ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2016. Том 23, № 2. С. 5–20

УДК 519.175.3 DOI: 10.17377/daio.2016.23.501

О ПЕРЕЧИСЛЕНИИ ПОМЕЧЕННЫХ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ С ЗАДАННЫМИ ЧИСЛАМИ ВЕРШИН И РЁБЕР

В. А. Воблый[1]
[1]Московский гос. техн. университет им. Н. Э. Баумана,
2-я Бауманская ул., 5, стр. 1, 105005 Москва, Россия
e-mail: vitvobl@yandex.ru

Аннотация. Получена новая формула, выражающая число помеченных связных графов с заданными числами вершин и рёбер через производящую функцию их блоков. В качестве приложения перечисляются точно и асимптотически кактусы с заданными числом вершин и цикломатическим числом. Табл. 1, библиогр. 22.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, блок, кактус, асимптотика.

Введение

Рассматриваются неориентированные простые связные графы. *Точкой сочленения* связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей рёбрами граф становится несвязным. *Блок* (2-*связный граф, неразделимый граф*) — связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения [12]. *Цикломатическим числом* (*циклическим рангом*) связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом рёбер графа и числом его вершин. *k-Циклический граф* — граф с цикломатическим числом, равным k, *эйлеров граф* — связный граф, у которого каждая вершина имеет чётную степень[13].

Классическое функционально-дифференциальное уравнение связывает производящие функции помеченных связных графов и их блоков. В [4] из этого уравнения с помощью теоремы обращения Лагранжа получена формула, которая является инструментом для точного и асимптотического перечисления помеченных графов в том случае, когда известна производящая функция их блоков [7–9].

Данная статья является продолжением [4]. Теперь при перечислении графов задаются не только число вершин графа, но и число его рёбер.

В качестве приложения получены точные и асимптотические формулы для чисел кактусов с заданными количеством вершин и цикломатическим числом.

Кактусы являются базовой моделью для ряда задач статистической физики [19], комбинаторной оптимизации [16] и теории кодов, исправляющих ошибки [21].

1. Формула для числа помеченных связных графов с заданными количествами вершин и рёбер

Пусть C_n — число помеченных связных графов с n вершинами, а B_n — число помеченных блоков с n вершинами. Введём экспоненциальные производящие функции

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}, \quad B(x) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

Известно следующее соотношение [12]:

$$\ln C'(t) = B'(tC'(t)). \tag{1}$$

Из него в работе автора [4] с помощью теоремы обращения Лагранжа получена формула

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n}[x^{n-1}]\exp(nB'(x)) = \frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}]\exp(nB'(x))x^{-n}. \tag{2}$$

Напомним, что $B(t)$ и $C(t)$ являются формальными степенными рядами, $[x^i]$ — коэффициентный оператор и $[x^{-1}]$ — оператор формального вычета [10].

Заметим, что в [3] дано альтернативное доказательство формулы (2) и из неё выведено соотношение (1).

Пусть $C_{n,m}$ — число помеченных связных графов с n вершинами и m рёбрами, а $B_{n,m}$ — число помеченных блоков с n вершинами и m рёбрами. Введём экспоненциальные производящие функции

$$C(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n(n-1)/2} C_{n,m} \frac{x^n y^m}{n!}, \; B(x,y) = \frac{x^2 y}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=n}^{n(n-1)/2} B_{n,m} \frac{x^n y^m}{n!}.$$

Известно следующее классическое соотношение Риддела [17]:

$$\ln \frac{\partial C(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial B(z,y)}{\partial z}, \quad z = x\,\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}.$$

Лемма 1. *Число $C_{n,m}$ помеченных связных графов с n вершинами и m рёбрами равно*

$$C_{n,m} = \frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}y^{-1}]\exp\left(n\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}\right)x^{-n}y^{-m-1}. \qquad (3)$$

Доказательство. Ряды $B(x,y)$ и $C(x,y)$ являются формальными степенными рядами, а $[x^{-1}y^{-1}]$ — оператор формального вычета [10]. Будем рассматривать переменную y как параметр. Тогда

$$C(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y)\frac{x^n}{n!}, \quad C_n(y) = \sum_{m=3}^{n(n-1)/2} C_{n,m}y^m.$$

С помощью леммы из [4] найдём

$$C_n(y) = \frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}]\exp\left(n\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}\right)x^{-n},$$

поэтому

$$C_{n,m} = [y^{-1}]C_n(y)y^{-m-1} = \frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}y^{-1}]\exp\left(n\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}\right)x^{-n}y^{-m-1}.$$

Лемма 1 доказана.

