ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2016. Том 23, № 3. С. 61–80

УДК 519.854 DOI: 10.17377/daio.2016.23.515

СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ТЕРМИНАХ РЕШЁТОК ГРАНЕЙ АССОЦИИРОВАННЫХ МНОГОГРАННИКОВ *)

А. Н. Максименко[1]
[1]Ярославский гос. университет им. П. Г. Демидова,
ул. Советская, 14, 150000 Ярославль, Россия
e-mail: maximenko.a.n@gmail.com

Аннотация. Основной мотивацией работы является следующий вопрос, связанный со свойствами многогранников, ассоциированных с задачами комбинаторной оптимизации. Можно ли, зная комбинаторные свойства многогранника, оценить сложность соответствующей оптимизационной задачи? В разное время в качестве таких ключевых характеристик сложности рассматривались число гиперграней многогранника, диаметр и кликовое число его графа, число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней и некоторые другие. В настоящей работе приводится несколько примеров семейств многогранников, для которых значения упомянутых выше характеристик существенно отличаются от реальной вычислительной сложности соответствующих оптимизационных задач. В частности, приводятся примеры двух задач дискретной оптимизации, многогранники которых комбинаторно эквивалентны и длины двоичной записи координат вершин этих многогранников одинаковы. При этом первая задача разрешима за полиномиальное время, а вторая задача имеет экспоненциальную сложность. Ил. 1, библиогр. 22.

Ключевые слова: NP-трудная задача, матрица инциденций вершин-гиперграней, комбинаторная эквивалентность, граф многогранника, кликовое число графа, расширенная формулировка, циклический многогранник.

Введение

Многие известные задачи комбинаторной оптимизации могут быть сформулированы в следующем виде. Имеется некоторая последователь-

*)Исследование выполнено при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части гос. задания № 2014/258 на НИР ЯрГУ.

ность конечных множеств целочисленных векторов $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, где $X_n \subset \mathbb{Z}^d$, $d = d(n)$. Требуется по заданным номеру n и целевому вектору $c \in \mathbb{Z}^d$ найти максимум (минимум) скалярного произведения $c^T x$ при ограничении $x \in X_n$. Предполагая произвольность выбора входных данных n и c, для соответствующей массовой задачи будем использовать обозначение $\{X_n\}$. Для частной задачи, возникающей при фиксированном n и произвольном c, будем использовать обозначение X_n.

Например, для задачи коммивояжёра [8] в графе $G(V, E)$ множество $X_n \subset \{0,1\}^d$, где $n = |V|$ и $d = |E|$, представляет собой множество характеристических векторов всех гамильтоновых циклов в этом графе, а целевой вектор c является набором длин рёбер.

Нетрудно заметить, что оптимизация линейной функции $c^T x$ при условии $x \in X_n$ эквивалентна оптимизации той же функции при более слабом ограничении $x \in \mathrm{conv}(X_n)$, где $\mathrm{conv}(X_n)$ — выпуклая оболочка множества X_n, т. е. некоторый многогранник. Таким образом, вместо задачи $\{X_n\}$ можно перейти к рассмотрению семейства многогранников $\{\mathrm{conv}(X_n)\}$, часто называемых *ассоциированными с задачей*, или просто *ассоциированными*. В частности, именно таким образом описывается ставшее уже классическим примером семейство многогранников задачи коммивояжёра [8, 11].

Как правило, множество вершин многогранника $\mathrm{conv}(X_n)$ совпадает с множеством X_n, а задача распознавания вершины многогранника, т. е. проверка условия $x \in X_n$ для произвольного вектора $x \in \mathbb{Z}^d$, полиномиально разрешима относительно длины двоичной записи вектора x. Например, для многогранника задачи коммивояжёра это проверка условия «данный вектор является характеристическим вектором гамильтонова цикла».

Ещё в 1954 г. Данциг, Фалкерсон и Джонсон [11] показали, что такая геометрическая интерпретация значительно ускоряет процесс поиска решения соответствующих комбинаторных задач. Эта идея оказалась настолько плодотворной, что в настоящее время её явно или неявно используют при решении многих известных задач дискретной оптимизации.

Далее будем пользоваться следующими общепринятыми понятиями комбинаторной теории выпуклых многогранников [7,15]. Выпуклый многогранник с собственной размерностью d будем называть *d-многогранником*. Простейшим примером d-многогранника является *d-симплекс* Δ_d, имеющий $d+1$ вершин. *Рёбрами* многогранника называются его 1-грани, *гипергранями* — собственные грани максимальной размерности, *графом* многогранника называется множество его вершин и рёбер. Многогран-

ник называется *m-смежностным*, если любые m его вершин образуют $(m-1)$-грань многогранника. *Кликовым числом* $\omega(P)$ графа многогранника P называется максимальное число его вершин таких, что каждые две из них соединены ребром многогранника. Соответственно кликовое число 2-смежностного многогранника совпадает с числом всех его вершин. *Решёткой граней* многогранника называется множество всех его граней, упорядоченных по включению. Два многогранника *комбинаторно эквивалентны*, если решётки их граней изоморфны. Соответственно *комбинаторной характеристикой* многогранника будем называть число, значение которого зависит исключительно от свойств решётки граней. Иными словами, такая характеристика однозначно определяется по матрице инциденций вершин-гиперграней многогранника. (Наиболее эффективный из известных автору алгоритмов преобразования матрицы инциденций в решётку граней описан в [17].) В частности, размерность многогранника, числа его вершин и гиперграней, а также всевозможные характеристики графа многогранника являются комбинаторными характеристиками.

