ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2016. Том 23, № 2. С. 63–87

УДК 519.8 DOI: 10.17377/daio.2016.23.503

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКА В СЕТИ КАК ЗАДАЧА ПОИСКА НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

А. Ю. Крылатов[1,2]
[1]Санкт-Петербургский гос. университет,
Университетская наб., 7/9, 199034 Санкт-Петербург, Россия
[2]Институт проблем транспорта им. Н. С. Соломенко РАН,
12-я линия ВО, 13, 199178 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: a.krylatov@spbu.ru, aykrylatov@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена проблемам поиска конкурентного равновесия (распределение потоков с равным временем перемещения по альтернативным маршрутам) и системного оптимума (распределение потоков с минимальным средним временем перемещения) в сети из параллельных каналов с одной парой исток-сток. Время перемещения по каналам моделируется произвольными гладкими неубывающими функциями. Доказано, что задача поиска равновесного и оптимального потоков для данной сети может быть сведена к задаче поиска неподвижной точки, выраженной в явном виде. Разработан метод поиска равновесного и оптимального распределений потоков в виде процедуры простой итерации. Доказана сходимость метода со скоростью геометрической прогрессии, а при дополнительных достаточно естественных условиях доказана квадратичная сходимость метода. Библиогр. 30.

Ключевые слова: конкурентное равновесие, системный оптимум, неподвижная точка, потоки в сети.

Введение

В 1952 г. Вардроп сформулировала два принципа распределения потоков в сети [24]. Согласно первому принципу потоки в сети распределяются так, что время движения по всем используемым маршрутам одинаково и меньше времени свободного движения по неиспользуемым маршрутам между любой фиксированной парой исток-сток. Таким образом, первый принцип Вардроп описывает ситуацию равновесного распределения потоков, называемую *конкурентным равновесием* (user equilibrium).

Согласно второму принципу потоки в сети распределяются так, что среднее время движения по всем используемым маршрутам сети минимально. Таким образом, второй принцип Вардроп описывает ситуацию оптимального распределения потоков, называемую *системным оптимумом* (system optimum).

На сегодняшний день задачи поиска конкурентного равновесия и системного оптимума являются крайне актуальными исследовательскими проблемами как с практической, так и с теоретической точки зрения. Возрастающие масштабы сетей, обладающих высокой внутренней связностью, в частности, транспортных и телекоммуникационных, требуют развития новых методологических инструментов их анализа и конструирования. В связи с этим изучением проблем равновесного и оптимального распределений потоков в сети занимается большое количество исследователей по всему миру [8, 20, 25, 30].

Наиболее часто модели и методы оценки распределения потоков в сетях используются для их модернизации (network design problem) [15]. При этом под модернизацией обычно понимают добавление новых дуг к существующей сети или удаление старых. В процессе решения такой задачи может проявляться так называемый парадокс Браесса, который концептуально непосредственно связан с основными принципами распределения потоков в сети [7]. Разработка алгоритмов направленной передачи информации зачастую требует использования подходов оптимального распределения потоков [10]. Решение задачи управления светофорами в сетях (signal traffic control) также редко может быть получено без привлечения принципов распределения [13]. Усложнением моделирования процессов, происходящих в сетях, явилось развитие методов оценки динамического распределения потоков (dynamic flow assignment) [14].

Встречаются теоретико-игровые постановки задачи распределения потоков. В [2] приводится двухуровневая постановка задачи распределения потоков в сети при наличии конкурирующих между собой двух групп пользователей нижнего уровня [29]. Распределение потоков в условиях конкуренции произвольного числа групп пользователей рассмотрено в [3, 5, 9, 10, 26]. Обширный обзор применения методов теории игр при моделировании распределения потоков в сетях в зарубежной литературе дан в [18]. Статья [27] посвящена проблеме распределения потоков, когда предполагается наличие выделенных полос для экологически безопасного транспорта. Более обширному анализу этой проблемы посвящена глава в монографии [28].

Данная работа концентрируется на проблеме распределения потоков в сети из параллельных каналов. В предыдущих статьях, посвящённых анализу сетей из параллельных каналов, время перемещения из истока в сток моделировалось при помощи линейных BPR-функций [4, 6]. Показано, что для таких сетей равновесное распределение потоков может быть получено в явном виде. Процедура поиска ненулевых маршрутов в сети из параллельных каналов с произвольной BPR-функцией разработана в [19]. В настоящей статье время перемещения из истока в сток будет моделироваться при помощи произвольной гладкой неубывающей функции. Будет показано, что в таком случае удаётся свести задачу поиска распределения потоков к задаче поиска неподвижной точки. При этом будет доказано, что реализация процедуры простой итерации, возникающей вследствие преобразования исходной задачи к задаче поиска неподвижной точки, приводит к сходимости со скоростью геометрической прогрессии, а при дополнительных достаточно естественных условиях имеет место квадратичная сходимость.

Следует отметить, что формализация проблемы поиска равновесного распределения потоков в сети в виде задачи поиска неподвижной точки производилась в [16, 17]. Однако представленная там формализация носит обобщённый характер, указывая на то, что, в принципе, существует возможность такой формализации и, соответственно, возможность применения методов решения задач поиска неподвижной точки к решению задачи распределения потоков в сети. При этом специальных методов решения задачи распределения потоков, представленной в виде задачи поиска неподвижной точки, разработано не было и данный инструментарий больше не развивался [22]. Вклад настоящей работы, помимо прочего, заключается в том, что, не прибегая к инструментарию решения задач о неподвижной точке, удалось свести задачу распределения потоков в сети из параллельных каналов к нахождению неподвижной точки явно выраженного отображения. Более того, показано, что возникающие при этом процедуры простой итерации обладают квадратичной сходимостью при достаточно естественных условиях.

Таким образом, в настоящей работе построен новый алгоритм распределения потоков в сети с одной парой исток-сток (single-commodity) и параллельными маршрутами, обладающий квадратичной сходимостью. Построенный алгоритм вносит вклад в развитие класса методов параллельной декомпозиции (parallel decomposition algorithms) [22]. Методы данного класса решают задачу распределения потоков в произвольной сети с множеством пар исток-сток (multi-commodity) посредством разбиения этой сети на подсети с одной парой исток-сток и параллельного решения задач распределения потоков в этих сетях [12, 21, 22].

Статья построена следующим образом. Разд. 1 посвящён вопросу конкурентного равновесия в сети из параллельных каналов. Оптимизационная задача поиска конкурентного равновесия сводится к задаче поиска неподвижной точки, доказывается сходимость возникающего итерационного процесса к конкурентному равновесию. Разд. 2 посвящён исследованию системного оптимума в сети из параллельных каналов. В разд. 3 приводится алгоритм решения одной задачи нелинейной оптимизации.

1. Конкурентное равновесие в сети из параллельных каналов

Рассмотрим сеть, представленную ориентированным графом G, состоящим из двух узлов (исток, сток) и n непересекающихся дуг (маршрутов). Будем называть такую сеть *сетью из параллельных каналов*. Совокупный поток между истоком и стоком будем обозначать через F, а распределение F по дугам будем обозначать через $f_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i = F$. Время перемещения потока из истока в сток по дуге будем описывать гладкой неубывающей функцией на множестве неотрицательных вещественных чисел: $t_i \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $t_i(x) - t_i(y) \geqslant 0$ при $x - y \geqslant 0$, $x, y \in \mathbb{R}^+$, $i = \overline{1,n}$, где $\mathbb{R}^+$ — множество неотрицательных вещественных чисел. Более того, считаем, что $t_i(x) \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ и $\partial t_i(x)/\partial x > 0$, $x > 0$, $i = \overline{1,n}$. Данная функция называется *задержкой* или *стоимостью* при перемещении по дуге. Также введём $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $t(f) = (t_1(f_1), \ldots, t_n(f_n))$ и $\mathbf{f} = f^{\mathrm{T}}$.