Отметим, что при использовании формул (2) и (3) для перечисления связных графов из некоторого класса необходимо, чтобы этот класс был блочно-устойчивым. Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если из принадлежности графа этому классу следует принадлежность каждого его блока этому классу [15]. Классы планарных, внешнепланарных, последовательно-параллельных графов, а также кактусов блочно-устойчивы, а например, класс графов с заданным диаметром не блочно-устойчивый.

2. Выражение числа помеченных связных графов с заданными количеством вершин и цикломатическим числом с помощью многочленов разбиений

Многочлены разбиений (многочлены Белла) $Y_n(x_1,\ldots,x_n)$ могут быть определены с помощью производящей функции [14]:

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m\frac{t^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{t^n}{n!}, \quad Y_0 = 1. \qquad (4)$$

Для этих многочленов известна формула [14]

$$Y_m(x_1,\dots,x_m)=\sum_{\pi(m)}\frac{m!}{k_1!\cdots k_m!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{x_m}{m!}\right)^{k_m},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(m)$ числа m: $k_1+2k_2+\dots+mk_m=m,\ k_i\geqslant 0,\ i=1,\dots,m.$

Теорема 1. *Пусть $Y_k(x_1,\dots,x_k)$ — многочлен разбиений, а $B_k(z)$ — экспоненциальная производящая функция для числа помеченных блоков с цикломатическим числом k. Тогда число $S(n,k)$ помеченных связных графов с n вершинами и цикломатическим числом k при $k\geqslant 0$ равно*

$$S(n,k)=\frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}]\exp(nz)Y_k(nB_1'(z),\dots,nk!B_k'(z))z^{-n}. \tag{5}$$

Доказательство. Так как цикломатическое число k связного графа выражается через число вершин графа n и число его рёбер m по формуле $k=m-n+1$, в силу (3) имеем

$$S(n,k)=C_{n,n+k-1}=\frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}y^{-1}]\exp\left(n\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}\right)x^{-n}y^{-n-k}.$$

После замены переменной $z=xy$ получим

$$\widetilde{B}(z,y)=\frac{z^2}{2y}+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}B_{n,n+k-1}\frac{z^ny^{k-1}}{n!}=\frac{z^2}{2y}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k(z)y^{k-1},$$

$$\begin{aligned}S(n,k)&=\frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}y^{-1}]\exp\left(ny\frac{\partial\widetilde{B}(z,y)}{\partial z}\right)z^{-n}y^{-k-1}\\&=\frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}y^{-1}]\exp\left(nz+\sum_{k=1}^{\infty}nB_k'(z)y^k\right)z^{-n}y^{-k-1}\\&=\frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}y^{-1}]\exp(nz)\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k\frac{y^k}{k!}\right)z^{-n}y^{-k-1},\end{aligned}$$

где $x_k=nk!B_k'(z)$. С помощью разложения (4) найдём

$$\begin{aligned}S(n,k)&=\frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}y^{-1}]\exp(nz)\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(x_1,\dots,x_n)\frac{y^{n-k-1}}{n!}z^{-n}\\&=\frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}]\exp(nz)Y_k(x_1,\dots,x_k)z^{-n}.\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть $Y_k(x_1, \dots, x_k)$ — многочлен разбиений, а $B_k(z)$ — экспоненциальная производящая функция для числа помеченных блоков с цикломатическим числом k. Тогда число $\overline{S}(n, k)$ помеченных связных графов без мостов с n вершинами и цикломатическим числом $k \geqslant 1$ равно*

$$\overline{S}(n, k) = \frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}]Y_k(nB_1'(z), \dots, nk!B_k'(z))z^{-n}. \tag{6}$$

Доказательство. Так как граф без мостов не имеет блоков, состоящих из одного ребра, имеем

$$\widetilde{B}(z, y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(z)y^{k-1},$$

$$\overline{S}(n, k) = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}y^{-1}] \exp\left(ny\frac{\partial \widetilde{B}(z, y)}{\partial z}\right)z^{-n}y^{-k-1}$$
$$= \frac{(n-1)!}{n}\left[z^{-1}y^{-1}\right]\sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(nB_k'(z)y^k\right)z^{-n}y^{-k-1}$$
$$= \frac{(n-1)!}{nk!}\left[z^{-1}\right]Y_k(nB_1'(z), \dots, nk!B_k'(z))z^{-n}.$$

Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Пусть $B_k(z)$ — экспоненциальная производящая функция для числа $B(n, k)$ помеченных n-вершинных блоков с цикломатическим числом k. Тогда число $\overline{S}(n, 2)$ помеченных связных бициклических графов без мостов с n вершинами и число $\overline{S}(n, 3)$ помеченных связных трициклических графов без мостов с n вершинами соответственно равны*

$$\overline{S}(n, 2) = B(n, 2) + \frac{n!}{2}[z^{-1}](B_1'(z))^2 z^{-n},$$

$$\overline{S}(n, 3) = B(n, 3) + \frac{n!}{6}[z^{-1}](n(B_1'(z))^3 + 6B_1'(z)B_2'(z))z^{-n}.$$

Доказательство. Так как $Y_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$ и $Y_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 3x_1x_2 + x_3$ [14], из (6) следуют равенства

$$\overline{S}(n, 2) = \frac{(n-1)!}{2}[z^{-1}](n(B_1'(z))^2 + 2B_2'(z))z^{-n},$$

$$\overline{S}(n, 3) = \frac{(n-1)!}{6}[z^{-1}](n^2(B_1'(z))^3 + 6nB_1'(z)B_2'(z) + 6B_3'(z))z^{-n}.$$

Интегрируя по частям в каждом из этих равенств последнее слагаемое, получим утверждение следствия.

Проверка показывает совпадение $\overline{S}(n,2)$ и $\overline{S}(n,3)$ с результатами, полученными независимо в [5].

3. Перечисление помеченных кактусов с заданными количеством вершин и цикломатическим числом

Кактусом называется связный граф, в котором нет рёбер, принадлежащих более чем одному простому циклу [13]. Все блоки кактуса — рёбра или простые циклы.

Форд и Уленбек перечислили помеченные кактусы с заданным распределением числа вершин по циклам, а также нашли соответствующую асимптотику при большом числе вершин [17, 18]. В [4] получена формула для числа помеченных кактусов с заданным числом вершин, не содержащая суммирования по всем разбиениям целого числа вершин. Г. Н. Багаев и Е. Ф. Дмитриев без доказательства привели асимптотику для числа помеченных кактусов с заданным цикломатическим числом [1].

Теорема 2. *Число $Ca(n,k)$ помеченных кактусов с n вершинами и цикломатическим числом k при $n \geqslant 3$ и $k \geqslant 1$ равно*

$$Ca(n,k) = \frac{(n-1)!}{k!2^k} \sum_{i=0}^{n-2k-1} \binom{k+i-1}{k-1} \frac{n^{n-k-i-2}}{(n-2k-i-1)!}. \qquad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим специальный случай блоков связного графа. Обозначим через $\overline{B}(x,y)$ экспоненциальную производящую функцию для числа помеченных блоков, которые являются ребром или простым циклом. Так как число помеченных циклов с n вершинами и m рёбрами равно $\delta_{n,m}(n-1)!/2$, где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера, получим

$$\overline{B}(x,y) = \frac{x^2y}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=0}^{n(n-1)/2} \delta_{n,m} \frac{1}{2}(n-1)! \frac{x^n y^m}{n!} = \frac{x^2y}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2}(n-1)! \frac{x^n y^n}{n!},$$

$$\frac{\partial \overline{B}(x,y)}{\partial x} = xy + \frac{x^2y^3}{2(1-xy)}.$$

Применяя формулу (3), имеем

$$Ca(n,k) = \frac{(n-1)!}{n} [x^{-1}y^{-1}] \exp(nxy) \exp\left(\frac{nx^2y^3}{2(1-xy)}\right) x^{-n} y^{-m-1}.$$

Разлагая экспоненты в степенной ряд, найдём

$$Ca(n,k) = \frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}y^{-1}]\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^p x^p y^p}{p!}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{n^q x^{2q}y^{3q}}{q!2^q(1-xy)^q}x^{-n}y^{-m-1}.$$

Используя известный ряд [11]

$$(1-z)^{-q} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+q-1}{i}z^i, \tag{8}$$

