ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2016. Том 23, № 3. С. 81–92

УДК 519.716 DOI: 10.17377/daio.2016.23.518

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДАЛГЕБРАХ В АЛГЕБРАХ ОДНОМЕСТНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ *)

С. С. Марченков[1]
[1]Московский гос. университет,
Ленинские горы, 1, 119991 Москва, Россия
e-mail: ssmarchen@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются алгебры одноместных функций с носителями из счётных примитивно-рекурсивно замкнутых классов и операцией композиции. Доказывается, что любая алгебра этого типа имеет континуальное число максимальных подалгебр, включающих множество всех одноместных функций из класса $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика. Библиогр. 13.

Ключевые слова: максимальная подалгебра, одноместная рекурсивная функция.

При исследовании алгебр рекурсивных функций в качестве важной задачи рассматривается задача об описании всех максимальных подалгебр. К настоящему времени ни для одной из наиболее интересных алгебр эта задача полностью не решена. Основным препятствием здесь, повидимому, является то, что в рассматриваемых случаях семейство всех максимальных подалгебр оказывается континуальным (см., например, [1, 2, 5–7, 9, 10, 12, 13]). Кроме того, даже для доказательства континуальности числа максимальных подалгебр предлагаемые приёмы значительно отличаются друг от друга и существенно зависят как от носителя алгебры, так и от набора операций.

Как видно из имеющихся результатов, построение континуальных семейств максимальных подалгебр получается несколько проще для алгебр многоместных функций, нежели для алгебр одноместных функций. Тем не менее в [1, 2, 6] доказано существование континуального числа максимальных подалгебр для некоторых алгебр одноместных примитивно-рекурсивных и общерекурсивных функций.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16–01–00593).

Если рассматривать алгебры одноместных функций с одной операцией композиции (суперпозиции), то здесь мощность семейства всех максимальных подалгебр определена только в двух случаях: для алгебры всех общерекурсивных функций [2] и для алгебры всех примитивно-рекурсивных функций [6]. В первом случае в доказательстве используется континуальное семейство ультрафильтров, построенных в некоторой булевой алгебре, во втором случае определяется вычислимая последовательность (0,1)-функций, подпоследовательности которой задают искомые максимальные подалгебры. Обе работы объединяет то, что определяемые максимальные подалгебры не содержат достаточно объёмных множеств одноместных функций (например, множества $\mathcal{E}_1^2$ всех одноместных функций из класса $\mathcal{E}^2$ Гжегорчика).

В настоящей работе рассматриваем алгебры одноместных всюду определённых функций с операцией композиции; носители этих алгебр являются множествами всех одноместных всюду определённых функций из счётных примитивно-рекурсивно замкнутых классов. В отличие от [2, 6] мы хотим, чтобы все максимальные подалгебры из определяемого континуального семейства были достаточно «богатыми». Имея в виду возможные приложения, включаем в максимальные подалгебры все функции из множества $\mathcal{E}_1^2$ (с равным успехом можно было бы выбрать любой другой класс $\mathcal{E}^n$ иерархии Гжегорчика). Основной результат работы показывает, что любая алгебра рассматриваемого типа имеет континуальное семейство максимальных подалгебр, каждая из которых содержит множество $\mathcal{E}_1^2$.

Введём необходимые понятия. Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$, R — счётный примитивно-рекурсивно замкнутый класс функций на $\mathbb{N}$. Через $R^{(1)}$ обозначим множество всех одноместных функций из R. Рассматриваем алгебру $\mathcal{A}_R = \langle R^{(1)}; \circ \rangle$, где $\circ$ обозначает операцию композиции. Собственная подалгебра $\langle Q_1; \circ \rangle$ алгебры $\mathcal{A}_R$ называется *максимальной*, если не существует такой подалгебры $\langle Q_2; \circ \rangle$ алгебры $\mathcal{A}_R$, что выполняются строгие включения $Q_1 \subset Q_2 \subset R^{(1)}$. Будем говорить, что $Q \subseteq R^{(1)}$ *порождает* (*не порождает*) алгебру $\mathcal{A}_R$, если замыкание $[Q]$ множества Q относительно операции композиции совпадает (не совпадает) с множеством $R^{(1)}$.