Кроме того, нам понадобятся понятия расширенной формулировки многогранника и её сложности. Краткое и вместе с тем содержательное введение в эту тему имеется в [16]. Многогранник Q называется *расширенной формулировкой* (extended formulation), или *расширением* (extension) многогранника P, если существует линейная проекция π такая, что $\pi(Q) = P$. Так, например, пирамида является расширением своего основания. Известно, что число гиперграней расширения Q может быть существенно меньше, чем у его проекции P. Например, расширением ортаэдра (многогранника, двойственного к d-кубу), имеющего $2d$ вершин и 2^d гиперграней, может служить $(2d-1)$-симплекс, имеющий всего $2d$ гиперграней. Более содержательные примеры имеются в [10,16]. Важным здесь является то, что задача линейной оптимизации на многограннике легко сводится к оптимизации на его расширении. Таким образом, в некоторых случаях оказывается выгоднее заменять многогранник его расширением. В этом контексте число гиперграней многогранника P часто называется его *размером,* а минимальный размер расширения многогранника P называется *сложностью расширения* (*расширенной формулировки*) P:

$$\mathrm{xc}(P) = \min\{\text{размер}(Q) \mid Q - \text{расширение } P\}.$$

Заметим, что эта характеристика многогранника не является комбинаторной, так как существенно зависит от его геометрических свойств. В частности, для многоугольников на плоскости, имеющих одно и то же

число вершин n (и соответственно один и тот же комбинаторный тип), сложность расширенной формулировки может принимать существенно разные значения от $\mathcal{O}(\log n)$ до $\Omega(\sqrt{n}/\sqrt{\log n})$ [14].

Вполне естественным при описанном выше геометрическом подходе к решению задач комбинаторной оптимизации является следующий вопрос. Можно ли некоторые комбинаторные характеристики многогранников задачи использовать в качестве оценок её вычислительной сложности?

С момента первого успешного применения симплекс-метода этот вопрос в частных формулировках встречается в работах разных авторов. Например, размерность многогранника, очевидно, является нижней оценкой сложности соответствующей оптимизационной задачи, а число его вершин — верхней оценкой. Однако эти оценки для реальных задач обычно весьма далеки от их «настоящей» вычислительной сложности. В частности, для задачи коммивояжёра размерность многогранника равна $n(n-3)/2$, число вершин равно $(n-1)!/2$, а наилучший известный в настоящее время точный алгоритм решения этой задачи имеет трудоёмкость порядка $\mathcal{O}(n^2 2^n)$ [8]. Менее тривиальными в этом контексте характеристиками являются число гиперграней и диаметр графа многогранника. Тем не менее хорошо известны примеры многогранников, для которых эти характеристики не могут служить даже приближёнными оценками сложности, например, ортаэдр, имеющий $2d$ вершин и 2^d гиперграней, и обычная пирамида со сколь угодно сложным основанием, диаметр графа которой в любом случае не превышает двух[1)]. Кроме того, число гиперграней многогранника коммивояжёра существенно больше числа его вершин, а диаметр графа этого многогранника не превышает двух [19], т. е. для многогранника коммивояжёра эти две характеристики оказываются более грубыми оценками трудоёмкости, чем тривиальные размерность и число вершин.

Гораздо более интересными примерами комбинаторных характеристик являются кликовое число графа многогранника [1] и число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней многогранника [12], которые требуют более детального обсуждения.

Интерес к кликовому числу графа многогранника обусловлен тем, что оно служит нижней оценкой сложности в некотором классе алгоритмов [1]. В частности, известно, что для многих полиномиально разрешимых задач комбинаторной оптимизации эта характеристика полиноми-

---

[1)] Так как вершина (апекс) пирамиды непосредственно соединена рёбрами с каждой вершиной основания.

альна относительно размерности многогранника [1, 2], а для NP-трудных задач — сверхполиномиальна [1,4,6]. Известен также ряд контрпримеров. В [1] приводятся два примера полиномиально разрешимых задач с экспоненциальным кликовым числом графа многогранника, а в [9] показано, что циклические многогранники специального вида имеют расширенную формулировку размера $\mathcal{O}\left((\log K)^m\right)$, где K — число вершин многогранника, а m — степень его смежности. (В частности, при $m = 2$ граф многогранника оказывается полным.) Ниже в разд. 1 описан алгоритм решения задачи оптимизации на вершинах циклического многогранника, имеющий трудоёмкость порядка $\mathcal{O}(m^3 \log K)$. В том же разделе для d-мерного симплекса (кликовое число которого равно $d+1$) будет описана расширенная формулировка с кликовым числом, равным двум.

В конце 1980-х гг. Яннакакис в [22] показал, что сложность расширенной формулировки оценивается снизу числом прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней многогранника. (Точное определение этой характеристики дано ниже в разд. 2.) За последние три года в этом направлении получено несколько важных результатов [13, 14, 18, 20]. С одной стороны, оказалось, что число прямоугольного покрытия для многогранника разрезов в графе на n вершинах экспоненциально [13, 18]. Кроме того, как известно [4, 6], многогранники разрезов аффинно сводятся к многогранникам многих других NP-трудных задач, в числе которых задача коммивояжёра, задача о рюкзаке, задача о 3-выполнимости, задача о 3-сочетании, задачи о покрытии и упаковке множества и многие другие. Непосредственно из этих фактов следует, что число прямоугольного покрытия для многогранников этих задач оказывается сверхполиномиальным по размерности, т. е. соответствует современным представлениям о сложности таких задач. С другой стороны, сложность расширенной формулировки, а тем самым и число прямоугольного покрытия полиномиальны для многих полиномиально разрешимых задач, среди которых сортировка массива, задача о минимальном остовном дереве, задача о назначениях, задачи о разрезе в графе с дополнительными ограничениями, аппроксимационная задача о рюкзаке и многие другие [10, 16]. Особого упоминания здесь заслуживает многогранник паросочетаний $P_{\mathrm{M}}(n)$ в полном графе на n вершинах. Он обладает полиномиальным числом прямоугольного покрытия $\mathrm{rc}(P_{\mathrm{M}}(n)) = \mathcal{O}(n^4)$ [12], но экспоненциальной сложностью расширенной формулировки $\mathrm{xc}(P_{\mathrm{M}}(n)) = 2^{\Omega(n)}$ [20], т. е. и в этом случае число прямоугольного покрытия даёт верную оценку сложности, несмотря на то, что «геометрический аналог» — сложность расширенной формулиров-

ки — экспоненциален.