имеем

$$Ca(n,k) = \frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}y^{-1}] \times \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{n^{p+q}}{p!q!2^q}\binom{i+q-1}{i}x^{p+2q+i-n}y^{p+3q+i-m-1}.$$

Решая систему $p+2q+i-n=-1,\ p+3q+i-m-1=-1$, получим $q=m-n+1,\ p=n-2q-i-1=3n-2m-i-3$. Следовательно,

$$Ca(n,k) = \frac{(n-1)!}{n}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{n^{2n-m-i-2}2^{n-m-1}}{(m-n-1)!(3n-2m-i-3)!}\binom{m-n+i}{i}.$$

Учитывая, что $k=m-n+1$, найдём

$$Ca(n,k) = \frac{(n-1)!}{nk!2^k}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k+i-1}{i}\frac{n^{n-k-i-1}}{(n-2k-i-1)!}.$$

Так как факториал $(n-2k-i-1)!$ в знаменателе обнуляет слагаемые при $n-2k-i-1<0$, теорема 2 доказана.

Следствие 3. *Число помеченных унициклических графов $U(n)$ с n вершинами равно*

$$U(n) = \frac{(n-1)!}{2}\sum_{k=0}^{n-3}\frac{n^k}{k!}.$$

Доказательство. Поскольку унициклический граф является унициклическим кактусом, в силу формулы (7) имеем

$$U(n) = Ca(n,1) = \frac{(n-1)!}{2}\sum_{i=0}^{n-3}\frac{n^{n-i-3}}{(n-i-3)!},$$

что совпадает с классической формулой Реньи. Следствие 3 доказано.

В табл. 1 представлены числа бициклических $Ca(n,2)$, трициклических $Ca(n,3)$ и тетрациклических $Ca(n,4)$ кактусов, вычисленные по формуле (7) с помощью Maple.

Т а б л и ц а 1

n	5	6	7	8	9	10	11
$Ca(n,2)$	15	720	26145	893760	30793770	1098921600	41102543790
$Ca(n,3)$	0	0	735	73920	5000940	292320000	16132173750
$Ca(n,4)$	0	0	0	0	76545	13230000	1440175275

Теорема 3. *Число $\widetilde{C}a(n,k)$ помеченных эйлеровых кактусов с n вершинами и цикломатическим числом k при $n \geqslant 3$ и $k \geqslant 1$ равно*

$$\widetilde{C}a(n,k) = \frac{(n-1)!n^{k-1}}{k!2^k}\binom{n-k-2}{k-1}.$$

Доказательство. Так как у эйлеровых кактусов нет блоков, состоящих из одного ребра [7], производящая функция для блоков имеет вид

$$\widetilde{B}(x,y) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2}(n-1)!\frac{x^n y^n}{n!}, \quad \frac{\partial \widetilde{B}(x,y)}{\partial x} = \frac{x^2y^3}{2(1-xy)}.$$

С помощью формулы (1) получим

$$\widetilde{C}a(n,k) = \frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}y^{-1}]\exp\left(\frac{nx^2y^3}{2(1-xy)}\right)x^{-n}y^{-m-1}.$$

Разлагая экспоненту в степенной ряд и используя ряд (8), найдём

$$\begin{aligned}\widetilde{C}a(n,k) &= \frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}y^{-1}]\sum_{q=0}^{\infty}\frac{n^q x^{2q}y^{3q}}{q!2^q(1-xy)^q}x^{-n}y^{-m-1}\\ &= \frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}y^{-1}]\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{n^q}{q!2^q}\binom{i+q-1}{i}x^{2q+i-n}y^{3q+i-m-1}.\end{aligned}$$

Решая систему $2q+i-n=-1,\ 3q+i-m-1=-1$, получим $q = m-n+1,\ i = m-3q = 3n-2m-3$. Следовательно,

$$\widetilde{C}a(n,k) = \frac{(n-1)!}{n}\frac{n^k}{k!2^k}\binom{2n-m-3}{m-n}.$$

Учитывая, что $k = m - n + 1$, окончательно получим

$$\widetilde{C}a(n,k) = \frac{(n-1)!n^{k-1}}{k!2^k}\binom{n-k-2}{k-1}.$$

Теорема 3 доказана.