Напомним (см. [4, 8]), что класс $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика — это наименьший класс функций, который содержит функции $0, x+1, x \cdot y$, все селекторные функции и замкнут относительно операций суперпозиции и ограниченной рекурсии (схема ограниченной рекурсии имеет вид

$$f(\tilde{x}, 0) = g(\tilde{x}), \quad f(\tilde{x}, y+1) = h(\tilde{x}, y, f(\tilde{x}, y)), \quad f(\tilde{x}, y) \leqslant j(\tilde{x}, y)).$$

Определение класса $\mathcal{E}^3$ иерархии Гжегорчика отличается от приведённого определения только тем, что вместо функции $x \cdot y$ рассматривается функция x^y. В классе $\mathcal{E}^4$ иерархии Гжегорчика, который также потребуется в дальнейшем, вместо функции x^y берётся «сверхстепень» x^*y:

$$x^*0 = x, \quad x^*(y+1) = x^{x^*y}.$$

Известно (см., например, [11]), что классы $\mathcal{E}^3$ и $\mathcal{E}^4$ совпадают с классами всех функций, вычислимых на машинах Тьюринга за время, ограниченное подходящими суперпозициями функций $x+1,\ x^y$ или $x+1,\ x^*y$.

Множество $M \subseteq \mathbb{N}$ назовём $\mathcal{E}^4$-*рекурсивным*, если классу $\mathcal{E}^4$ принадлежит характеристическая функция $\chi_M(x)$ этого множества:

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in M, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее будем строить $\mathcal{E}^4$-вычислимую последовательность множеств $A_0, A_1, \ldots$ (имеется в виду, что в классе $\mathcal{E}^4$ будет построена функция $U(i,x)$, которая при любом $i \geqslant 0$ даёт характеристическую функцию множества A_i). Любое множество A_i из данной последовательности и его дополнение $\overline{A}_i$ будут являться бесконечными $\mathcal{E}^4$-рекурсивными множествами, перечислимыми в порядке возрастания подходящими функциями $a_i^1(x)$ и $a_i^0(x)$ из класса $\mathcal{E}^4$.

Сформулируем ещё ряд требований к последовательности $\{A_i\}$, связав с каждым множеством A_i два класса K_i^1, K_i^0 одноместных функций из R. Функции из класса K_i^1 будут тождественными на множестве A_i и произвольными на множестве $\overline{A}_i$; функции из класса K_i^0, наоборот, тождественны на $\overline{A}_i$ и произвольны на A_i. Нетрудно видеть, что при любом $i \geqslant 0$ каждый из классов K_i^1, K_i^0 замкнут относительно операции композиции.

Прежде чем строить последовательность $\{A_i\}$, установим некоторые свойства классов K_i^1, K_i^0. В лемме 1 будем предполагать, что классы K_i^1, K_i^0 обладают сформулированными выше свойствами.

Лемма 1. *При любом $i \geqslant 0$ класс $K_i^1 \cup K_i^0$ порождает алгебру $\mathcal{A}_R$, а каждая из алгебр $\langle K_i^1; \circ \rangle$, $\langle K_i^0; \circ \rangle$ расширяется до максимальной подалгебры алгебры $\mathcal{A}_R$.*

Доказательство. Пусть g — произвольная функция из $R^{(1)}$. Определим в классах K_i^1 и K_i^0 функции g_1 и g_0: если $x \in \overline{A}_i$ и $x = a_i^0(y)$, то пусть $g_1(x) = a_i^0(2y+1)$; если $x \in A_i$ и $x = a_i^1(y)$, то пусть $g_0(x) = a_i^0(2y)$. Тогда композиция $g_0 \circ g_1$ инъективна и её область значений совпадает

с множеством $\overline{A}_i$. Кроме того, в классе $\mathcal{E}^4$ существует функция g_3, которая при любом $x \in \overline{A}_i$ вычисляет полный прообраз числа x при отображении $g_0 \circ g_1$. Поэтому в классе K_i^1 найдётся функция g_4 такая, что $g(x) = g_4 \circ g_0 \circ g_1(x)$.