С точки зрения настоящей работы важно то, что все известные оценки чисел прямоугольного покрытия для различных семейств комбинаторных многогранников совпадают с современными оценками трудоёмкости соответствующих задач дискретной оптимизации. Только недавно [5] автору настоящей работы удалось найти первый пример семейства многогранников, обладающих полиномиальным числом прямоугольного покрытия, в то время как задача оптимизации на них труднорешаема. Недостаток этого примера состоит в том, что вершины многогранника не имеют точного описания, а значит, и сложность задачи распознавания вершины не определена. В разд. 2 настоящей работы приведён аналогичный пример, для которого сложность задачи распознавания вершины полиномиальна.

Разумеется, этот список комбинаторных характеристик может быть продолжен. В частности, можно рассматривать различные комбинации указанных характеристик, «взяв лучшее» из каждой. Принципиальным здесь является следующий вопрос. Можно ли надеяться на существование такой универсальной комбинаторной характеристики многогранника, которая бы адекватно отражала вычислительную сложность соответствующей задачи?

В разд. 3 построен пример двух массовых задач $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ таких, что многогранники $\operatorname{conv}(X_n)$ и $\operatorname{conv}(Y_n)$ комбинаторно эквивалентны и размеры двоичной записи координат вершин этих многогранников одинаковы. При этом первая задача разрешима полиномиально относительно $\dim(X_n)$, $\log|X_n|$ и $\log\|c\|_\infty$, а вторая задача имеет экспоненциальную сложность. Такого эффекта удаётся достичь за счёт того, что сложность задачи Y_n кодируется в двоичной записи координат векторов множества Y_n. А именно, задача распознавания вершины многогранника $\operatorname{conv}(Y_n)$ сама по себе экспоненциально сложная. Поэтому открытым остаётся вопрос о существовании пары комбинаторно эквивалентных семейств многогранников таких, что задачи распознавания их вершин имеют полиномиальную сложность, но при этом задача оптимизации на одном из семейств полиномиальна, а на другом NP-трудна.

1. Кликовое число графа многогранника. Алгоритмы прямого типа

В 1980-х гг. В. А. Бондаренко разработал теорию так называемых алгоритмов прямого типа [1]. Ключевой особенностью алгоритмов этого класса является то, что их трудоёмкость оценивается снизу кликовым числом $\omega(P)$ графа многогранника P соответствующей задачи. Из-

вестно [1], что алгоритмы сортировки, жадный алгоритм для остовного дерева, алгоритм Дейкстры для кратчайшего пути в графе, алгоритм Хелда — Карпа, алгоритм ветвей и границ для задачи коммивояжёра, а также некоторые другие комбинаторные алгоритмы являются алгоритмами прямого типа. Кроме того, установлена сверхполиномиальность кликовых чисел графов многогранников, ассоциированных с такими NP-трудными задачами, как задача коммивояжёра, задача о рюкзаке, задача 3-выполнимости, задача о 3-назначениях, задача о максимальном разрезе, задачи о покрытии и упаковке множества и многие другие [1,4,6]. В то же время, кликовое число полиномиально для многогранников следующих полиномиально разрешимых задач: сортировка массива, минимальное остовное дерево, кратчайший путь в графе, минимальный разрез [1, 2]. Вместе с тем известны примеры полиномиально разрешимых задач с экспоненциальным $\omega(P)$ [1]. В этом разделе опишем обобщение одного из таких примеров (теорема 1 ниже), которое будет использоваться далее в разд. 3, а также попробуем ответить на

Вопрос 1 (Ф. Кайбель). *Существуют ли трудные* (NP-*трудные*) *задачи с небольшим* $\omega(X)$?

Далее будем пользоваться обозначением $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим строго монотонную функцию

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad g(i) < g(i+1) \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

и множество

$$C(d, K, g) = \bigl\{ \bigl(t_i, t_i^2, \dots, t_i^d\bigr) \in \mathbb{N}^d \mid t_i = g(i),\ i \in [K] \bigr\},$$

где $d, K \in \mathbb{N}$, $d < K$. Выпуклая оболочка множества $C(d, K, g)$, как известно [15], является d-мерным циклическим многогранником, и множество $C(d, K, g)$ есть множество его вершин. Известно также, что d-мерный циклический многогранник симплициален и $\lfloor d/2 \rfloor$-смежностен. Кроме того, он имеет максимальное число граней (любой размерности) среди всех d-мерных выпуклых многогранников с тем же числом вершин [15], т. е. в определённом смысле он является самым сложным многогранником. В частности, кликовое число $\omega(C(d, K, g))$ равно K при $d \geqslant 4$.

Формулируемое ниже утверждение является обобщением примера, предложенного С. П. Тарасовым [1, с. 158].

Теорема 1. *Задача* $C(d, K, g)$ *полиномиально разрешима по* d *и* $\log K$, *если монотонная функция* g *полиномиально вычислима и длина двоичной записи вектора* c *полиномиальна по* d *и* $\log K$. *В частности, если*

$g(i) = i$, $i \in \mathbb{N}$, то для решения задачи $C(d, K, g)$ достаточно выполнения $\mathcal{O}(d^3 \log K)$ арифметических операций.

Доказательство. По условию требуется максимизировать функцию $c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_d x_d$ при $x \in C(d, K, g)$. Иными словами, нужно найти максимум для полинома

$$f(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_d t^d, \quad \text{где } t = g(i),\ i \in [K].$$

Алгоритм состоит из $d - 1$ шагов.

На первом шаге найдём корень $t_1 = c_{d-1}/(c_d d)$ производной

$$f^{(d-1)}(t) = (d-1)!\, c_{d-1} + d!\, c_d t.$$

Если $c_d \neq 0$ и t_1 принадлежит интервалу $(1, K)$, то разобъём отрезок $[1, K]$ на два отрезка знакопостоянства производной $f^{(d-1)}(t)$: $[1, \lfloor t_1 \rfloor]$ и $[\lceil t_1 \rceil, K]$ (по условию нас интересуют только целые точки).