Конкурентным равновесием (user-equilibrium) в сети из параллельных каналов является такое распределение потока F по имеющимся дугам $f^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*)$, что время передвижения из истока в сток одинаково для каждой используемой дуги и меньше времени свободного движения по любой неиспользуемой дуге [11, 24]:

$$t_i(f_i^*) \begin{cases} = t^* > 0 & \text{при } f_i^* > 0, \\ > t^* & \text{при } f_i^* = 0, \end{cases} \quad i = \overline{1,n}.$$

Доказано, что задача поиска конкурентного равновесия может быть сформулирована в виде оптимизационной задачи [23]. В случае сети из параллельных каналов имеет место следующая оптимизационная задача для поиска конкурентного равновесия:

$$\min_f z(f) = \min_f \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{f_i} t_i(u)\, du \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = F, \tag{2}$$

$$f_i \geqslant 0. \tag{3}$$

Введём дополнительные обозначения:

$$\varphi_i(x) = t_i(x) - \frac{dt_i(x)}{dx}x, \quad \psi_i(x) = \frac{1}{\frac{dt_i(x)}{dx}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Теорема 1. *Оптимизационная задача* (1)–(3) *эквивалентна следующей задаче поиска неподвижной точки*:

$$\mathbf{f} = \Phi(\mathbf{f}), \tag{4}$$

где компоненты $\mathbf{f}$ *и* $t(f)$ *перенумерованы таким образом, что*

$$\varphi_1(f_1) \leqslant \dots \leqslant \varphi_n(f_n), \tag{5}$$

а компоненты $\Phi(\mathbf{f}) = (\Phi_1(f), \dots, \Phi_n(f))^{\mathrm{T}}$ *имеют вид*

$$\Phi_i(f) = \begin{cases} \psi_i(f_i)\frac{F + \sum\limits_{s=1}^{m} \varphi_s(f_s)\psi_s(f_s)}{\sum\limits_{s=1}^{m} \psi_s(f_s)} - \varphi_i(f_i)\psi_i(f_i) & \text{при } i \leqslant m, \\ 0 & \text{при } i > m, \end{cases} \tag{6}$$

причём m *определяется из условия*

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_i(f_i)[\varphi_m(f_m) - \varphi_i(f_i)] \leqslant F < \sum_{i=1}^{m+1} \psi_i(f_i)[\varphi_{m+1}(f_{m+1}) - \varphi_i(f_i)]. \tag{7}$$

Доказательство. Для удобства изложения доказательства поделим его на три части.

(I) Аппроксимируем гладкие неубывающие функции $t_i(f_i) \in C^1(\mathbb{R}^+)$ при $f_i \geqslant 0$ кусочно-линейными:

$$t_i(f_i) \approx \widehat{t}_i(f_i) = \sum_{j=1}^{q_i} \left[a_i^j + b_i^j f_i\right] \delta I_i^j, \quad i = \overline{1, n},$$

где

$$\delta I_i^j = \begin{cases} 1 & \text{при } f_i \in I_j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а $I_i = \left(I_i^1, \ldots, I_i^{q_i}\right)$ — множество интервалов, соответствующих линейным отрезкам кусочно-линейной функции $\widehat{t}_i(f_i)$, с заданной точностью ε: $\left|t_i(f_i) - \widehat{t}_i(f_i)\right| < \varepsilon$, $f_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,n}$.

Сформулируем задачу поиска конкурентного равновесия в сети из параллельных каналов (1)–(3) для случая кусочно-линейных функций задержки:

$$\min_f \widehat{z}(f) = \min_f \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{f_i} \sum_{j=1}^{q_i} \left[a_i^j + b_i^j u\right] \delta I_i^j \, du \tag{8}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = F, \tag{9}$$

$$f_i \geqslant 0. \tag{10}$$

Применим условия Куна — Таккера к оптимизационной задаче (8)–(10), продифференцировав лагранжиан

$$L = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{f_i} \sum_{j=1}^{q_i} \left[a_i^j + b_i^j u\right] \delta I_i^j \, du + \omega \left(F - \sum_{i=1}^{n} f_i \right) + \sum_{i=1}^{n} (-\eta_i) f_i$$

по f_i и приравняв полученное выражение к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial f_i} = \sum_{j=1}^{q_i} \left[a_i^j + b_i^j f_i\right] \delta I_i^j - \omega - \eta_i = 0,$$

где ω и η_i, $i = \overline{1,n}$, — множители Лагранжа. Таким образом, получаем

$$\widehat{t}_i(f_i) = \sum_{j=1}^{q_i} \left[a_i^j + b_i^j f_i\right] \delta I_i^j = \omega + \eta_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{11}$$

Условие дополняющей нежёсткости требует, чтобы выполнялись равенства $\eta_i f_i = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$. В таком случае если $f_i > 0$, то $\eta_i = 0$ и согласно (11) имеем

$$\widehat{t}_i(f_i) = \sum_{j=1}^{q_i} \left[a_i^j + b_i^j f_i\right] \delta I_i^j = \omega.$$

С другой стороны, если $f_i = 0$, то $\eta_i \geqslant 0$ и согласно (11)

$$\widehat{t}_i(f_i) = \sum_{j=1}^{q_i} \left[a_i^j + b_i^j f_i\right] \delta I_i^j \geqslant \omega.$$

Полученные соотношения могут быть выписаны в виде следующего условия:

$$\widehat{t}_i(f_i) = \sum_{j=1}^{q_i} \left[a_i^j + b_i^j f_i\right] \delta I_i^j \begin{cases} = \omega, & \text{если } f_i > 0, \\ \geqslant \omega, & \text{если } f_i = 0, \end{cases} \qquad i = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Выразим f_i через ω, воспользовавшись условием (12):

$$f_i = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{q_i} \left[\frac{\omega - a_i^j}{b_i^j}\right] \delta I_i^j, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{q_i} a_i^j \delta I_i^j \leqslant \omega, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{q_i} a_i^j \delta I_i^j > \omega, \end{cases} \qquad i = \overline{1, n}. \tag{13}$$

Функции $\widehat{t}_i(f_i)$ для всех $i = \overline{1, n}$ выпуклы, а следовательно, условия Куна — Таккера являются необходимыми и достаточными. Таким образом, можно утверждать, что распределение f^* образует конкурентное равновесие в сети из параллельных каналов тогда и только тогда, когда существует ω^* такое, что f^* и ω^* удовлетворяют соотношению (12) и, следовательно, соотношению (13).

(II) Предположим, что f^* и ω^* определены. Тогда каждому f_i^*, $i = \overline{1, n}$, соответствует фиксированный интервал $I_i^{j_i{}^*}$ и коэффициенты $a_i^{j_i{}^*}$ и $b_i^{j_i{}^*}$ соответственно. Без ограничения общности перенумеруем дуги так, чтобы выполнялось соотношение

$$a_1^{j_1{}^*} \leqslant \cdots \leqslant a_n^{j_n{}^*}. \tag{14}$$

В качестве m возьмём номер дуги такой, что $a_m^{j_m{}^*} \leqslant \omega^* < a_{m+1}^{j_{m+1}{}^*}$. Тогда, подставляя выражение (13) в (9), имеем

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{\omega^* - a_i^{j_i{}^*}}{b_i^{j_i{}^*}}\right] = F, \tag{15}$$

следовательно, можно явно выразить ω^*:

$$\omega^* = \frac{F + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^{j_i{}^*}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i^{j_i{}^*}}}. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (13), получаем явное выражение для f^*:

$$f_i^* = \begin{cases} \frac{1}{b_i^{j^*}} \frac{F + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^{j_i{}^*}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i^{j_i{}^*}}} - \frac{a_i^{j^*}}{b_i^{j^*}}, & \text{если } i \leqslant m, \\ 0, & \text{если } i > m, \end{cases} \qquad i = \overline{1, n}. \tag{17}$$

Определим значение m, воспользовавшись выражением (15) и соотношением $a_m^{j_m *} \leqslant \omega^* < a_{m+1}^{j_{m+1} *}$:

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{a_m^{j_m *} - a_i^{j_i *}}{b_i^{j_i *}}\right] \leqslant F < \sum_{i=1}^{m+1}\left[\frac{a_{m+1}^{j_{m+1} *} - a_i^{j_i *}}{b_i^{j_i *}}\right]. \qquad (18)$$

Таким образом, конкурентное равновесие в сети из параллельных каналов с кусочно-линейными функциями задержки на дугах выражается соотношением (17) при выполнении (14) и условии (18).