Следствие 4. *Число помеченных бициклических эйлеровых графов e_n с n вершинами равно*

$$e_n = \frac{n-4}{8}n!.$$

Доказательство. Так как бициклических эйлеровых блоков не существует [6], все бициклические эйлеровы графы — кактусы. Поэтому в силу теоремы 3 получим

$$e_n = \widetilde{C}a(n,2) = \frac{(n-1)!n}{2!2^2}\binom{n-4}{1} = \frac{n-4}{8}n!,$$

что совпадает с результатом автора, полученным в [6]. Следствие 4 доказано.

4. Асимптотическое перечисление помеченных кактусов с заданными количеством вершин и цикломатическим числом

Лемма 2. *Пусть $U(a,b,z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми. Тогда при фиксированных числах a и k, k — целое число, и $b \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$U(a, b-k, b) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

Доказательство. Для $U(a,b,z)$ при фиксированном числе a и $b \to \infty$ известна асимптотическая формула [20].

$$U(a,b,b) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

В силу рекуррентного соотношения [20]

$$U(a, b-1, b) = U(a,b,b) - aU(a+1,b,b)$$

имеем

$$U(a,b-1,b) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} - a\frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{(a+1)/2}\Gamma\left(\frac{a+2}{2}\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}\left(1 - \frac{a\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{(2b)^{1/2}\Gamma\left(\frac{a+2}{2}\right)}\right) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

Лемма верна при $k = 1$. Используем индукцию по k. Допустим, что лемма верна для $U(a, b-k, b)$, $k \geqslant 1$, и докажем, что она верна для $U(a, b-k-1, b)$.

Опять с помощью рекуррентного соотношения и асимптотики для $U(a, b, z)$ найдём

$$U(a,b-k-1,b) = U(a,b-k,b) - aU(a+1,b-k,b)$$
$$\sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} - a\frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{(a+1)/2}\Gamma\left(\frac{a+2}{2}\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}\left(1 - \frac{a\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{(2b)^{1/2}\Gamma\left(\frac{a+2}{2}\right)}\right) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 4. *Для числа $Ca(n,k)$ помеченных кактусов с n вершинами и фиксированным цикломатическим числом $k \geqslant 1$ при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$Ca(n,k) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2}k!\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} n^{n+\frac{3k}{2}-2}.$$

Доказательство. Выведем из формулы (7) интегральное представление для чисел $Ca(n,k)$. Так как $n! = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^n dt$, имеем

$$Ca(n,k) = \frac{(n-1)!}{k!2^k}\sum_{i=0}^{n-2k-1}\frac{(k+i-1)!n^{n-k-i-2}}{(k-1)!i!(n-2k-i-1)!}$$
$$= \frac{(n-1)!}{k!(k-1)!2^k(n-2k-1)!}\sum_{i=0}^{n-2k-1}\binom{n-2k-1}{i}n^{n-k-i-2}(k+i-1)!$$
$$= \frac{(n-1)!n^{n-k-2}}{k!(k-1)!2^k(n-2k-1)!}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{k-1}\sum_{i=0}^{n-2k-1}\binom{n-2k-1}{i}\left(\frac{t}{n}\right)^i dt$$
$$= \frac{(n-1)!n^{n-k-2}}{k!(k-1)!2^k(n-2k-1)!}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{k-1}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n-2k-1} dt.$$

После замены переменной $t = nx$ в интеграле получим

$$Ca(n,k) = \frac{(n-1)!n^{n-2}}{k!(k-1)!2^k(n-2k-1)!}\int\limits_0^\infty e^{-nx}x^{k-1}(1+x)^{n-2k-1}\,dx.$$

Используем интегральное представление для вырожденной гипергеометрической функции Трикоми $U(a,b,z)$ [20]:

$$U(a,b,z) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int\limits_0^\infty e^{-zt}t^{a-1}(1+t)^{b-a-1}\,dt.$$

В нашем случае $a = k,\ b = n-k,\ z = n$, следовательно,

$$Ca(n,k) = \frac{(n-1)!n^{n-2}}{k!2^k(n-2k-1)!}\,U(k,n-k,n).$$

Применяя лемму 2, найдём

$$Ca(n,k) \sim \frac{(n-1)!n^{n-2}}{k!2^k(n-2k-1)!}\frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^{k/2}\Gamma\bigl(\frac{k+1}{2}\bigr)}.$$

Учитывая, что $n!/(n-m)! \sim n^m$ при фиксированном m и $n \to \infty$, получим утверждение теоремы. Теорема 4 доказана.