На втором шаге рассмотрим производную

$$f^{(d-2)}(t) = (d-2)!\, c_{d-2} + \frac{(d-1)!}{1!} c_{d-1} t + \frac{d!}{2!} c_d t^2.$$

Она монотонна на каждом из отрезков (их не более двух), найденных на предыдущем шаге. Следовательно, с помощью дихотомической процедуры, требующей не более $2 \log_2 K$ вычислений значений $f^{(d-2)}(t)$, можно найти корни этой производной с точностью до ближайших целых внутри отрезка $[1, K]$. Этого достаточно, чтобы разбить отрезок на промежутки знакопостоянства функции $f^{(d-2)}(t)$. Таких промежутков окажется не более трёх.

Действуя далее таким же образом, постепенно разобъём отрезок $[1, K]$ на не более чем d отрезков знакопостоянства производной $f'(t)$. Таким образом, нам останется выбрать максимум среди значений $f(t)$ на концах этих отрезков.

Завершая доказательство, заметим, что вычисление значения $f^{(n)}(t)$, $n \in [d-1]$, требует $\mathcal{O}(d)$ арифметических операций, а на каждом шаге алгоритма выполняется порядка $\mathcal{O}(d \log K)$ таких вычислений. Теорема 1 доказана.

Как следствие, для каждого $n \in \mathbb{N}$ задача $C(2n, 2^n, g)$ при $g(i) = i$ разрешима полиномиально по n и кликовое число $\omega\big(C(2n, 2^n, g)\big) = 2^n$ экспоненциально. Более того, многогранник $\operatorname{conv} C(2n, 2^n, g)$, как было сказано выше, n-смежностен.

Вернёмся к сформулированному выше вопросу 1. Оказывается, что для любого выпуклого многогранника P можно подобрать многогранник Q так, что P является проекцией Q и $\omega(Q) = 2$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что всякий многогранник на $d+1$ вершинах является проекцией d-симплекса Δ_d. Остаётся показать, что Δ_d является проекцией некоторого многогранника Q_{d+1} такого, что $\omega(Q_{d+1}) = 2$.

Теорема 2. *Для любого симплекса $\Delta_d \subset \mathbb{R}^d$ существует его расширенная формулировка $Q_{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$, для которой $\omega(Q_{d+1}) = 2$.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что любые два d-мерных симплекса аффинно эквивалентны друг другу. Поэтому далее рассматриваем только наиболее удобный симплекс

$$\Delta_{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d_+ \mid x \in H\},$$

являющийся пересечением неотрицательного ортанта $\mathbb{R}^d_+$ и гиперплоскости

$$H = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{1}^T x = 1\}, \quad \text{где } \mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d.$$

Построим расширенную формулировку $Q_d \subset \mathbb{R}^d$ так, что её ортогональная проекция на H совпадает с Δ_{d-1}. Для случая $d = 3$ этапы построения изображены на рис. 1.

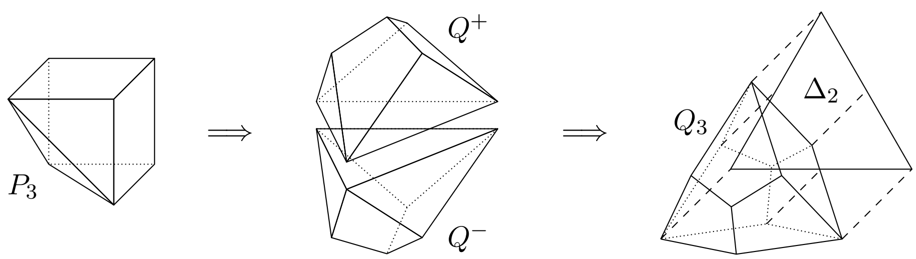

Рис. 1. Этапы построения расширения Q_3 для симплекса Δ_2

Многогранник Q_d будет симметричным относительно H. Поэтому далее будет описана лишь одна его половина, расположенная в $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{1}^T x \geqslant 1\}$. Обозначим эту половину через Q^+.

Обозначим через P_d пересечение единичного куба $C_d = \{x \in \mathbb{R}^d_+ \mid x_i \leqslant 1,\ i \in [d]\}$ и полупространства H^+. По построению P_d — «куб без одной вершины». Теперь определим Q^+ как результат проективного преобразования (не меняющего комбинаторный тип) многогранника P_d:

$$Q^+ = \left\{ \frac{x + \mathbf{1}\left(\mathbf{1}^T x - 1\right)}{\mathbf{1}^T x} \mid x \in P_d \right\}.$$

Заметим, что гиперплоскость H инвариантна относительно этого преобразования. Гиперплоскости вида $S_i = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i = 0\}$ (и вместе с ними соответствующие гиперграни многогранника P_d) данное преобразование переводит в гиперплоскости

$$S'_i = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{1}^T x - dx_i = 1\}, \quad i \in [d].$$

Заметим также, что вектор нормали гиперплоскости S'_i ортогонален вектору нормали гиперплоскости H. Следовательно, ортогональная проекция Q^+ на плоскость H совпадает с Δ_{d-1}. С другой стороны, Q^+ комбинаторно эквивалентен «кубу без одной вершины», т. е. у каждого треугольника в графе многогранника Q^+ как минимум одно ребро лежит в H, точнее, в пересечении H и одной из гиперплоскостей S'_i.

В точности те же замечания справедливы и в отношении многогранника Q^-, являющегося зеркальной копией Q^+ относительно гиперплоскости H. Таким образом, при склейке Q^+ и Q^- все рёбра, лежащие в H, оказываются внутри гиперграней многогранника $Q_d = Q^+ \cup Q^-$, образованных гиперплоскостями S'_i, а значит, граф многогранника Q_d не содержит треугольников. Теорема 2 доказана.

Таким образом, кликовое число графа многогранника можно радикально уменьшать за счёт перехода к расширению многогранника (т. е. по сути к более сложной задаче).