Переходя ко второй части леммы, заметим, что класс K_i^1, например, вместе с функцией a_i^0 (из класса $\mathcal{E}^4$) порождает алгебру $\mathcal{A}_R$. Это следует из того, что композиции вида $g \circ a_i^0$, где $g \in K_i^1$, исчерпывают всё множество $R^{(1)}$. Тем самым с использованием известной теоретико-множественной леммы Цорна (детали имеются, например, в [3]) заключаем, что алгебру $\langle K_i^1; \circ \rangle$ можно расширить до максимальной подалгебры. Аналогично рассматривается класс K_i^0. Лемма 1 доказана.

В приводимом далее построении последовательности $\{A_i\}$ будет использоваться лишь тот факт, что функции класса K_i^1 тождественны на множестве A_i, а функции класса K_i^0 — на множестве $\overline{A}_i$. Можно также считать, что в процессе построения последовательности $\{A_i\}$ значения функций класса K_i^1 «недоступны» для значений аргументов, принадлежащих множеству $\overline{A}_i$, а значения функций класса K_i^0 — для значений аргументов, принадлежащих множеству A_i. В полном объёме свойства классов K_i^1, K_i^0 понадобятся при доказательстве теоремы.

Множества A_i будут определяться так, что выполняется следующее важное условие.

Если функция g задаётся композицией функций множества

$$\mathcal{E}_1^2 \cup K_{j_0}^1 \cup K_{j_0}^0 \cup \ldots \cup K_{j_m}^1 \cup K_{j_m}^0, \tag{1}$$

в которой нет двух функций из «противоположных» классов K_j^1, K_j^0, то функция g либо не инъективна, либо совпадает на бесконечном множестве с некоторой функцией из класса $\mathcal{E}_1^2$.

Предварительно определим в классе $\mathcal{E}^2$ тройку функций

$$c(x, y) = (x + y)^2 + x, \quad l(x) = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2, \quad r(x) = [\sqrt{x}] \dot{-} l(x),$$

которая позволяет бесповторно нумеровать множество $\mathbb{N}^2$ и вычислять по номеру пары обе компоненты. Функция c инъективна (но не биективна), и, кроме того, имеют место тождества $l \circ c(x, y) = x$, $r \circ c(x, y) = y$. При любом $n \geqslant 2$ суперпозициями функции c можно определить функцию $c^n(x_1, \ldots, x_n)$, которая аналогичным образом нумерует множество $\mathbb{N}^n$: полагая $c^2 = c$, определяем далее

$$c^{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = c^2(c^n(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}).$$

Чтобы иметь возможность обращаться к произвольным композициям функций из множества (1), определим в классе $\mathcal{E}^2$ нумерацию μ всех термов (параметр m здесь может быть произвольным)

$$f_{i_{m+1}} k_{j_m}^{\sigma_m} \dots k_{j_1}^{\sigma_1} f_{i_1} k_{j_0}^{\sigma_0} f_{i_0}, \tag{2}$$

где $\sigma_0, \dots, \sigma_m \in \{0,1\}$, символ $k_{j_q}^1$ обозначает (произвольную) функцию класса $K_{j_q}^1$, символ $k_{j_q}^0$ — (произвольную) функцию класса $K_{j_q}^0$ и в последовательности (2) нет двух одинаковых символов k_{j_q} с различными верхними индексами.

Нумерация термов вида (2), очевидно, сводится к нумерации векторов

$$(i_{m+1}, j_m, \sigma_m, \dots, j_1, \sigma_1, i_1, j_0, \sigma_0, i_0)$$

или более коротких векторов

$$(i_{m+1}, 2j_m + \sigma_m, \dots, 2j_1 + \sigma_1, i_1, 2j_0 + \sigma_0, i_0).$$

Последнему вектору сопоставим число

$$c^{2m+3}(i_{m+1}, 2j_m + \sigma_m, \dots, 2j_1 + \sigma_1, i_1, 2j_0 + \sigma_0, i_0, 2m+3),$$

которое и будем считать номером терма (2).