(III) Кусочно-линейные функции $\widehat{t}_i(f_i)$, $i = \overline{1,n}$, заданы таким образом, что

$$\left|\widehat{t}_i(f_i) - t_i(f_i)\right| < \varepsilon, \quad f_i \geqslant 0,$$

следовательно, $\left|a_i^j + b_i^j f_i - t_i(f_i)\right| < \varepsilon$, $f_i \in I_i^j$, $j = \overline{1,q_i}$, $i = \overline{1,n}$. При этом для всех $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,q_i}$ в граничных точках интервала $I_i^j = \left[\dot{f}_i^j; \ddot{f}_i^j\right]$ значение кусочно-линейной функции $\widehat{t}_i(f_i)$ полностью совпадает со значением функции $t_i(f_i)$ (в силу определения кусочно-линейной функции):

$$\begin{cases} a_i^j + b_i^j \dot{f}_i^j = t_i\left(\dot{f}_i^j\right), \\ a_i^j + b_i^j \ddot{f}_i^j = t_i\left(\ddot{f}_i^j\right), \end{cases} \quad j = \overline{1,q_i},\ i = \overline{1,n},$$

откуда получаем

$$b_i^j = \frac{t_i\left(\ddot{f}_i^j\right) - t_i\left(\dot{f}_i^j\right)}{\ddot{f}_i^j - \dot{f}_i^j}, \quad j = \overline{1,q_i},\ i = \overline{1,n}, \qquad (19)$$

$$a_i^j = t_i\left(\ddot{f}_i^j\right) - \frac{t_i\left(\ddot{f}_i^j\right) - t_i\left(\dot{f}_i^j\right)}{\ddot{f}_i^j - \dot{f}_i^j}\ddot{f}_i^j, \quad j = \overline{1,q_i},\ i = \overline{1,n}. \qquad (20)$$

При $\varepsilon \to 0$ интервалы I_i^j для всех $j = \overline{1,q_i}$, $i = \overline{1,n}$ «сжимаются» в точку $\widehat{f}_i^j$, а для выражений (19) и (20) имеют место следующие пределы:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} b_i^j = \frac{dt_i\left(\widehat{f}_i^j\right)}{df_i}, \quad j = \overline{1,q_i},\ i = \overline{1,n}, \qquad (21)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a_i^j = t_i\left(\widehat{f}_i^j\right) - \frac{dt_i\left(\widehat{f}_i^j\right)}{df_i}\widehat{f}_i^j, \quad j = \overline{1,q_i},\ i = \overline{1,n}. \qquad (22)$$

В п. (II) доказано, что конкурентное равновесие в сети из параллельных каналов с кусочно-линейными функциями задержки на дугах выражается соотношением (17) при условии (14) и выполнении (18). При этом данное утверждение справедливо в случаях кусочно-линейных функций, приближающих исходные функции задержки со сколь угодно большой точностью. Таким образом, в силу гладкости функций задержки при $\varepsilon \to 0$ согласно выражениям (21) и (22) соотношения (17), (14) и (18) примут вид (6), (5) и (7) соответственно. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 говорит об эквивалентности задачи поиска конкурентного равновесия, сформулированной в виде оптимизационной задачи (1)–(3), и задачи поиска неподвижной точки (4) для сети из параллельных каналов. В свою очередь, благодаря представлению задачи поиска конкурентного равновесия в виде (4) нахождение равновесного распределения потоков в сети из параллельных каналов может быть реализовано в виде следующего процесса простой итерации:

$$\mathbf{f}^{k+1} = \Phi(\mathbf{f}^k), \tag{23}$$

где компоненты $\mathbf{f}^k$ и $t(f)$ на $(k+1)$-м шаге перенумерованы так, что

$$\varphi_1\bigl(f_1^k\bigr) \leqslant \cdots \leqslant \varphi_n\bigl(f_n^k\bigr),$$

а компоненты $\Phi(\mathbf{f}^k) = (\Phi_1(f^k), \ldots, \Phi_n(f^k))^{\mathrm{T}}$ имеют вид

$$\Phi_i(f^k) = \begin{cases} \psi_i\bigl(f_i^k\bigr)\dfrac{F + \sum\limits_{s=1}^{m^k} \varphi_s(f_s^k)\psi_s(f_s^k)}{\sum\limits_{s=1}^{m^k} \psi_s(f_s^k)} - \varphi_i\bigl(f_i^k\bigr)\psi_i\bigl(f_i^k\bigr) & \text{при } i \leqslant m^k, \\ 0 & \text{при } i > m^k, \end{cases}$$

где m^k определяется из условия

$$\sum_{i=1}^{m^k} \psi_i\bigl(f_i^k\bigr)\bigl[\varphi_{m^k}\bigl(f_{m^k}^k\bigr) - \varphi_i\bigl(f_i^k\bigr)\bigr] \leqslant F < \sum_{i=1}^{m^k+1} \psi_i\bigl(f_i^k\bigr)\bigl[\varphi_{m^k+1}\bigl(f_{m^k+1}^k\bigr) - \varphi_i\bigl(f_i^k\bigr)\bigr].$$

Теорема 2. *Существует δ-окрестность точки $\mathbf{f}^*$ такая, что при любом выборе начального приближения $\mathbf{f}^0$ из этой окрестности последовательность $\{\mathbf{f}^k\}$ итерационного процесса (23) не выходит из неё и имеет место сходимость этой последовательности со скоростью геометрической прогрессии к точке $\mathbf{f}^*$.*

Доказательство. Ради удобства дальнейшего изложения будем использовать следующую общепринятую запись для обозначения производной: $\frac{dt_i(f_i)}{df_i} = t_i'(f_i)$. В таком случае произведение $\varphi_i(f_i)$ и $\psi_i(f_i)$ примет следующий вид для всех $i = \overline{1,n}$:

$$\varphi_i(f_i)\psi_i(f_i) = \frac{t_i(f_i) - t_i'(f_i)f_i}{t_i'(f_i)} = \frac{t_i(f_i)}{t_i'(f_i)} - f_i. \tag{24}$$

Рассмотрим $(k+1)$-й шаг итерационного процесса (23), на котором при $i \leqslant m^k$ с учётом (24) $\Phi_i(f^k)$ примут вид

$$\Phi_i(f^k) = f_i^k - \frac{t_i\big(f_i^k\big)}{t_i'\big(f_i^k\big)} + \frac{F - \sum\limits_{s=1}^{m^k}\Big[f_s^k - \frac{t_s(f_s^k)}{t_s'(f_s^k)}\Big]}{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{t_i'(f_i^k)}{t_s'(f_s^k)}}.$$

Таким образом, итерационный процесс (23) имеет следующий явный вид на $(k+1)$-м шаге при $i \leqslant m^k$:

$$f_i^{k+1} = f_i^k - \frac{t_i\big(f_i^k\big)}{t_i'\big(f_i^k\big)} + \frac{F - \sum\limits_{s=1}^{m^k}\Big[f_s^k - \frac{t_s(f_s^k)}{t_s'(f_s^k)}\Big]}{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{t_i'(f_i^k)}{t_s'(f_s^k)}}. \tag{25}$$