2. Число прямоугольного покрытия

Пусть $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ — множество вершин многогранника P, а $F = \{F_1, \dots, F_k\}$ — множество его гиперграней. *Матрица инциденций вершин-гиперграней* $A = (a_{ij}) \in \{0,1\}^{n \times k}$ многогранника P определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \in F_j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $I \subseteq [n]$, $J \subseteq [k]$. Множество $I \times J$ называется 0-*прямоугольником* в A, если $a_{ij} = 0$ для всех $i \in I$ и $j \in J$. *Прямоугольным покрытием* матрицы A называется множество 0-прямоугольников, объединение которых совпадает с множеством нулевых ячеек в A. *Числом прямоугольного покрытия* матрицы A называется наименьшая мощность прямоугольного покрытия матрицы A. Следуя [12], число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней многогранника P обозначим через $\mathrm{rc}(P)$.

Цель этого раздела — привести пример NP-трудной задачи такой, что число прямоугольного покрытия матрицы инциденций для её многогранника и сложность задачи распознавания вершины полиномиальны. Как и в [5], будем использовать тот факт [12], что для симплициального многогранника P

$$\mathrm{rc}(P) = \mathcal{O}(d^2 \log n), \tag{1}$$

где d — размерность, а n — число вершин многогранника P. Основная идея заключается в небольших смещениях вершин 0/1-многогранника, ассоциированного с NP-трудной задачей.

Для каждого $x \in \{0,1\}^d$ определим его номер $n(x)$, $0 \leqslant n(x) \leqslant 2^d - 1$:

$$n(x) = \sum_{i=1}^{d} 2^{i-1} x_i.$$

Рассмотрим отображение $\varepsilon : \{0,1\}^d \to \mathbb{N}^d$, преобразующее $x \in \{0,1\}^d$ в $\varepsilon \in \mathbb{N}^d$:

$$\varepsilon_i = (n(x))^i, \quad i \in [d],$$

и некоторую «достаточно большую» константу $K = 2^{d^3}$. Заметим, что для любого $x \in \{0,1\}^d$ величина $\|\varepsilon(x)\|$ «очень мала» по сравнению с K:

$$\frac{\|\varepsilon(x)\|}{K} \leqslant \frac{\|\varepsilon(x)\|_1}{K} \leqslant \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{d} (2^d - 1)^i \leqslant \frac{2^{d^2}}{2^{d^3}} = 2^{-d^2(d-1)}. \tag{2}$$

Пусть $X \subseteq \{0,1\}^d$. Множество

$$Y = \mathrm{CP}(X) = \left\{ y \in \mathbb{Z}^d \mid y = Kx + \varepsilon(x),\ x \in X \right\}$$

назовём *циклической пертурбацией* X. Ясно, что после такой пертурбации размер чисел в описании X увеличивается в $\log_2 K = d^3$ раз. Кроме того, $Y = \operatorname{ext} \operatorname{conv} Y$, так как значение $\|\varepsilon(x)\|$ «очень мало». Ещё одно важное свойство циклической пертурбации состоит в том, что если задача распознавания вершины для X полиномиальна, то и для $\mathrm{CP}(X)$ она будет полиномиальной.

Лемма 1. *Выпуклая оболочка циклической пертурбации $X \subseteq \{0,1\}^d$ является симплициальным многогранником.*

Доказательство. Достаточно показать, что любые $d+1$ точек[2)] в циклической пертурбации $Y = \mathrm{CP}(X)$ аффинно независимы.

[2)] Мы рассматриваем только «интересные» случаи: $|X| \geqslant d+1$.

Итак, для каждого подмножества $\{y^1, y^2, \ldots, y^{d+1}\} \subseteq Y$ нужно убедиться в справедливости неравенства

$$\det \begin{vmatrix} 1 & y_1^1 & y_2^1 & \ldots & y_d^1 \\ 1 & y_1^2 & y_2^2 & \ldots & y_d^2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & y_1^{d+1} & y_2^{d+1} & \ldots & y_d^{d+1} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Поскольку $y^i = Kx^i + \varepsilon(x^i)$ для некоторого $x^i \in X$, $i \in [d+1]$, можем разбить матрицу (3) на сумму двух матриц $A, B \in \{0, K\}^{(d+1)\times(d+1)}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & Kx_1^1 & Kx_2^1 & \ldots & Kx_d^1 \\ 0 & Kx_1^2 & Kx_2^2 & \ldots & Kx_d^2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & Kx_1^{d+1} & Kx_2^{d+1} & \ldots & Kx_d^{d+1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & n(x^1) & (n(x^1))^2 & \ldots & (n(x^1))^d \\ 1 & n(x^2) & (n(x^2))^2 & \ldots & (n(x^2))^d \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & n(x^{d+1}) & (n(x^{d+1}))^2 & \ldots & (n(x^{d+1}))^d \end{pmatrix}.$$

Для каждого подмножества $S \subseteq [d+1]$ определим $((d+1)\times(d+1))$-матрицу D^S:

$$D_{ij}^S = \begin{cases} A_{ij}, & \text{если } i \in S, \\ B_{ij}, & \text{если } i \notin S. \end{cases}$$

В частности, $D^{[d+1]} = A$, $D^{\varnothing} = B$. Как известно, определитель суммы двух $(n\times n)$-матриц может быть записан в виде суммы определителей 2^n матриц:

$$\det(A+B) = \sum_{S\subseteq[d+1]} \det D^S. \tag{4}$$

Для каждого непустого $S \subseteq [d+1]$ матрица D^S имеет как минимум одну строку из A, значит, $\det D^S$ делится на K. С другой стороны, $\det D^{\varnothing} = \det B$ есть определитель Вандермонда:

$$\det B = \prod_{1\leqslant j<k\leqslant d+1} (n(x^k) - n(x^j)) > 0.$$

Заметим, что

$$\det B = \prod_{1\leqslant j<k\leqslant d+1} (n(x^k) - n(x^j)) \leqslant (2^d - 1)^{d(d+1)/2} < K.$$

Следовательно, сумма (4) не может быть равна 0. Лемма 1 доказана.

