется поддерево с не менее чем $p/24$ листьями. Однако в графе без треугольников каждое поддерево является вписанным. Следовательно, в исходном графе G имеется вписанное поддерево с числом листьев $\Omega((\log s)^{1/3})$. Поэтому при любом k класс $\mathcal{FT}^{**}(k)$ содержится в классе $\mathrm{Free}(K_{1,3})[+r]$ при некотором r, зависящем от k, и, следовательно, является НМ-простым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** Полиномиальный алгоритм для нахождения наибольших независимых множеств в графах без вилок // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1999. Т. 6, № 4. С. 3–19.
2. **Алексеев В. Е., Захарова Д. В.** Независимые множества в графах с ограниченными минорами расширенной матрицы инцидентности //Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 1. С. 3–10.
3. **Алексеев В. Е., Коробицын Д. В.** О сложности некоторых задач на наследственных классах графов // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, вып. 4. С. 34–40.
4. **Алексеев В. Е., Малышев Д. С.** Классы планарных графов с полиномиально разрешимой задачей о независимом множестве // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15, № 1. С. 3–10.
5. **Алексеев В. Е., Таланов В. А.** Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2006. 319 с.
6. **Банкевич А. В., Карпов Д. В.** Оценки количества висячих вершин в остовных деревьях // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2011. Т. 391. С. 18–34.
7. **Захарова Д. В.** Взвешенные независимые множества в графах с ограниченными минорами расширенной матрицы инцидентности // Мат. X Междунар. семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 1–6 февраля 2010 г.). М.: Изд-во мехмата МГУ, 2010. С. 303–305.
8. **Малышев Д. С.** Классы субкубических планарных графов, для которых задача о независимом множестве является полиномиально разрешимой // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 3. С. 26–44.
9. **Шевченко В. Н.** Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Наука, 1995. 190 с.
10. **Erdös P., Szekeres G.** A combinatorial problem in geometry // Compos. Math. 1935. Vol. 2. P. 463–470.
11. **Minty G. J.** On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs // J. Comb. Theory, Ser. B. 1980. Vol. 28. P. 284–304.
12. **Sbihi N.** Algorithme de recherche d'un stable de cardinalité maximum dans un graphe sans étoile // Discrete Math. 1980. Vol. 29, No. 1. P. 53–76.

Алексеев Владимир Евгеньевич,
Захарова Дарья Владимировна

Статья поступила
11 июня 2015 г.

Исправленный вариант —
25 июня 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
January–March 2016. Volume 23, No. 1. P. 5–16

UDC 519.17 DOI: 10.17377/daio.2016.23.499

INDEPENDENT SETS IN GRAPHS WITHOUT SUBTREES WITH MANY LEAVES

V. E. Alekseev[1] and *D. V. Zakharova*[1]
[1] Nizhniy Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., 603950 Nizhniy Novgorod, Russia
e-mail: aleve@rambler.ru, dvzakh@rambler.ru

Abstract. A subtree of a graph is called *inscribed* if there is no three vertices in the subtree inducing a triangle in the graph. We prove that for any fixed k the independent set problem is solvable in polynomial time for each of the following classes of graphs: 1) the graphs without subtrees with k leaves, 2) the subcubic graphs without inscribed subtrees with k leaves, 3) the graphs with degrees not exceeding k without induced subtrees with 4 leaves. Ill. 1, bibliogr. 12.

Keywords: graph, independent set, forbidden subtree, polynomial algorithm.

REFERENCES

1. **V. E. Alekseev,** A polynomial algorithm for finding the largest independent sets in claw-free graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **6**, No. 4, 3–19, 1999.
2. **V. E. Alekseev** and **D. V. Zakharova,** Independent sets in the graphs with bounded minors of the extended incidence matrix, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **17**, No. 1, 3–10, 2010. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **5**, No. 1, 14–18, 2011.
3. **V. E. Alekseev** and **D. V. Korobitsyn,** Complexity of some problems on hereditary classes of graphs, *Diskretn. Mat.,* **4**, No. 4, 34–40, 1992.
4. **V. E. Alekseev** and **D. S. Malyshev,** Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **15**, No. 1, 3–10, 2008. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **3**, No. 1, 1–4, 2009.
5. **V. E. Alekseev** and **V. A. Talanov,** *Grafy i algoritmy. Struktury dannykh. Modeli vychislenii* (Graphs and Algorithms. Data Structures. Computation Models), Internet-Univ. Inform. Tekhnol., BINOM. Lab. Znanii, Moscow, 2006.

6. **A. V. Bankevich** and **D. V. Karpov,** Bounds of the number of leaves of spanning trees, *Zap. Nauchn. Semin. POMI,* **391**, 18–34, 2011. Translated in *J. Math. Sci., New York,* **184**, No. 5, 564–572, 2012.
7. **D. V. Zakharova,** Weighted independent sets in graphs with bounded minors of the extended incidence matrix, in *Materialy X Mezhdunarodnogo seminara "Diskretnaya matematika i ee prilozheniya"* (Proc. X Int. Seminar "Discrete Math. and Its Applications"), *Moscow, Russia, Jan. 1–6, 2010,* pp. 303–305, Izd. Mekh.-Mat. Fak. MGU, Moscow, 2010.
8. **D. S. Malyshev,** Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **20**, No. 3, 26–44, 2013. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **7**, No. 4, 537–548, 2013.
9. **V. N. Shevchenko,** *Kachestvennye voprosy tselochislennogo programmirovaniya* (Qualitative Problems in Integer Programming), Nauka, Moscow, 1995.
10. **P. Erdős** and **G. Szekeres,** A combinatorial problem in geometry, *Compos. Math.,* **2**, 463–470, 1935.
11. **G. J. Minty,** On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **28**, 284–304, 1980.
12. **N. Sbihi,** Algorithme de recherche d'un stable de cardinalité maximum dans un graphe sans étoile, *Discrete Math.,* **29**, No. 1, 53–76, 1980.

Vladimir E. Alekseev,
Darya V. Zakharova

Received
11 June 2015
Revised
25 June 2015