Г. Н. Багаев и Е. Ф. Дмитриев дали без доказательства асимптотическую формулу при фиксированном k и $n \to \infty$ [1]:

$$Ca(n,k) \sim \frac{A_k}{k!(k-1)!!2^k}n^{n+\frac{3}{2}k-2},$$

где $A_k = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ при $k = 2l+1$ и $A_k = 1$ при $k = 2l$.

Поскольку [11] $\Gamma\bigl(k+\frac{1}{2}\bigr) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^k}(2k-1)!!$, при $k = 2l$ имеем $(k-1)!! = \frac{2^l}{\sqrt{\pi}\Gamma\bigl(l+\frac{1}{2}\bigr)}$, следовательно,

$$Ca(n,k) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{k!2^l2^{2l}\Gamma\bigl(l+\frac{1}{2}\bigr)}n^{n+\frac{3}{2}k-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2}k!\Gamma\bigl(\frac{k+1}{2}\bigr)}n^{n+\frac{3k}{2}-2}.$$

При $k = 2l+1$ имеем $(k-1)!! = (2l)!! = 2^l l!$, стало быть,

$$Ca(n,k) \sim \frac{\sqrt{\pi/2}}{k!2^l l!2^k}n^{n+\frac{3}{2}k-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2}k!\Gamma\bigl(\frac{k+1}{2}\bigr)}n^{n+\frac{3k}{2}-2}.$$

Таким образом, асимптотика Багаева — Дмитриева полностью совпадает с асимптотикой из теоремы 4.

Зададим на множестве помеченных связных графов равномерное распределение вероятностей.

Следствие 5. *Пусть $P_k(n)$ — вероятность того, что помеченный связный граф с n вершинами и цикломатическим числом k является кактусом. Тогда при фиксированном $k \geqslant 1$ и $n \to \infty$*

$$P_k(n) \sim \frac{2^{k-2}\Gamma\left(\frac{3k-1}{2}\right)}{3^k k!(k-1)!\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)d_{k-1}},$$

где $d_0 = \frac{1}{6}$, а d_k — коэффициенты Степанова — Райта [2, 22],

$$d_1 = d_2 = \frac{5}{36}, \quad d_{k+1} = d_k + \sum_{s=1}^{k-1} \frac{d_s d_{k-s}}{(s+1)\binom{k}{s}}, \quad k \geqslant 2.$$

Доказательство. Пусть $f(n, n+k)$ — число помеченных связных графов с n вершинами и $n+k$ рёбрами. Райт [22] доказал, что при $0 \leqslant k = o(n^{1/3})$ и $n \to \infty$ верна асимптотика

$$f(n, n+k) \sim f_k n^{n+(3k-1)/2}, \quad f_0 = (\pi/8)^{1/2}, \quad f_k = \frac{\sqrt{\pi}3^k(k-1)!d_k}{2^{(5k-1)/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}k\right)}, \ k \geqslant 1.$$

Поскольку число рёбер связного графа с n вершинами и цикломатическим числом k равно $n+k-1$, при $n \to \infty$ имеем

$$P_k(n) = \frac{Ca(n,k)}{f(n, n+k-1)} \sim \frac{\sqrt{\pi}n^{n+\frac{3k}{2}-2}}{2^{3k/2}k!\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)f_{k-1}n^{n+(3k-4)/2}}.$$

Умножая числитель и знаменатель дроби для f_k на $\frac{3}{2}k$, с учётом тождества для гамма-функции $k\Gamma(k) = \Gamma(k+1)$ найдём

$$f_k = \frac{\sqrt{\pi}3^k\frac{3}{2}k(k-1)!d_k}{2^{(5k-1)/2}\frac{3}{2}k\Gamma\left(\frac{3}{2}k\right)} = \frac{\sqrt{\pi}3^{k+1}k!d_k}{2^{(5k+1)/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}k+1\right)},$$

$$f_{k-1} = \frac{\sqrt{\pi}3^k(k-1)!d_{k-1}}{2^{(5k-4)/2}\Gamma\left(\frac{3k-1}{2}\right)}.$$

Подставляя выражение f_{k-1} в формулу для $P_k(n)$, получим утверждение следствия. В частности, имеем

$$P_1(n) \sim 1, \quad P_2(n) \sim \frac{3}{5}, \quad P_3(n) \sim \frac{4}{15}.$$