Нетрудно видеть, что множество всех номеров термов (2) (с дополнительным условием относительно вхождения символов $k_{j_q}^1$ и $k_{j_q}^0$) является $\mathcal{E}^2$-рекурсивным. Кроме того, в классе $\mathcal{E}^2$ имеется одноместная функция μ, которая перечисляет данное множество номеров. Дополнительно предположим, что функция μ принимает каждое значение бесконечное число раз, причём для каждого числа d из области значений функции μ в классе $\mathcal{E}^2$ имеется такая строго монотонная функция $H_d(x)$, что при любом x выполняется равенство $\mu \circ H_d(x) = d$.

Известно [4], что в классе $\mathcal{E}^3$ имеется функция $V(n,x)$, универсальная для множества $\mathcal{E}_1^2$ всех одноместных функций класса $\mathcal{E}^2$. Таким образом, $V(0,x), V(1,x), \dots$ есть пересчёт (возможно, с повторениями) множества функций $\mathcal{E}_1^2$. Функцию $V(n,x)$, как функцию от переменной x, будем обозначать через $f_n(x)$.

Множества A_i будем строить по шагам, определяя (с помощью эффективной процедуры из класса $\mathcal{E}^4$) на каждом шаге t конечные части A_i^t и $\overline{A}_i^t$ множеств A_i и $\overline{A}_i$. При этом для любого t число непустых множеств A_i^t, $\overline{A}_i^t$ будет конечно. Каждое из множеств A_i, $\overline{A}_i$ будет пределом монотонно неубывающей последовательности множеств $\{A_i^t\}$ или $\{\overline{A}_i^t\}$.

Сначала в общих чертах опишем схему определения множеств A_i^t, $\overline{A}_i^t$, не вдаваясь в детали и оценки, связанные с классами $\mathcal{E}^3$ и $\mathcal{E}^4$.

Шаг 0. При всех $i \geqslant 0$ полагаем $A_i^0 = \overline{A}_i^0 = \varnothing$.

Шаг $t+1$. Пусть число $\mu(t)$ определяет терм (2) (с указанными выше ограничениями), а $B_{j_q}^t$ в зависимости от соотношений $\sigma_q = 1$ или $\sigma_q = 0$ обозначает множество $A_{j_q}^t$ или $\overline{A}_{j_q}^t$. Будем пытаться «вычислить» функцию $g_{\mu(t)}$, задаваемую термом (2) с номером $\mu(t)$, добавляя при этом к множествам $B_{j_0}^t, \ldots, B_{j_m}^t$ новые элементы и пользуясь тем, что функции $k_{j_0}^{\sigma_0}, \ldots, k_{j_m}^{\sigma_m}$ на соответствующих множествах $B_{j_q}^t$ тождественны.

Предположим сначала, что на предыдущих шагах найдено, что функция $g_{\mu(t)}$ не инъективна. Тогда для всякого q $(0 \leqslant q \leqslant m)$ добавляем к множеству $B_{j_q}^t$ наименьшее число, не входящее в множество $A_{j_q}^t \cup \overline{A}_{j_q}^t$, образуя множество $B_{j_q}^{t+1}$. Все остальные множества A_j^{t+1}, $\overline{A}_j^{t+1}$ полагаем равными соответствующим множествам A_j^t, $\overline{A}_j^t$. Переходим к шагу $t+2$.