Опираясь на формулу (1), получаем

Следствие 1. *Для любого* $X \subseteq \{0,1\}^d$ *имеет место соотношение*

$$\operatorname{rc}(\operatorname{conv}\mathrm{CP}(X)) = \mathcal{O}(d^2 \log |X|) = \mathcal{O}(d^3).$$

Теперь мы готовы к построению анонсированного примера NP-трудной задачи, число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней многогранника которой полиномиально.

Рассмотрим циклическую пертурбацию вершин булева квадратичного многогранника[3)]:

$$\mathrm{BQP}_n = \{x = (x_{ij}) \in \{0,1\}^{n(n+1)/2} \mid x_{ij} = x_{ii}x_{jj},\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}.$$

Согласно следствию 1 $\operatorname{rc}(\operatorname{conv}\mathrm{CBQP}_n) = \mathcal{O}(n^5)$, т. е. полиномиально. С другой стороны, справедливо

Утверждение 1. *Задача оптимизации на* CBQP_n *с целевым вектором* $c \in \{-1,0,1\}^{n(n+1)/2}$ NP-*трудна.*

Доказательство. Рассмотрим NP-трудную задачу нахождения кликового числа графа $G = (V,E)$, где $V = [n]$ — множество вершин. Входной вектор $c = c(G) \in \mathbb{Z}^{n(n+1)/2}$ определим следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } \{i,j\} \in E, \\ -1, & \text{если } \{i,j\} \notin E. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\max\limits_{x \in \mathrm{BQP}_n} c^T x$ равен кликовому числу графа G. Но для любого $x \in \mathrm{BQP}_n$ и $y = \mathrm{CP}(x)$ согласно неравенству (2) имеем

$$|c^T x - c^T y/K| = |c^T \varepsilon(x)/K| \leqslant \frac{1}{2^{d^2(d-1)}} \leqslant \frac{1}{2^{18}},$$

где $d = n(n+1)/2$, $n \geqslant 2$, т. е. решение задачи CBQP_n для указанного входного вектора c равно кликовому числу графа G с точностью до 2^{-18}. Следовательно, задача CBQP_n не проще задачи нахождения кликового числа графа. Утверждение 1 доказано.

[3)] Здесь и далее используем одно и то же обозначение для многогранника и множества его вершин.

3. Другие комбинаторные характеристики

Выше показано, что кликовое число графа многогранника и число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней, вообще говоря, не всегда отражают реальную вычислительную сложность соответствующей оптимизационной задачи. Тем не менее вопрос о существовании «адекватной» комбинаторной характеристики остаётся открытым. Чтобы попытаться ответить на него, сделаем ряд уточнений. Прежде всего, под адекватной характеристикой будем понимать ту, которая отделяет полиномиально разрешимые задачи от задач со сверхполиномиальной сложностью. Сложность задачи $X_n \subset \mathbb{Z}^{d(n)}$ будем оценивать относительно собственной размерности соответствующего многогранника $\operatorname{conv}(X_n)$ (так как это тривиальная нижняя оценка сложности) и относительно логарифма числа его вершин $|X_n|$ (так как это тривиальная верхняя оценка). Добавим к этим двум параметрам верхнюю оценку $\log \max\limits_{x \in X_n \cup \{c\}} \|x\|_\infty$ длины двоичной записи для координат векторов, фигурирующих в условии задачи (т. е. для координат вершин многогранника и вектора входных данных c).

Далее ограничимся рассмотрением задач, для которых выполняются следующие условия.

1. Собственная размерность многогранника асимптотически совпадает с размерностью пространства $d = d(n)$. (Данное ограничение не является принципиальным и взято исключительно из соображений удобства.)

2. Число вершин многогранника $\operatorname{conv}(X_n)$ есть $2^{\mathcal{O}(d)}$. (Это условие автоматически выполняется в случае $X_n \subseteq \{0,1\}^d$.)

3. Максимум абсолютных величин координат векторов, фигурирующих в условии задачи, оценивается сверху величиной $2^{p(d)}$, где $p(d)$ — некоторый полином, степень и коэффициенты которого не зависят от d. Иными словами, размер двоичной записи координат векторов ограничен сверху полиномом от d.

Заметим, что, с одной стороны, практически все известные задачи комбинаторной оптимизации удовлетворяют этим условиям. С другой стороны, эти условия позволяют «заменить» три ключевых параметра одним — размерностью d многогранника.

Итак, основная цель данного раздела — привести примеры двух задач, удовлетворяющих заявленным выше условиям и таких, что их семейства многогранников комбинаторно эквивалентны, но одна из этих задач полиномиально разрешима, а другая экспоненциально сложна.

Обе задачи будут иметь вид $\{C(n, 2^n, g)\}$, но отличаться описанием функции g. Тем самым условие комбинаторной эквивалентности выпол-

няется автоматически.

В описании полиномиально разрешимой задачи положим $g(i) = 2i$. Тогда согласно теореме 1 задача $\{X_n\}$, где $X_n = C(n, 2^n, g)$, полиномиально разрешима относительно n и размера коэффициентов целевого вектора c.

Слегка изменим описание функции g так, чтобы задача стала экспоненциально сложной. С этой целью рассмотрим функцию $b_n\colon [2^n] \to \{0,1\}^n$, которая для каждого целого $i \in [2^n]$ возвращает двоичную запись числа $i-1$. Кроме того, воспользуемся результатом Шэннона [21] о том, что почти все булевы функции от n переменных имеют вычислительную сложность порядка $2^n/n$. Пусть $h_n\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, $n \in \mathbb{N}$, — примеры таких сложных функций. Положим

$$g_n(i) = 2i - h_n(b_n(i)), \quad i \in [2^n],$$

и введём обозначение $Y_n^d = C(d, 2^n, g_n)$.