Пусть f^* — распределение, соответствующее конкурентному равновесию потоков в сети. Рассмотрим разность $\big(f_i^{k+1} - f_i^*\big)$ при $i \leqslant m^k$. Будем считать, что f^k принадлежит такой δ-окрестности f^*, что $m^k = m^*$, и тогда имеют место следующие два соотношения: $F = \sum\limits_{s=1}^{m^*} f_s^* = \sum\limits_{s=1}^{m^k} f_s^*$ и $t_i\big(f_i^*\big) = t^* > 0$ для всех $i = \overline{1,m^k}$, а значит,

$$f_i^{k+1} - f_i^* = \big(f_i^k - f_i^*\big) - \frac{t_i\big(f_i^k\big)}{t_i'\big(f_i^k\big)} + \frac{F - \sum\limits_{s=1}^{m^k}\Big[f_s^k - \frac{t_s(f_s^k)}{t_s'(f_s^k)}\Big]}{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{t_i'(f_i^k)}{t_s'(f_s^k)}}$$

$$= \big(f_i^k - f_i^*\big) - \frac{\big(t_i\big(f_i^k\big) - t_i\big(f_i^*\big)\big) + t^*}{t_i'\big(f_i^k\big)} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\Big[\big(f_s^k - f_s^*\big) - \frac{(t_s(f_s^k) - t_s(f_s^*)) + t^*}{t_s'(f_s^k)}\Big]}{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{t_i'(f_i^k)}{t_s'(f_s^k)}}$$

$$= \left(f_i^k - f_i^*\right) - \frac{\left(t_i\left(f_i^k\right) - t_i\left(f_i^*\right)\right)}{t_i'\left(f_i^k\right)} - \frac{t^*}{t_i'\left(f_i^k\right)} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{m^k} \left[(f_s^k - f_s^*) - \frac{(t_s(f_s^k) - t_s(f_s^*))}{t_s'(f_s^k)}\right]}{\sum\limits_{s=1}^{m^k} \frac{t_i'(f_i^k)}{t_s'(f_s^k)}}$$

$$+ \frac{t^*}{t_i'\left(f_i^k\right)} \frac{\sum\limits_{s=1}^{m^k} \frac{1}{t_s'(f_s^k)}}{\sum\limits_{s=1}^{m^k} \frac{1}{t_s'(f_s^k)}} = \left(f_i^k - f_i^*\right) - \frac{\left(t_i\left(f_i^k\right) - t_i\left(f_i^*\right)\right)}{t_i'\left(f_i^k\right)}$$

$$- \frac{\sum\limits_{s=1}^{m^k} \left[(f_s^k - f_s^*) - \frac{(t_s(f_s^k) - t_s(f_s^*))}{t_s'(f_s^k)}\right]}{\sum\limits_{s=1}^{m^k} \frac{t_i'(f_i^k)}{t_s'(f_s^k)}},$$

таким образом,

$$f_i^{k+1} - f_i^* =$$

$$= \left(f_i^k - f_i^*\right) - \frac{\left(t_i\left(f_i^k\right) - t_i\left(f_i^*\right)\right)}{t_i'\left(f_i^k\right)} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{m^k} \left[\left(f_s^k - f_s^*\right) - \frac{(t_s(f_s^k) - t_s(f_s^*))}{t_s'(f_s^k)}\right]}{\sum\limits_{s=1}^{m^k} \frac{t_i'(f_i^k)}{t_s'(f_s^k)}}. \quad (26)$$

Ради удобства последующих построений введём дополнительные обозначения:

$$\xi_i(x) = (x - f_i^*) - \frac{\left(t_i(x) - t_i\left(f_i^*\right)\right)}{t_i'(x)}, \quad \varsigma_i(x) = \sum_{s=1}^{m^k} \frac{t_i'(x)}{t_s'(f_s^k)}, \quad i = \overline{1, m^k},$$

в таком случае, соотношение (26) примет вид:

$$f_i^{k+1} - f_i^* = \xi_i\left(f_i^k\right) - \frac{\sum\limits_{s=1}^{m^k} \xi_s\left(f_s^k\right)}{\varsigma\left(f_i^k\right)}. \quad (27)$$

Заметим, что если воспользоваться формулой конечных приращений (теоремой Лагранжа о среднем значении), то для всех $i = \overline{1, m^k}$ имеет место равенство $t_i\left(f_i^k\right) - t_i\left(f_i^*\right) = t_i'\left(\theta_i^k\right)\left(f_i^k - f_i^*\right)$, где θ_i^k принадлежит интервалу между точками f_i^k и f_i^* и, следовательно, справедливо представление

$$\xi_i\left(f_i^k\right) = \left[1 - \frac{t_i'(\theta_i^k)}{t_i'\left(f_i^k\right)}\right]\left(f_i^k - f_i^*\right), \quad i = \overline{1, m^k}. \quad (28)$$

Обозначив $U_i\big(f_i^k\big) = \big[1 - \frac{t_i'(\theta_i^k)}{t_i'(f_i^k)}\big]$, $i = \overline{1, m^k}$, а $U(f^k) = \big(U_1\big(f_1^k\big), \ldots, U_{m^k}\big(f_{m^k}^k\big)\big)$ и подставив (28) в (27):

$$f_i^{k+1} - f_i^* = U_i\big(f_i^k\big)\big(f_i^k - f_i^*\big) - \frac{\sum\limits_{s=1}^{m^k} U_s\big(f_s^k\big)\big(f_s^k - f_s^*\big)}{\varsigma\big(f_i^k\big)},$$

получаем оценку

$$\big|f_i^{k+1} - f_i^*\big| \leqslant \big|U_i\big(f_i^k\big)\big| \cdot \big|f_i^k - f_i^*\big| + \frac{1}{\varsigma\big(f_i^k\big)} \cdot \sum_{s=1}^{m^k} \big|U_s\big(f_s^k\big)\big| \cdot \big|f_s^k - f_s^*\big|. \quad (29)$$

Просуммируем левые части неравенства (29) по $i = \overline{1, m^k}$, заметив, что

$$\sum_{i=1}^{m^k} \frac{1}{\varsigma\big(f_i^k\big)} = \sum_{i=1}^{m^k} \frac{1}{t_i'\big(f_i^k\big)} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{s=1}^{m^k} \frac{1}{t_s'(f_s^k)}} = 1.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m^k} \big|f_i^{k+1} - f_i^*\big| \leqslant \sum_{i=1}^{m^k} \big|U_i\big(f_i^k\big)\big| \cdot \big|f_i^k - f_i^*\big| + \sum_{s=1}^{m^k} \big|U_s\big(f_s^k\big)\big| \cdot \big|f_s^k - f_s^*\big|,$$

стало быть,

$$\sum_{i=1}^{m^k} \big|f_i^{k+1} - f_i^*\big| \leqslant \sum_{i=1}^{m^k} \big|2\, U_i\big(f_i^k\big)\big| \cdot \big|f_i^k - f_i^*\big|. \quad (30)$$

Имеет место сходимость $\big\|U\big(f^k\big)\big\| \to 0$ при $f^k \to f^*$, т. е.

$$\forall \varepsilon :\ 0 < \varepsilon < 1\ \exists \rho :\ \big\|2U\big(f^k\big)\big\| \leqslant \varepsilon < 1 \quad \text{при } f^k \in S_\rho(f^*),$$

где $S_\rho(f^*) = \{f : \|f - f^*\| \leqslant \rho\}$. Таким образом, из принадлежности $f^k \in S_\rho(f^*)$ и неравенства (30) следует, что

$$\sum_{i=1}^{m^k} \big|f_i^{k+1} - f_i^*\big| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{m^k} \big|f_i^k - f_i^*\big| \leqslant \varepsilon\rho < \rho,$$

а значит, $f^{k+1} \in S_\rho(f^*)$. Тем самым если $f^0 \in S_\rho(f^*)$, то $\{f^k\} \in S_\rho(f^*)$ и имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^{m^k} \left|f_i^k - f_i^*\right| \leqslant \varepsilon^k \sum_{i=1}^{m^k} \left|f_i^0 - f_i^*\right|,$$

откуда и следует сходимость последовательности $\{f^k\}$, причём со скоростью геометрической прогрессии. Теорема 2 доказана.

Заметим, что теорема 2 справедлива для гладких функций задержки на дугах сети из параллельных каналов. Однако если функции задержки дважды непрерывно дифференцируемы, то справедлива

Теорема 3. *Пусть в некоторой окрестности точки* $\mathbf{f}^*$ *функции* $t_i(\cdot) \in C^2$, $i = \overline{1, n}$, *удовлетворяют условиям*

$$\left|t_i'(x)\right| \geqslant \alpha_i > 0, \quad \left|t_i''(x)\right| \leqslant \beta_i < \infty. \tag{31}$$

Тогда существует δ*-окрестность точки* $\mathbf{f}^*$ *такая, что при любом выборе начального приближения* $\mathbf{f}^0$ *из этой окрестности последовательность* $\{\mathbf{f}^k\}$ *итерационного процесса* (23) *не выходит из неё и имеет место квадратичная сходимость этой последовательности к точке* $\mathbf{f}^*$.