Предположим, что на предыдущих шагах неинъективность функции $g_{\mu(t)}$ не установлена. Предположим также, что l различных значений функции $g_{\mu(t)}$ можно вычислить, используя только формулу $f_{i_{m+1}} \circ f_{i_m} \circ \ldots \circ f_{i_0}$ (это значит, что в данных случаях «промежуточные» функции $k_{j_0}^{\sigma_0}, \ldots, k_{j_m}^{\sigma_m}$ тождественны). И пусть n есть максимальное число элементов в множествах $\overline{B}_{j_0}^t, \ldots, \overline{B}_{j_m}^t$, «дополнительных» к множествам $B_{j_0}^t, \ldots, B_{j_m}^t$ (двойные «дополнения» над символами A снимаем). Пользуясь формулой (2), будем последовательно «вычислять» значения функции $g_{\mu(t)}$.

Сначала найдём значения функции f_{i_0} на отрезке $[0, (m+1)n+l]$. Если она на этом отрезке не инъективна, то неинъективной будет, конечно, и функция $g_{\mu(t)}$. В этом случае, как и выше, образуем одноэлементные расширения множеств $B_{j_0}^t, \ldots, B_{j_m}^t$ и переходим к шагу $t+2$.

Пусть функция f_{i_0} на отрезке $[0, (m+1)n+l]$ инъективна. Выделим в этом отрезке подмножество I_0, содержащее не менее $mn+l+1$ элементов, на котором функция f_{i_0} принимает значения, не входящие в множество $\overline{B}_{j_0}^t$. Добавив множество $f_{i_0}(I_0)$ к множеству $B_{j_0}^t$, образуем множество $B_{j_0}^{t+1}$ (если в формуле (2) имеются ещё символы $k_{j_0}^{\sigma_0}$, то множество $f_{i_0}(I_0) \cup B_{j_0}^t$ далее на шаге $t+1$ рассматриваем в качестве множества $B_{j_0}^t$). Поскольку функция $k_{j_0}^{\sigma_0}$ на множестве $B_{j_0}^{t+1}$ тождественна, функция $k_{j_0}^{\sigma_0} \circ f_{i_0}$ на множестве I_0 будет совпадать с функцией f_{i_0}.

Далее рассматриваем на множестве I_0 функцию $f_{i_1} \circ f_{i_0}$. Если она на этом множестве не инъективна, то добавляем к каждому из множеств

$B^t_{j_1}, \ldots, B^t_{j_m}$ по одному элементу и переходим к шагу $t+2$. В противном случае выделяем в множестве I_0 подмножество I_1, состоящее не менее чем из $(m-1)n+l+1$ элементов, на котором функция $f_{i_1} \circ f_{i_0}$ принимает значения, не входящие в $\overline{B}^t_{j_1}$. Добавляем множество $f_{i_1} \circ f_{i_0}(I_1)$ к множеству $B^t_{j_1}$ и получаем множество $B^{t+1}_{j_1}$ (как и выше, если в формуле (2) имеются ещё символы $k^{\sigma_1}_{j_1}$, то множество $f_{i_1} \circ f_{i_0}(I_1) \cup B^t_{j_1}$ далее на шаге $t+1$ рассматриваем в качестве множества $B^t_{j_1}$).

Этот процесс закончится на множестве I_m, содержащем не менее $l+1$ элементов, на котором функция $k^{\sigma_m}_{j_m} \circ f_{i_m} \circ \ldots \circ k^{\sigma_0}_{j_0} \circ f_{i_0}$ будет совпадать с функцией $f_{i_m} \circ \ldots \circ f_{i_0}$. Если на множестве I_m функция $f_{i_{m+1}} \circ \ldots \circ f_{i_0}$ не инъективна, то неинъективной будет и функция $g_{\mu(t)}$. Если же она инъективна, то в силу определения числа l функция $g_{\mu(t)}$ будет принимать на множестве I_m хотя бы одно значение, отличное от тех l значений, которые были определены для неё на предыдущих шагах.

Установим ряд свойств множеств A_j, $\overline{A}_j$.