Следствие 5 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Багаев Г. Н., Дмитриев Е. Ф.** Перечисление связных отмеченных двудольных графов // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 12. С. 1061–1063.
2. **Воблый В. А.** О коэффициентах Райта и Степанова — Райта // Мат. заметки. 1987. Т. 42, вып. 6. С. 854–862.
3. **Воблый В. А.** О перечислении помеченных связных графов по числу точек сочленения // Дискрет. математика. 2008. Т. 20, вып. 1. С. 52–63.
4. **Воблый В. А.** Об одной формуле для числа помеченных связных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 4. С. 48–59.
5. **Воблый В. А.** Перечисление помеченных бициклических и трициклических графов без мостов // Мат. заметки. 2012. Т. 91, вып. 2. С. 308–311.
6. **Воблый В. А.** Перечисление помеченных связных бициклических и трициклических эйлеровых графов // Мат. заметки. 2012. Т. 92, вып. 5. С. 678–683.
7. **Воблый В. А.** Перечисление помеченных эйлеровых кактусов // Мат. XI Междунар. семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 18–23 янв. 2012 г.). М.: МГУ, 2012. С. 275–277.
8. **Воблый В. А.** Перечисление помеченных геодезических планарных графов // Мат. заметки. 2015. Т. 97, вып. 3. С. 336–341.
9. **Воблый В. А., Мелешко А. К.** Перечисление помеченных полноблочно-кактусных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 5. С. 24–32.
10. **Гульден Я., Джексон Д.** Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990. 504 с.
11. **Прудников А. П. и др.** Интегралы и ряды. Т. 1. М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. 800 с.
12. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
13. **Харари Ф., Палмер Э.** Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 326 с.
14. **Риордан Дж.** Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982. 256 с.
15. **Drmota M., Fusy E., Kang M., Kraus V., Rue J.** Asymptotic study of subcritical graph classes // arXiv:1003.4699v1 [math.CO] 24 Mar. 2010.
16. **Fleisher L.** Building chain and cactus representations of all minimum cuts from Hao–Orlin in the same asymptotic run time // J. Algorithms. 1999. Vol. 33, No. 1. P. 51–72.
17. **Ford G. W., Uhlenbeck G. E.** Combinatorial problems in the theory of graphs, I // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1956. Vol. 42, No. 3. P. 122–128.
18. **Ford G. W., Uhlenbeck G. E.** Combinatorial problems in the theory of graphs, III // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1956. Vol. 42, No. 8. P. 529–535.
19. **Leroux P.** Enumerative problems inspired by Mayer's theory of cluster integrals // Electron. J. Comb. 2004. Vol. 11, No. R32. P. 1–28.

20. **Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F.,Clark C. W.** NIST. Handbook of mathematical functions. New York: Cambridge Univ. Press, 2010. 951 p.
21. **Vicente R., Saad D., Kabashima Y.** Error-correcting code on a cactus: a solvable model // Europhys. Lett. 2000. Vol. 51, No. 6. P. 698–704.
22. **Wright E. M.** The number of connected sparsely edged graphs. III // J. Graph Theory. 1980. Vol. 4, No. 4. P. 393–407.

Воблый Виталий Антониевич

Статья поступила
13 июля 2015 г.

Исправленный вариант —
14 декабря 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
April–June 2016. Volume 23, No. 2. P. 5–20

UDC 519.8 DOI: 10.17377/daio.2016.23.501

ENUMERATION OF LABELED CONNECTED GRAPHS WITH GIVEN ORDER AND NUMBER OF EDGES

V. A. Voblyi[1]
[1]Bauman Moscow State University,
5 2nd Baumanskaya St., 105005, Moscow, Russia
e-mail: vitvobl@yandex.ru

Abstract. We deduce a new formula for the number of labeled connected graphs with a given order and number of edges in terms of the block generating function. Applying this formula, we exactly and asymptotically enumerate cacti with given order and cyclomatic number. Tab. 1, bibliogr. 22.

Keywords: enumeration, labeled graph, block, cactus, asymptotics.