Доказательство. Если $t_i(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}^+)$ для всех $i = \overline{1, n}$, то согласно формуле Тейлора имеет место разложение

$$t_i\big(f_i^*\big) = t_i\big(f_i^k\big) + t_i'\big(f_i^k\big)\big(f_i^* - f_i^k\big) + \frac{1}{2} t_i''\big(\Theta_i^k\big)\big(f_i^* - f_i^k\big)^2, \quad i = \overline{1, m^k}, \tag{32}$$

где Θ_i^k — некоторая точка между f_i^k и f_i^*. Учитывая равенство $t_i\big(f_i^*\big) = t^*$, $i = \overline{1, m^k}$, перепишем выражение (32) в таком виде:

$$t^* = t_i\big(f_i^k\big) + t_i'\big(f_i^k\big)\big(f_i^* - f_i^k\big) + \frac{1}{2} t_i''\big(\Theta_i^k\big)\big(f_i^* - f_i^k\big)^2, \quad i = \overline{1, m^k}. \tag{33}$$

Запишем (25) следующим образом:

$$t_i\big(f_i^k\big) + t_i'\big(f_i^k\big)\big(f_i^{k+1} - f_i^k\big) = \frac{F - \sum\limits_{s=1}^{m^k} \Big[f_s^k - \frac{t_s(f_s^k)}{t_s'(f_s^k)}\Big]}{\sum\limits_{s=1}^{m^k} \frac{t_i'(f_i^k)}{t_s'(f_s^k)}}$$

и сложим полученное выражение с (33):

$$t^* + t_i'\big(f_i^k\big)\big(f_i^{k+1} - f_i^*\big) = \frac{1}{2} t_i''\big(\Theta_i^k\big)\big(f_i^* - f_i^k\big)^2 + \Omega, \quad i = \overline{1, m^k}, \tag{34}$$

где

$$\Omega=\frac{F-\sum\limits_{s=1}^{m^k}\left[f_s^k-\frac{t_s(f_s^k)}{t'_s(f_s^k)}\right]}{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{1}{t'_s(f_s^k)}}.$$

При этом в силу того, что $F=\sum\limits_{i=1}^{m^k}f_i^*$, имеет место равенство

$$\Omega=\frac{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\left[\left(f_s^*-f_s^k\right)+\frac{t_s(f_s^k)}{t'_s(f_s^k)}\right]}{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{1}{t'_s(f_s^k)}}. \tag{35}$$

Выразим $t_i\left(f_i^k\right)$, $i=\overline{1,m^k}$, из (33) и подставим в (35):

$$\Omega=\frac{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\left[\left(f_s^*-f_s^k\right)+\frac{t^*}{t'_s(f_s^k)}-\left(f_s^*-f_s^k\right)-\frac{1}{2}\frac{t''_s(\Theta_s^k)}{t'_s(f_s^k)}\left(f_s^*-f_s^k\right)^2\right]}{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{1}{t'_s(f_s^k)}},$$

откуда окончательно получаем

$$\Omega=t^*-\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{t''_s(\Theta_s^k)}{t'_s(f_s^k)}\left(f_s^*-f_s^k\right)^2}{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{1}{t'_s(f_s^k)}}. \tag{36}$$

Подставив (36) в (34), приходим к выражению

$$t'_i\left(f_i^k\right)\left(f_i^{k+1}-f_i^*\right)$$
$$=\frac{1}{2}t''_i\left(\Theta_i^k\right)\left(f_i^*-f_i^k\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{t''_s(\Theta_s^k)}{t'_s(f_s^k)}\left(f_s^*-f_s^k\right)^2}{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{1}{t'_s(f_s^k)}},\quad i=\overline{1,m^k}, \tag{37}$$

следовательно,

$$f_i^{k+1}-f_i^*=\frac{1}{2}\frac{t''_i\left(\Theta_i^k\right)}{t'_i\left(f_i^k\right)}\left(f_i^*-f_i^k\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{t''_s(\Theta_s^k)}{t'_s(f_s^k)}\left(f_s^*-f_s^k\right)^2}{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{t'_i(f_i^k)}{t'_s(f_s^k)}},\ \ i=\overline{1,m^k},$$

а значит, справедлива оценка

$$\left|f_i^{k+1}-f_i^*\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{t_i''(\Theta_i^k)}{t_i'\left(f_i^k\right)}\right| \cdot \left|f_i^*-f_i^k\right|^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left|t_i'\left(f_i^k\right)\right|}\cdot\frac{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\left|\frac{t_s''(\Theta_s^k)}{t_s'(f_s^k)}\right|\cdot\left|f_s^*-f_s^k\right|^2}{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{1}{|t_s'(f_s^k)|}},$$

которая после суммирования по $i=\overline{1,m^k}$ примет вид

$$\sum_{i=1}^{m^k}\left|f_i^{k+1}-f_i^*\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m^k}\left|\frac{t_i''(\Theta_i^k)}{t_i'\left(f_i^k\right)}\right|\cdot\left|f_i^*-f_i^k\right|^2,$$

что с учётом выполнения (31) в некоторой окрестности $\mathbf{f}^*$ влечёт

$$\sum_{i=1}^{m^k}\left|f_i^{k+1}-f_i^*\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m^k}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\cdot\left|f_i^*-f_i^k\right|^2. \tag{38}$$

Таким образом, по определению из [1] согласно (38) имеет место квадратичная сходимость последовательности $\{\mathbf{f}^k\}$ итерационного процесса (23) при любом выборе $\mathbf{f}^0$ из некоторой δ-окрестности $\mathbf{f}^*$. Теорема 3 доказана.

Замечание. Явное выражение итерационного процесса (4) имеет вид

$$f_i^{k+1}=f_i^k-\frac{t_i\left(f_i^k\right)}{t_i'\left(f_i^k\right)}+\frac{F-\sum\limits_{s=1}^{m^k}\left[f_s^k-\frac{t_s(f_s^k)}{t_s'(f_s^k)}\right]}{\sum\limits_{s=1}^{m^k}\frac{t_i'(f_i^k)}{t_s'(f_s^k)}},$$

стало быть, можно заметить, что на каждом новом шаге итерационного процесса оптимизационная задача (1)–(3) «решается» для случая линейных функций задержки, соответствующих касательным, проведённым к исходным функциям задержки в точках значений оптимального распределения потока, полученных на предшествующем шаге.

Теоремы 2 и 3 позволяют утверждать, что итерационный процесс (23) при $\mathbf{f}^0$, принадлежащем некоторой δ-окрестности точки $\mathbf{f}^*$, сходится к значению конкурентного равновесия при распределении потока F в сети из параллельных каналов, при этом при достаточно естественных требованиях к функциям задержки на дугах имеет место квадратичная сходимость. Как следует из доказательств обеих теорем, одним из ключевых требований к данной окрестности является выполнение равенства

$m^k = m^*$. Другими словами, как только итерационный процесс (23) «нащупает» оптимальное количество маршрутов, реализуется квадратичная сходимость. С другой стороны, алгоритму можно «подсказать», какие маршруты оптимальны, например, реализовав предварительно процедуру поиска оптимальных маршрутов, описанную в [19]. Более того, следует отметить, что в загруженных сетях используются все возможные маршруты, а значит, в качестве $\mathbf{f}^0$ можно брать $\mathbf{f}^0 = (F/n, \ldots, F/n)_n$.

2. Системный оптимум в сети из параллельных каналов

Системным оптимумом (system optimum) в сети из параллельных каналов является такое распределение потока F по имеющимся дугам $f^\dagger = (f_1^\dagger, \ldots, f_n^\dagger)$, что среднее время передвижения совокупного потока F из истока в сток минимально [11, 24].