1. *Каждое из множеств A_j, $\overline{A}_j$ бесконечно.*

Пусть f_{i_0} — функция-константа 0. Рассмотрим наименьший шаг t_0+1, на котором $\mu(t_0)$ является номером терма $f_{i_0} k^1_j f_{i_0}$ и на котором устанавливается неинъективность функции f_{i_0}. Тогда на всех последующих шагах $t+1$, где $\mu(t) = \mu(t_0)$, к множеству A_j будет добавляться по одному элементу. Аналогично рассматривается терм $f_{i_0} k^0_j f_{i_0}$ и множество $\overline{A}_j$. Кроме того, поскольку на шагах указанного типа добавляется наименьший элемент, не входящий в множество $A^t_j \cup \overline{A}^t_j$, каждое число из $\mathbb{N}$ будет действительно занесено в одно из множеств A_j, $\overline{A}_j$.

2. *Процесс определения множеств A^t_j, $\overline{A}^t_j$ алгоритмическим образом зависит от t и может быть выполнен с помощью функций, принадлежащих классу $\mathcal{E}^4$.*

В самом деле, пусть выполнен шаг t описанной выше процедуры и уже построены все непустые множества A^t_j, $\overline{A}^t_j$. На шаге $t+1$ рассматриваются лишь множества A_j, номера которых $j_0, \ldots, j_m$ определяются термом (2) с номером $\mu(t)$. Функция μ принадлежит классу $\mathcal{E}^2$, номера $j_0, \ldots, j_m$ тоже могут быть вычислены функцией из класса $\mathcal{E}^2$ (и число их не превосходит t). Если к шагу $t+1$ функция $g_{\mu(t)}$ уже определена как неинъективная функция, то дальнейшие одноэлементные увеличения множеств A_{j_q} или $\overline{A}_{j_q}$ носят крайне простой алгоритмический характер.

Предположим, что к шагу $t+1$ неинъективность функции $g_{\mu(t)}$ не установлена. Предположим также, что параметры $l = l(t)$ и $n = n(t)$,

фигурирующие в построении, на шаге $t+1$ уже определены. Заметим, что верхняя граница $(m+1)n+l$ рассматриваемого в конструкции отрезка не превосходит величины $(t+1)n(t)+l(t)$, которая с помощью простой функции из $\mathcal{E}^2$ выражается через параметры $l(t)$ и $n(t)$. Поскольку все функции $f_{i_0}, \ldots, f_{i_{m+1}}$ вычисляются (с помощью универсальной функции V, принадлежащей классу $\mathcal{E}^3$) только на этом отрезке, вся процедура добавления элементов к множествам $B^t_{j_0}, \ldots, B^t_{j_m}$ может быть в данном случае выполнена с помощью функций из класса $\mathcal{E}^3$. Таким образом, переход от шага t к шагу $t+1$ выполняется функциями из класса $\mathcal{E}^3$ (т. е. в рекурсивном определении используются лишь функции из класса $\mathcal{E}^3$), что в итоге приводит к процедуре определения непустых множеств A^t_j, $\overline{A}^t_j$, выполняемой функциями класса $\mathcal{E}^4$.

3. *Каждое из множеств A_j, $\overline{A}_j$ перечислимо в порядке возрастания функцией из класса $\mathcal{E}^4$.*

Рассмотрим только множество A_j. С учётом свойства 2 достаточно доказать, что в классе $\mathcal{E}^4$ имеется монотонная функция $h_j(x)$, дающая при любом x верхнюю оценку шага t, на котором в множество A_j будет перечислен его $(x+1)$-й элемент. Вновь рассмотрим функцию f_{i_0}, тождественно равную нулю, и наименьший шаг t_0+1, на котором $\mu(t_0)$ даёт номер терма $f_{i_0}k^1_j f_{i_0}$ и на котором устанавливается неинъективность функции f_{i_0}. Согласно описанной выше процедуре на всех последующих шагах $t+1$, где $\mu(t)=\mu(t_0)$, в множество A_j будет добавляться по одному элементу. Вместе с тем, как это отмечено выше, в классе $\mathcal{E}^2$ имеется строго монотонная функция $H_{\mu(t_0)}(x)$, которая при любом x удовлетворяет равенству $\mu(H_{\mu(t_0)}(x)) = \mu(t_0)$. Поэтому $(x+1)$-й элемент множества A_j будет перечислен в это множество не позднее, чем на шаге $H_{\mu(t_0)}(x+t_0+1)+1$.