Утверждение 2. *Массовая задача оптимизации вдоль вектора c на множестве Y_n^d, $d \geqslant 2$, имеет экспоненциальную сложность по n даже при ограничении $\log \|c\|_\infty = \mathcal{O}(nd^2)$.*

Доказательство. Предположим, что d чётно. Для каждого $k = 2, 4, \ldots, 2^{n+1}$ рассмотрим вектор

$$c_{d,n}(k) = \left(-\binom{d}{1}k^{d-1}, \binom{d}{2}k^{d-2}, \ldots, (-1)^d\right),$$

координаты которого суть коэффициенты многочлена $(k-t)^d - k^d$.

Заметим, что минимум для $(k-t)^d - k^d$ достигается при $t = k$ (в предположении, что d чётное). Следовательно,

$$\min_{y \in Y_n^d} (y^T c_{d,n}(k)) = h_n(b_n(k/2)) - k^d.$$

т. е. по чётности-нечётности минимума восстанавливается значение функции h_n для каждого $x = (x_i) = b_n(k/2) \in \{0,1\}^n$, где $k = 2 + \sum\limits_{i=1}^{n} 2^i x_i$. Иными словами, оптимизация вдоль $c_{d,n}(k)$ на Y_n^d не проще нахождения значения функции h_n, имеющей экспоненциальную вычислительную сложность.

То же самое верно и для нечётных $d \geqslant 3$, если положить $c_{d,n}(k) = (c_{d-1,n}(k), 0)$. Утверждение 2 доказано.

Итак, построены два примера массовых задач дискретной оптимизации с абсолютно одинаковыми комбинаторными свойствами и одинаковыми размерами координат. При этом задача $\{X_n\}$ полиномиально разрешима, а задача $\{Y_n^n\}$ имеет экспоненциальную сложность. Существование такого рода примеров означает, что знания комбинаторных свойств многогранников задачи недостаточно для качественной оценки её вычислительной сложности.

В заключение заметим, что задача распознавания вершины для Y_n^d имеет экспоненциальную сложность. Вопрос о существовании аналогичных примеров при условии полиномиальности распознавания вершин остаётся открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бондаренко В. А., Максименко А. Н.** Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. М.: ЛКИ, 2008. 184 с.
2. **Бондаренко В. А., Николаев А. В.** Комбинаторно-геометрические свойства задачи о разрезе // Докл. АН. 2013. Т. 452, № 2. С. 127–129.
3. **Деза М. М., Лоран М.** Геометрия разрезов и метрик. М: МЦНМО, 2001. 736 с.
4. **Максименко А. Н.** Общая грань некоторых 0/1-многогранников с NP-полным критерием несмежности вершин // Фундамент. и прикл. математика. 2013. Т. 18, № 2. С. 105–118.
5. **Максименко А. Н.** Характеристики сложности: кликовое число графа многогранника и число прямоугольного покрытия // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 5. С. 116–130
6. **Максименко А. Н.** Наиболее простые семейства многогранников, ассоциированных с NP-трудными задачами // Докл. АН. 2015. Т. 460, № 3. С. 272–274.
7. **Циглер Г. М.** Теория многогранников. М.: МЦНМО, 2014. 568 с.
8. **Applegate D. L., Bixby R. M., Chvátal V., Cook W. J.** The traveling salesman problem: a computational study. Princeton: Princeton Univ. Press, 2007. 608 p.
9. **Bogomolov Yu., Fiorini S., Maksimenko A., Pashkovich K.** Small extended formulations for cyclic polytopes // Discrete Comput. Geom. 2015. Vol. 53, No. 4. P. 809–816.
10. **Conforti M., Cornuéjols G., Zambelli G.** Extended formulations in combinatorial optimization // Ann. Oper. Res. 2013. Vol. 204, No. 1. P. 97–143.
11. **Dantzig G. B., Fulkerson D. R., Johnson S. M.** Solution of a large-scale traveling salesman problem // Oper. Res. 1954. Vol. 2, No. 4. P. 393–410.
12. **Fiorini S., Kaibel V., Pashkovich K., Theis D. O.** Combinatorial bounds on nonnegative rank and extended formulations // Discrete Math. 2013. Vol. 313, No. 1. P. 67–83.

13. **Fiorini S., Massar S., Pokutta S., Tiwary H. R., de Wolf R.** Exponential lower bounds for polytopes in combinatorial optimization // J. ACM. 2015. Vol. 62, No. 2. P. 17:1–17:23.
14. **Fiorini S., Rothvoß T., Tiwary H. R.** Extended formulations for polygons // Discrete Comput. Geom. 2012. Vol. 48, No. 13. P. 658–668.
15. **Grünbaum B.** Convex polytopes. New York: Springer-Verl., 2003. 471 p.
16. **Kaibel V.** Extended formulations in combinatorial optimization // Optima 85, Math. Optim. Soc. Newsl. No. 85. 2011. P. 2–7.
17. **Kaibel V., Pfetsch M. E.** Computing the face lattice of a polytope from its vertex-facet incidences // Comput. Geom. 2002. Vol. 23, No. 3. P. 281–290.
18. **Kaibel V., Weltge S.** A short proof that the extension complexity of the correlation polytope grows exponentially // Discrete Comput. Geom. 2015. Vol. 53, No. 2. P. 397–401.
19. **Padberg M. W., Rao M. R.** The travelling salesman problem and a class of polyhedra of diameter two // Math. Program. 1974. Vol. 7. P. 32–45.
20. **Rothvoß T.** The matching polytope has exponential extension complexity // Proc. 46th Annu. ACM Symp. Theory Comput. (New York, May 31–June 3, 2014). New York: ACM, 2014. P. 263–272.
21. **Shannon C.** Communication theory of secrecy systems // Bell System Techn. J. 1949. Vol. 28, No. 4. P. 656–715.
22. **Yannakakis M.** Expressing combinatorial optimization problems by linear programs // J. Comput. Syst. Sci. 1991. Vol. 43, No. 3. P. 441–466.

Максименко Александр Николаевич

Статья поступила
13 октября 2015 г.