Согласно определениям конкурентного равновесия и системного оптимума ясно, что распределения потоков, соответствующие этим двум принципам, различны. При этом концепция конкурентного равновесия применяется в тех случаях, когда моделируется поведение независимых агентов на сети, стремящихся минимизировать своё личное время перемещения. В свою очередь, системный оптимум полезен при моделировании ситуации, соответствующей внешнему воздействию на всех агентов на сети с целью минимизации среднего времени движения совокупного потока.

Доказано, что задача поиска системного оптимума может быть сформулирована в виде оптимизационной задачи [23]. В случае сети из параллельных каналов имеет место следующая оптимизационная задача для поиска конкурентного равновесия:

$$\min_f \mathtt{z}(f) = \min_f \sum_{i=1}^{n} t_i(f_i) f_i \tag{39}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = F, \tag{40}$$

$$f_i \geqslant 0. \tag{41}$$

Исследуя проблему нахождения системного оптимума в сети из параллельных каналов, будем считать, что $t_i(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}^+)$, $i = \overline{1,n}$, при неизменности всех остальных заданных выше свойств функций задержки. Введём дополнительные обозначения:

$$\varphi_i(x) = t_i(x) - \frac{dt_i(x)}{dx}x - \frac{d^2 t_i(x)}{dx^2}x^2, \quad \gamma_i(x) = \frac{1}{2\frac{dt_i(x)}{dx} + \frac{d^2 t_i(x)}{dx^2}x}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Теорема 4. *Оптимизационная задача* (39)–(41) *эквивалентна задаче поиска неподвижной точки*:

$$\mathbf{f} = \Psi(\mathbf{f}), \tag{42}$$

где компоненты $\mathbf{f}$ *и* $t(f)$ *перенумерованы так, что*

$$\varphi_1(f_1) \leqslant \dots \leqslant \varphi_n(f_n), \tag{43}$$

компоненты $\Psi(\mathbf{f}) = (\Psi_1(f), \dots, \Psi_n(f))^{\mathrm{T}}$ *имеют вид*

$$\Psi_i(f) = \begin{cases} \gamma_i(f_i)\dfrac{F + \sum\limits_{s=1}^{m} \varphi_s(f_s)\gamma_s(f_s)}{\sum\limits_{s=1}^{m} \gamma_s(f_s)} - \varphi_i(f_i)\gamma_i(f_i) & \text{при } i \leqslant m, \\ 0 & \text{при } i > m, \end{cases} \tag{44}$$

а m *определяется из условия*

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i(f_i)[\varphi_m(f_m) - \varphi_i(f_i)] \leqslant F < \sum_{i=1}^{m+1} \gamma_i(f_i)[\varphi_{m+1}(f_{m+1}) - \varphi_i(f_i)]. \tag{45}$$

Доказательство. Пусть $g_i(x) = \frac{d(t_i(x)x)}{dx}$, $i = \overline{1, n}$, тогда оптимизационная задача (39)–(41) может быть переформулирована в следующем виде:

$$\min_f \mathbf{z}(f) = \min_f \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{f_i} g_i(u)\, du \tag{46}$$

при ограничениях (40) и (41). Согласно теореме 1 задача (46) с ограничениями (40) и (41) эквивалентна задаче поиска неподвижной точки (42) при условиях (43)–(45). Теорема 4 доказана.

Теорема 4 позволяет свести процесс нахождения оптимального распределения потоков в сети из параллельных каналов к процедуре простой итерации:

$$\mathbf{f}^{k+1} = \Psi(\mathbf{f}^k), \tag{47}$$

где $\mathbf{f}^k$ удовлетворяет условиям (43)–(45).

Теорема 5. *Существует* δ*-окрестность точки* $\mathbf{f}^*$ *такая, что при любом выборе начального приближения* $\mathbf{f}^0$ *из этой окрестности последовательность* $\{\mathbf{f}^k\}$ *итерационного процесса* (42) *не выходит из неё и имеет место сходимость этой последовательности со скоростью геометрической прогрессии к точке* $\mathbf{f}^*$.

Более того, если в некоторой окрестности точки $\mathbf{f}^*$ *функции* $t_i(\cdot) \in C^3$, $i = \overline{1,n}$, *удовлетворяют условиям*

$$\left|2t_i'(x) + t_i''(x)x\right| \geqslant \alpha_i > 0, \quad \left|3t_i''(x) + t_i'''(x)x\right| \leqslant \beta_i < \infty,$$

то существует δ*-окрестность точки* $\mathbf{f}^*$ *такая, что при любом выборе начального приближения* $\mathbf{f}^0$ *из этой окрестности последовательность* $\{\mathbf{f}^k\}$ *итерационного процесса* (42) *не выходит из неё и имеет место квадратичная сходимость этой последовательности к точке* $\mathbf{f}^*$.

Доказательство следует из представления оптимизационной задачи (39)–(41) в виде задачи (46) с ограничениями (40) и (41) и теорем 2 и 3. Теорема 5 доказана.

Таким образом, как и в случае поиска конкурентного равновесия, задачу поиска системного оптимума в сети из параллельных каналов удалось свести к задаче поиска неподвижной точки, на базе которой можно реализовать процедуру простой итерации. При этом теорема 5 позволяет утверждать, что соответствующий итерационный процесс сходится к системному оптимуму с достаточно высокой скоростью.

3. Одна задача нелинейного программирования

Методика, применённая к решению задачи поиска конкурентного равновесия в сети из параллельных каналов и одной парой исток-сток (1)–(3) посредством сведе́ния её к задаче поиска неподвижной точки и запуска соответствующей процедуры простой итерации, может быть применена при решении более общей оптимизационной задаче. В самом деле, рассмотрим следующую задачу условной оптимизации:

$$Z(x^*) = \min_x \sum_{i=1}^{n} z_i(x_i) \tag{48}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A, \tag{49}$$

$$x_i \geqslant 0, \tag{50}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} = x^{\mathrm{T}}$, $a_i > 0$ для всех $i = \overline{1,n}$, $A > 0$, а первые производные функций $z_i(x) \in C^2(\mathbb{R}^+)$, $i = \overline{1,n}$, являются неубывающими функциями: $\frac{dz_i}{dx_i} \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $\frac{dz_i(x)}{dx_i} - \frac{dz_i(y)}{dx_i} \geqslant 0$ при $x - y \geqslant 0$, $x, y \in \mathbb{R}^+$, $i = \overline{1,n}$, и $\frac{dz_i(x)}{dx_i} \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $i = \overline{1,n}$.

Введём дополнительные обозначения:

$$\mu_i(\nu) = \frac{1}{a_i}\left(\frac{dz_i(\nu)}{dx_i} - \frac{d^2 z_i(\nu)}{dx_i^2}\nu\right), \quad \varrho_i(\nu) = a_i\left(\frac{d^2 z_i(\nu)}{dx_i^2}\right)^{-1}, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\mathfrak{z}(x) = (z_1(x_1), \ldots, z_n(x_n)).$$

Теорема 6. *Оптимизационная задача (48)–(50) эквивалентна следующей задаче поиска неподвижной точки*:

$$\mathbf{x} = \Upsilon(\mathbf{x}), \tag{51}$$

где компоненты $\mathbf{f}$ *и* $\mathfrak{z}(x)$ *перенумерованы так, что*

$$\mu_1(x_1) \leqslant \cdots \leqslant \mu_n(x_n), \tag{52}$$

компоненты $\Upsilon(\mathbf{x}) = (\Upsilon_1(x), \ldots, \Upsilon_n(x))^{\mathrm{T}}$ *имеют вид*

$$\Upsilon_i(x) = \begin{cases} \varrho_i(x_i)\dfrac{A + \sum\limits_{s=1}^{m}\mu_s(x_s)\varrho_s(x_s)}{\sum\limits_{s=1}^{m}\varrho_s(x_s)} - \mu_i(x_i)\varrho_i(x_i) & \text{при } i \leqslant m, \\ 0 & \text{при } i > m, \end{cases} \tag{53}$$

а m определяется из условия

$$\sum_{i=1}^{m}\varrho_i(x_i)[\mu_m(x_m) - \mu_i(x_i)] \leqslant A < \sum_{i=1}^{m+1}\varrho_i(x_i)[\mu_{m+1}(x_{m+1}) - \mu_i(x_i)]. \tag{54}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Благодаря теореме 6 процесс поиска решения оптимизационной задачи (48)–(50) может быть сведён к реализации простой итерации:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \Upsilon(\mathbf{x}^k), \tag{55}$$

где $\mathbf{x}^k$ удовлетворяет условиям (52)–(54).