REFERENCES

1. **G. N. Bagaev** and **E. F. Dmitriev,** The number of connected labeled bipartite graphs, *Dokl. Akad. Nauk BSSR,* **28**, No. 12, 1061–1063, 1984.
2. **V. A. Voblyi,** Wright and Stepanov–Wright coefficients, *Mat. Zametki,* **42**, No. 6, 854–862, 1987. Translated in *Math. Notes Acad. Sci. USSR,* **42**, No. 6, 969–974, 1987.
3. **V. A. Voblyi,** On enumeration of labelled connected graphs by the number of cutpoints, *Diskretn. Mat.,* **20**, No. 1, 52–63, 2008. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **18**, No. 1, 57–69, 2008.
4. **V. A. Voblyi,** A formula for the number of labeled connected graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **19**, No. 4, 48–59, 2012.
5. **V. A. Voblyi,** Enumeration of labeled connected bicyclic and tricyclic graphs without bridges, *Mat. Zametki,* **91**, No. 2, 308–311, 2012. Translated in *Math. Notes,* **91**, No. 1, 293–297, 2012.
6. **V. A. Voblyi,** Enumeration of labeled bicyclic and tricyclic Eulerian graphs, *Mat. Zametki,* **92**, No. 5, 678–683, 2012. Translated in *Math. Notes,* **92**, No. 5–6, 619–623, 2012.
7. **V. A. Voblyi,** Enumeration of labeled Eulerian cacti, in *Materialy XI Mezhdunarodnogo seminara "Diskretnaya matematika i ee prilozheniya"* (Proc. XI Int. Seminar "Discrete Math. and Its Applications"), *Moscow, Russia, Jan. 18–23, 2012,* pp. 275–277, Izd. Mekh.-Mat. Fak. MGU, Moscow, 2012.
8. **V. A. Voblyi,** Enumeration of labeled geodetic planar graphs, *Mat. Zametki,* **97**, No. 3, 336–341, 2015. Translated in *Math. Notes,* **97**, No. 3, 321–325, 2015.

9. **V. A. Voblyi** and **A. K. Meleshko,** The number of labeled block-cactus graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **21**, No. 2, 24–32, 2014. Translated in *J. Appl. Indust. Math.,* **8**, No. 3, 422—427, 2014.
10. **I. P. Goulden** and **D. M. Jackson,** *Combinatorial Enumeration,* John Wiley & Sons, New York, 1983. Translated under the title *Perechislitel'naya kombinatorika,* Nauka, Moscow, 1990.
11. **A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov,** and **O. I. Marichev,** *Integraly i ryady. T. 3: Elementarnye funktsii* (Integrals and Series. Vol. 3: Elementary Functions), Nauka, Moscow, 1981.
12. **F. Harary,** *Graph Theory,* Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 1969. Translated under the title *Teoriya grafov,* Mir, Moscow, 1973.
13. **F. Harary** and **E. M. Palmer,** *Graphical Enumeration,* Acad. Press, New York, 1973. Translated under the title *Perechislenie grafov,* Mir, Moscow, 1977.
14. **J. Riordan,** *Combinatorial Identities,* John Wiley & Sons, New York, 1968. Translated under the title *Kombinatornye tozhdestva,* Nauka, Moscow, 1982.
15. **M. Drmota, É. Fusy, M. Kang, V. Kraus,** and **J. Rué,** Asymptotic study of subcritical graph classes, 2010 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1003.4699).
16. **L. Fleisher,** Building chain and cactus representations of all minimum cuts from Hao–Orlin in the same asymptotic run time, *J. Algorithms,* **33**, No. 1, 51–72, 1999.
17. **G. W. Ford** and **G. E. Uhlenbeck,** Combinatorial problems in the theory graphs. I, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA,* **42**, No. 3, 122–128, 1956.
18. **G. W. Ford** and **G. E. Uhlenbeck,** Combinatorial problems in the theory graphs. III, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA,* **42**, No. 8, 529–535, 1956.
19. **P. Leroux,** Enumerative problems inspired by Mayer's theory of cluster integrals, *Electron. J. Comb.,* **11**, No. R32, 1–28, 2004.
20. **F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert,** and **C. W. Clark,** eds., *NIST Handbook of Mathematical Functions,* Cambridge Univ. Press, New York, 2010.
21. **R. Vicente, D. Saad,** and **Y. Kabashima,** Error-correcting code on a cactus: A solvable model, *Europhys. Lett.,* **51**, No. 6, 698–704, 2000.
22. **E. M. Wright,** The number of connected sparsely edged graphs. III. Asymptotic results, *J. Graph Theory,* **4**, No. 4, 393–407, 1980.

Vitali A. Voblyi

Received
13 July 2015

Revised
14 December 2015