Исправленный вариант —
19 апреля 2016 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
July–August 2016. Volume 23, No. 3. P. 61–80

UDC 519.854 DOI: 10.17377/daio.2016.23.515

COMPLEXITY OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION PROBLEMS IN TERMS OF FACE LATTICE OF ASSOCIATED POLYTOPES

A. N. Maksimenko[1]
[1]Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya St., 150000 Yaroslavl, Russia
e-mail: maximenko.a.n@gmail.com

Abstract. This paper deals with the following question: Can combinatorial properties of polytopes help in finding an estimate for the complexity of the corresponding optimization problem? Sometimes, these key characteristics of complexity were the number of hyperfaces of the polytope, diameter and clique number of the graph of the polytope, the rectangle covering number of the vertex-facet incidence matrix, and some other characteristics. In this paper, we provide several families of polytopes for which the above-mentioned characteristics differ significantly from the real computational complexity of the corresponding optimization problems. In particular, we give two examples of discrete optimization problem whose polytopes are combinatorially equivalent and they have the same lengths of the binary representation of the coordinates of the polytope vertices. Nevertheless, the first problem is solvable in polynomial time, while the second problem has exponential complexity. Ill. 1, bibliogr. 22.

Keywords: NP-complex problem, vertex-facet incidence matrix, combinatorial equivalence, graph of a polytope, graph clique number, extended formulation, cyclic polytope.

REFERENCES

1. **V. A. Bondarenko** and **A. N. Maksimenko,** *Geometricheskie konstruktsii i slozhnost' v kombinatornoi optimizatsii* (Geometric Constructions and Complexity in Combinatorial Optimization), LKI, Moscow, 2008.
2. **V. A. Bondarenko** and **A. V. Nikolaev,** Combinatorial and geometric properties of the Max-Cut and Min-Cut problems, *Dokl. Akad. Nauk,* **452**, No. 2, 127–129, 2013. Translated in *Dokl. Math.,* **88**, No. 2, 516–517, 2013.
3. **Deza M. M.** and **M. Laurent,** *Geometry of Cuts and Metrics,* Springer, Heidelberg, 1997 (Algorithms Comb., Vol. 15). Translated under the title *Geometriya razrezov i metrik,* MTsNMO, Moscow, 2001.

4. **A. N. Maksimenko,** The common face of some 0/1-polytopes with NP-complete nonadjacency relation, *Fundam. Prikl. Mat.,* **18**, No. 2, 105–118, 2013. Translated in *J. Math. Sci.,* **203**, No. 6, 823–832, 2014.
5. **A. N. Maksimenko,** Characteristics of complexity: Clique number of a polytope graph and rectangle covering number, *Model. Anal. Inf. Sist.,* **21**, No. 5, 116–130, 2014.
6. **A. N. Maksimenko,** The simplest families of polytopes associated with NP-hard problems, *Dokl. Akad. Nauk,* **460**, No. 3, 272–274, 2015. Translated in *Dokl. Math.,* **91**, No. 1, 53–55, 2015.
7. **G. M. Ziegler,** *Lectures on Polytopes,* Springer, New York, 1995 (Grad. Texts Math., Vol. 152). Translated under the title *Teoriya mnogogrannikov,* MTsNMO, Moscow, 2014.
8. **D. L. Applegate, R. M. Bixby, V. Chvátal,** and **W. J. Cook,** *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study,* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, USA, 2007.
9. **Yu. Bogomolov, S. Fiorini, A. N. Maksimenko,** and **K. Pashkovich,** Small extended formulations for cyclic polytopes, *Discrete Comput. Geom.,* **53**, No. 4, 809–816, 2015.
10. **M. Conforti, G. Cornuéjols,** and **G. Zambelli,** Extended formulations in combinatorial optimization, *Ann. Oper. Res.,* **204**, No. 1, 97–143, 2013.
11. **G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson,** and **S. M. Johnson,** Solution of a large-scale traveling salesman problem, *Oper. Res.,* **2**, No. 4, 393–410, 1954.
12. **S. Fiorini, V. Kaibel, K. Pashkovich,** and **D. O. Theis,** Combinatorial bounds on nonnegative rank and extended formulations, *Discrete Math.*, **313**, No. 1, 67–83, 2013.
13. **S. Fiorini, S. Massar, S. Pokutta, H. R. Tiwary,** and **R. de Wolf,** Exponential lower bounds for polytopes in combinatorial optimization, *J. ACM,* **62**, No. 2, 17:1–17:23, 2015.
14. **S. Fiorini, T. Rothvoß,** and **H. R. Tiwary,** Extended formulations for polygons, *Discrete Comput. Geom.,* **48**, No. 13, 658–668, 2012.
15. **B. Grünbaum,** *Convex Polytopes,* Springer, New York, 2003 (Grad. Texts Math., Vol. 221).
16. **V. Kaibel,** Extended formulations in combinatorial optimization, *Optima, Math. Optim. Soc. Newsl.,* No. 85, 2–7, 2011.
17. **V. Kaibel** and **M. E. Pfetsch,** Computing the face lattice of a polytope from its vertex-facet incidences, *Comput. Geom.,* **23**, No. 3, 281–290, 2002.
18. **V. Kaibel** and **S. Weltge,** A short proof that the extension complexity of the correlation polytope grows exponentially, *Discrete Comput. Geom.,* **53**, No. 2, 397–401, 2015.
19. **M. W. Padberg** and **M. R. Rao,** The travelling salesman problem and a class of polyhedra of diameter two, *Math. Program.,* **7**, 32–45, 1974.

20. T. Rothvoß, The matching polytope has exponential extension complexity, *Proc. 46th Annual ACM Symp. Theory Comput., New York, USA, May 31–June 3,* 2014, pp. 263–272, ACM, New York, 2014.

21. C. Shannon, Communication theory of secrecy systems, *Bell Syst. Techn. J.,* **28**, No. 4, 656–715, 1949.

22. M. Yannakakis, Expressing combinatorial optimization problems by linear programs, *J. Comput. Syst. Sci.,* **43**, No. 3, 441–466, 1991.

Alexander N. Maksimenko

Received
13 October 2015

Revised
19 April 2016