4. *Если d есть номер терма* (2), *который определяет функцию $g_d(x)$, то функция g_d либо неинъективна, либо совпадает с некоторой функцией из класса $\mathcal{E}^2_1$ на бесконечном множестве.*

Рассмотрим все те шаги $t+1$ (их бесконечное число), на которых выполняется равенство $\mu(t)=d$. Предположим далее, что неинъективность функции g_d на этих шагах не обнаружена. Тогда согласно построению на каждом из таких шагов будет определено по крайней мере ещё одно новое значение функции g_d, которое она принимает при вычислении по формуле $f_{i_{m+1}} \circ \ldots \circ f_{i_0}$. Таким образом, функция g_d будет совпадать с функцией $f_{i_{m+1}} \circ \ldots \circ f_{i_0}$ из класса $\mathcal{E}^2_1$ на бесконечном множестве.

Для бесконечной двоичной последовательности $\alpha = \alpha_0\alpha_1\ldots$ положим

$$L_\alpha = \mathcal{E}_1^2 \cup \Big(\bigcup_{i\geqslant 0} K_i^{\alpha_i}\Big).$$

5. *Для любой бесконечной двоичной последовательности α замыкание множества L_α относительно операции композиции отлично от множества $R^{(1)}$. Если последовательности α и β различны, то различны и алгебры, порождамые множествами L_α и L_β.*

Предположим, что множество L_α порождает всю алгебру $\mathcal{A}_R$. Тогда, в частности, функция $a_i^{\bar\alpha_i}$ получается композицией некоторых функций множества L_α. Выберем число $j \geqslant i$ такое, что эта функция входит в замыкание множества

$$\mathcal{E}_1^2 \cup K_0^{\alpha_0} \cup \ldots \cup K_j^{\alpha_j}. \tag{3}$$

Как установлено во второй части доказательства леммы 1, функция $a_i^{\bar\alpha_i}$ вместе с классом $K_i^{\alpha_i}$ порождает всю алгебру $\mathcal{A}_R$. Следовательно, алгебру $\mathcal{A}_R$ будет порождать и множество (3). Однако в силу свойства 4 любая функция из замыкания множества (3) либо неинъективна, либо совпадает с некоторой функцией из $\mathcal{E}_1^2$ на бесконечном множестве. Приходим к противоречию с определением множества $R^{(1)}$.

Переходя ко второй части свойства 5, предположим, что алгебры, порождамые множествами L_α, L_β, совпадают. Выберем такое i, что $\alpha_i \neq \beta_i$. В алгебру, порождаемую данными множествами, входит, в частности, класс $K_i^{\alpha_i} \cup K_i^{\beta_i}$. Однако, как установлено в лемме, этот класс порождает алгебру $\mathcal{A}_R$. Получаем противоречие с первой частью свойства 5.

Теорема 1. *Для любого счётного примитивно-рекурсивно замкнутого класса R алгебра $\mathcal{A}_R$ содержит континуальное число максимальных подалгебр, каждая из которых включает множество функций $\mathcal{E}_1^2$.*