Теорема 7. *Существует δ-окрестность точки $\mathbf{x}^*$ такая, что при любом выборе начального приближения $\mathbf{x}^0$ из этой окрестности последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ итерационного процесса (55) не выходит из неё и имеет место сходимость этой последовательности со скоростью геометрической прогрессии к точке $\mathbf{x}^*$.*

Более того, если в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^*$ функции $z_i(\cdot) \in C^3$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяют условиям

$$|z_i''(\nu)| \geqslant \alpha_i > 0, \quad |z_i'''(\nu)| \leqslant \beta_i < \infty,$$

то существует δ-окрестность точки $\mathbf{x}^*$ такая, что при любом выборе начального приближения $\mathbf{x}^0$ из этой окрестности последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ итерационного процесса (55) *не выходит из неё и имеет место квадратичная сходимость этой последовательности к точке $\mathbf{x}^*$.*

Доказательство следует из теорем 2 и 3.

Таким образом, для решения оптимизационной задачи нелинейного программирования вида (48)–(50) можно применять итерационный процесс (55), который при достаточно естественных ограничениях обладает высокой скоростью сходимости.

4. Заключение

Основным результатом данной работы является разработка нового метода поиска конкурентного равновесия и системного оптимума в сети из параллельных каналов с одной парой исток-сток. Метод заключается в представлении соответствующих задач в виде задач поиска неподвижной точки, которые в силу своего вида позволяют запускать процедуру простой итерации. Доказано, что полученный итерационный процесс обладает высокой скоростью сходимости, а следовательно, разработанный подход является крайне работоспособным для применения его на практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вержбицкий В. М.** Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002. 840 с.
2. **Захаров В. В., Крылатов А. Ю.** Системное равновесие транспортных потоков в мегаполисе и стратегии навигаторов: теоретико-игровой подход // Мат. теория игр и её прил. 2012. Т. 4, № 4. С. 23–44.
3. **Захаров В. В., Крылатов А. Ю.** Конкурентная маршрутизация транспортных потоков поставщиками услуг навигации // Упр. большими системами. 2014. Т. 49. С. 129–147.
4. **Захаров В. В., Крылатов А. Ю.** Конкурентное равновесие Вардроп на транспортной сети из параллельных неоднородных маршрутов // Процессы упр. и устойчивость: Тр. XLV Междунар. науч. конф. аспирантов и студентов (СПб, 1–4 апреля 2014 г.). Т. 1. СПб: Изд. дом Федоровой Г. В., 2014. С. 476–481.
5. **Зоркальцев В. И., Киселёва М. А.** Равновесие Нэша в транспортной модели с квадратичными затратами // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15, № 3. С. 31–42.
6. **Крылатов А. Ю.** Оптимальные стратегии управления транспортными потоками на сети из параллельных каналов // Вестн. СПбГУ. Сер. 10. Прикл. математика. Информатика. Процессы упр. 2014. № 2. С. 121–130.

7. **Мазалов В. В.** Математическая теория игр и приложения. СПб.: Лань, 2010. 448 с.
8. **Швецов В. И.** Математическое моделирование транспортных потоков // Автомататика и телемеханика. 2003. № 11. P. 3–46.
9. **Altman E., Combes R., Altman Z., Sorin S.** Routing games in the many players regime // Proc. 5th Int. ICST Conf. Performance Evaluation Methodologies and Tools (Paris, May 16–20, 2011). Brussels: ICST, 2011. P. 525–527.
10. **Altman E., Wynter L.** Eguilibrium, games, and pricing in transportation and telecommunication networks // Netw. Spatial Econ. 2004. Vol. 4, No. 1. P. 7–21.
11. **Beckmann M. J., McGuire C. B., Winsten C. B.** Studies in the economics of transportation. New Haven, CT: Yale Univ. Press, 1956. 359 p.
12. **Chen R.-J., Meyer R. R.** Parallel optimization for traffic assignment // Math. Program. 1988. Vol. 42, No. 1–3. P. 327–345.
13. **Chiou S.-W.** Optimization of robust area traffic control with equilibrium flow under demand uncertainty // Comput. Oper. Res. 2014. Vol. 41. P. 399–411.
14. **Chiu Y.-C., Bottom J., Mahut M., Paz A., Balakrishna R., Waller T., Hicks J.** Dynamic traffic assignment // Transp. Res. Circular. Vol. E–C153. Washington, DC: Transp. Res. Board, 2011. 62 p.
15. **Farahani R. Z., Miandoabchi E., Szeto W. Y., Rashidi H.** A review of urban transportation network design problems // Eur. J. Oper. Res. 2013. Vol. 229, No. 2. P. 281–302.
16. **Fisk C.** A nonlinear equation framework for solving network equilibrium problems // Environ. Plan. Ser. A. 1984. Vol. 16, No. 1. P. 67–80.
17. **Fisk C., Nguyen S.** A unified approach for the solution of network equilibrium problems // Montreal: Univ. Montreal, 1980. (Publ. Centre Rech. Transp.; Vol. 169).
18. **Hollander Y., Prashker J. N.** The applicability of non-cooperative game theory in transport analysis // Transp. 2006. Vol. 33, No. 5. P. 481–496.
19. **Mazalov V.** Wardrop equilibrium for network with parallel channels and the BPR latency function // Int. Game Theory Rev. 2016 (to appear).
20. **Patriksson M.** Sensitivity analysis of traffic equilibria // Transp. Sci. 2004. Vol. 38, No. 3. P. 258–281.
21. **Patriksson M.** A unified description of iterative algorithms for traffic equilibria // Eur. J. Oper. Res. 1993. Vol. 71, No. 2. P. 154–176.
22. **Patriksson M.** The traffic assignment problem: models and methods. Mineola, NY: Dover Publ. Inc, 2015. 240 p.
23. **Sheffi Y.** Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985. 416 p.

24. Wardrop J. G. Some theoretical aspects of road traffic research // Proc. Inst. Civil Eng. 1952. Vol. 1, No. 3. P. 325–362.

25. Yang H., Huang H.-J. The multi-class, multi-criteria traffic network equilibrium and systems optimum problem // Transp. Res. Part B. 2004. Vol. 38, No. 1. P. 1–15.

26. Zakharov V. V., Krylatov A. Yu. Equilibrium assignments in competitive and cooperative traffic flow routing // IFIP Adv. Inf. Commun. Technol. 2014. Vol. 434. P. 641–648.

27. Zakharov V. V., Krylatov A. Yu. Transist network design for green vehicles routing // Adv. Intelligent Syst. Comput. 2015. Vol. 360. P. 449–458.

28. Zakharov V. V., Krylatov A. Yu. Competitive green-vehicle assignment on a transportation network // Game Theoretic Models Math. Ecology. New York: Nova Sci. Publ., 2015. P. 205–234.

29. Zakharov V. V., Krylatov A. Yu., Ivanov D. A. Equilibrium traffic flow assignment in case of two navigation providers // IFIP Adv. Inf. Commun. Technol. 2013. Vol. 408. P. 156–163.

30. Zheng H., Chiu Y.-C. A network flow algorithm for the cell-based single-destination system optimal dynamic traffic assignment problem // Transp. Sci. 2011. Vol. 45, No. 1. P. 121–137.

Крылатов Александр Юрьевич

Статья поступила
31 июля 2015 г.

Исправленный вариант —
24 ноября 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
April–June 2016. Volume 23, No. 2. P. 63–87

UDC 519.8 DOI: 10.17377/daio.2016.23.503

NETWORK FLOW ASSIGNMENT AS A FIXED POINT PROBLEM

A. Yu. Krylatov[1,2]
[1]Saint Petersburg State University,
7/9 Universitetskaya Nab., 199034 St. Petersburg, Russia
[2]Solomenko Institute of Transport Problems of the RAS,
13 12th Line VO, 199178 St. Petersburg, Russia
e-mail: a.krylatov@spbu.ru, aykrylatov@yandex.ru

Abstract. This paper deals with the user equilibrium problem (flow assignment with equal journey time by alternative routes) and system optimum (flow assignment with minimal average journey time) in a network consisting of parallel routes with a single origin-destination pair. The travel time is simulated by arbitrary smooth nondecreasing functions. We prove that the equilibrium and optimal assignment problems for such a network can be reduced to the fixed point problem expressed explicitly. A simple iterative method of finding equilibrium and optimal flow assignment is developed. The method is proved to converge geometrically; under some fairly natural conditions the method is proved to converge quadratically. Bibliogr. 30.

Keywords: user-equilibrium, system optimum, fixed point, network routes.

REFERENCES

1. **V. M. Verzhbitskii,** *Osnovy chislennykh metodov* (Foundations of Numerical Methods), Vysshaya shkola, Moscow, 2002.
2. **V. V. Zakharov** and **A. Yu. Krylatov,** Traffic flows' system equilibrium in megapolis and navigators' strategies: game theory approach, *Mat. Teor. Igr. Prilozh.,* **4**, No. 4, 23–44, 2012.
3. **V. V. Zakharov** and **A. Yu. Krylatov,** Competitive routing of traffic flows by navigation providers, *Upr. Bol'shimi Sist.,* No. 49, 129–147, 2014. Translated in *Autom. Remote Control,* **77**, No. 1, 179–189, 2016.
4. **V. V. Zakharov** and **A. Yu. Krylatov,** Wardrop user equilibrium on a transportation network of parallel inhomogeneous routes, in N. V. Smirnov, ed., *Protsessy upravleniya i ustoichivost': Trudy XLV Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii aspirantov i studentov* (Control Processes and Stability: Proc. XLV Int. Student and Postgraduate Scientific Conf.), *St. Peterbsburg, Russia,*

Apr. 1–4, 2014, pp. 476–481, Izd. Dom Fyodorovoi G. V., St. Peterbsburg, 2014.

5. **V. I. Zorkal'tsev** and **M. A. Kiseleva,** Nash equilibrium in a transportation model with quadratic costs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **15**, No. 3, 31–42, 2008.
6. **A. Yu. Krylatov,** Optimal strategies for traffic flow management on the transportation network of parallel links, *Vestn. St.-Peterbg. Univ., Ser. 10,* No. 2, 121–130, 2014.
7. **V. V. Mazalov,** *Matematicheskaya teoriya igr i prilozheniya* (Mathematical Game Theory and Applications), Lan', St. Petersburg, 2010.
8. **V. I. Shvetsov,** Mathematical modeling of traffic flows, *Avtom. Telemekh.,* No. 11, 3–46, 2003. Translated in *Autom. Remote Control,* **64**, No. 11, 1651–1689, 2003.
9. **E. Altman, R. Combes, Z. Altman,** and **S. Sorin,** Routing games in the many players regime, in *Proc. 5th Int. ICST Conf. Perform. Eval. Methodol. Tools, Paris, France, May 16–20, 2011,* pp. 525–527, ICST, Brussels, 2011.
10. **E. Altman** and **L. Wynter,** Eguilibrium, games, and pricing in transportation and telecommunication networks, *Netw. Spat. Econ.,* **4**, No. 1, 7–21, 2004.
11. **M. J. Beckmann, C. B. McGuire,** and **C. B. Winsten,** *Studies in the Economics of Transportation,* Yale Univ. Press, New Haven, CT, USA, 1956.
12. **R.-J. Chen** and **R. R. Meyer,** Parallel optimization for traffic assignment, *Math. Program.,* **42**, No. 1–3, 327–345, 1988.
13. **S.-W. Chiou,** Optimization of robust area traffic control with equilibrium flow under demand uncertainty, *Comput. Oper. Res.,* **41**, 399–411, 2014.
14. **Y.-C. Chiu, J. Bottom, M. Mahut, A. Paz, R. Balakrishna, T. Waller,** and **J. Hicks,** *Dynamic Ttraffic Assignment: A Primer,* Transp. Res. Board, Washington, 2011 (Transp. Res. Circular, Vol. E-C153).
15. **R. Z. Farahani, E. Miandoabchi, W. Y. Szeto,** and **H. Rashidi,** A review of urban transportation network design problems, *Eur. J. Oper. Res.,* **229**, No. 2, 281–302, 2013.
16. **C. Fisk,** A nonlinear equation framework for solving network equilibrium problems, *Environ. Plan., Ser. A,* **16**, No. 1, 67–80, 1984.
17. **C. Fisk** and **S. Nguyen,** *A unified approach for the solution of network equilibrium problems,* Univ. Montreal, Montreal, 1980 (Publ. Centre Res. Transp., Vol. 169).
18. **Y. Hollander** and **J. N. Prashker,** The applicability of non-cooperative game theory in transport analysis, *Transp.,* **33**, No. 5, 481–496, 2006.
19. **V. V. Mazalov,** Wardrop equilibrium for network with parallel channels and the BPR latency function, *Int. Game Theory Rev.* (to be accepted).
20. **M. Patriksson,** Sensitivity analysis of traffic equilibria, *Transp. Sci.,* **38**, No. 3, 258–281, 2004.

21. **M. Patriksson,** A unified description of iterative algorithms for traffic equilibria, *Eur. J. Oper. Res.,* **71**, No. 2, 154–176, 1993.
22. **M. Patriksson,** *The Traffic Assignment Problem: Models and Methods*, Dover Publ., Mineola, USA, 2015.
23. **Y. Sheffi,** *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, USA, 1985.
24. **J. G. Wardrop,** Some theoretical aspects of road traffic research, *Proc. Inst. Civil Eng.,* **1**, No. 3, 325–362, 1952.
25. **H. Yang** and **H.-J. Huang,** The multi-class, multi-criteria traffic network equilibrium and systems optimum problem, *Transp. Res. Part B,* **38**, No. 1, 1–15, 2004.
26. **V. V. Zakharov** and **A. Yu. Krylatov,** Equilibrium assignments in competitive and cooperative traffic flow routing, in *Collaborative Systems for Smart Networked Environments* (Proc. 15th IFIP WG 5.5 Work. Conf. Virtual Enterp., Amsterdam, The Netherlands, Oct. 6–8, 2014), pp. 641–648, Springer, Heidelberg, 2014 (IFIP Adv. Inf. Commun. Technol., Vol. 434).
27. **V. V. Zakharov** and **A. Y. Krylatov,** Transit network design for green vehicles routing, in *Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences* (Proc. 3rd Int. Conf. MCOISMS, Nancy, France, May 11–13, 2015), Pt. II, pp. 449–458, Springer, Cham, Switzerland, 2015 (Adv. Intell. Syst. Comput., Vol. 360).
28. **V. V. Zakharov** and **A. Yu. Krylatov,** Competitive green-vehicle assignment on a transportation network, in *Game Theory and Applications,* Vol. 17, pp. 205–234, Nova Sci. Publ., Hauppauge, USA, 2015.
29. **V. V. Zakharov, A. Yu. Krylatov,** and **D. A. Ivanov** Equilibrium traffic flow assignment in case of two navigation providers, in *Collaborative Systems for Reindustrialization* (Proc. 14th IFIP WG 5.5 Work. Conf. Virtual Enterp., Dresden, Germany, Sept. 30 – Oct. 2, 2013), pp. 156–163, Springer, Heidelberg, 2013 (IFIP Adv. Inf. Commun. Technol., Vol. 408).
30. **H. Zheng** and **Y.-C. Chiu,** A network flow algorithm for the cell-based single-destination system optimal dynamic traffic assignment problem, *Transp. Sci.,* **45**, No. 1, 121–137, 2011.

Alexander Yu. Krylatov

Received
31 July 2015

Revised
24 November 2015