Доказательство. Из свойства 5 следует, что континуальное семейство множеств $\{L_\alpha\}$ порождает в алгебре $\mathcal{A}_R$ континуальное семейство $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ различных подалгебр (отличных от алгебры $\mathcal{A}_R$). Вместе с тем, как отмечено в доказательстве леммы, при добавлении к носителю алгебры $\mathcal{A}_\alpha$ любой функции $a_i^{\bar\alpha_i}$ получается система, порождающая всю алгебру $\mathcal{A}_R$. Таким образом, любая алгебра $\mathcal{A}_\alpha$ расширяется до максимальной подалгебры, а в силу леммы 1 различные алгебры $\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta$ не могут содержаться в одной и той же максимальной подалгебре. Теорема 1 доказана.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Березин С. А.** Об алгебре одноместных примитивно-рекурсивных функций с операцией итерации общего вида // Кибернетика. 1976. № 3. С. 12–19.
2. **Березин С. А.** О максимальных подалгебрах алгебр рекурсивных функций // Кибернетика. 1978. № 6. С. 123–125.
3. **Гаврилов Г. П.** О функциональной полноте в счётнозначной логике // Пробл. кибернетики. 1965. Вып. 15. С. 5–64.
4. **Гжегорчик А.** Некоторые классы рекурсивных функций // Проблемы математической логики. М.: Мир, 1970. С. 9–49.
5. **Козьминых В. В.** Об одноместных примитивно-рекурсивных функциях // Алгебра и логика. 1968. Т. 7, № 1. С. 75–90.
6. **Марченков С. С.** Об одном методе построения максимальных подалгебр в алгебрах общерекурсивных функций // Алгебра и логика. 1978. Т. 17, № 5. С. 581–595.
7. **Марченков С. С.** О мощности множества предполных классов в некоторых классах функций счётнозначной логики // Пробл. кибернетики. 1981. Вып. 38. С. 109–116.
8. **Марченков С. С.** Элементарные рекурсивные функции. М.: МЦНМО, 2003. 112 с.
9. **Марченков С. С.** Функциональные системы с операцией суперпозиции. М.: Физматлит, 2004. 103 с.
10. **Михеев В. Л.** Об одном классе алгебр примитивно-рекурсивных функций // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 1. С. 143–156.
11. **Ричи Р. В.** Классы предсказуемо вычислимых функций // Проблемы математической логики. М.: Мир, 1970. С. 50–93.
12. **Розинас М. Г.** Алгебра многоместных примитивно-рекурсивных функций // Уч. записки Иванов. гос. пед. ин-та. 1972. Т. 117. С. 95–111.
13. **Соколов В. А.** О максимальных подалгебрах алгебры всех частично рекурсивных функций // Кибернетика. 1972. № 1. С. 70–73.

Марченков Сергей Серафимович

Статья поступила
3 декабря 2015 г.

Исправленный вариант —
26 апреля 2016 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
July–August 2016. Volume 23, No. 3. P. 81–92

UDC 519.716 DOI: 10.17377/daio.2016.23.518

ON MAXIMAL SUBALGEBRAS OF THE ALGEBRAS OF UNARY RECURSIVE FUNCTIONS

S. S. Marchenkov[1]
[1]Moscow State University,
1 Leninskie gory, 119991 Moscow, Russia
e-mail: ssmarchen@yandex.ru

Abstract. We consider the algebras of unary functions with supports in countable primitively recursively closed classes and composition operation. Each algebra of this type is proved to have continuum many maximal subalgebras including the set of all unary functions of the class $\mathcal{E}^2$ of the Grzegorczyk hierarchy. Bibliogr. 13.

Keywords: maximal subalgebra, unary recursive function.

REFERENCES

1. S. A. Berezin, An algebra of unate primitive recursive functions with iteration operation of general form, *Kibern.,* No. 3, 12–19, 1976. Translated in *Cybern.,* **12**, No. 3, 346–353, 1976.

2. S. A. Berezin, Maximal subalgebras of recursive function algebras, *Kibern.,* No. 6, 123–125, 1978. Translated in *Cybern.,* **14**, No. 6, 935–938, 1978.

3. G. P. Gavrilov, On functional completeness in a countable-valued logic, in A. A. Lyapunov, ed., *Problemy kibernetiki* (Problems of Cybernetics), Vol. 15, pp. 5–64, Nauka, Moscow, 1965.

4. A. Grzegorczyk, Some classes of recursive functions, in *Rozprawy Matematyczne* (Mathematical Apparatus), Vol. 4, Pol. Tow. Mat., Warsaw, 1953. Translated in *Problemy matematicheskoi logiki* (Problems of Mathematical Logic), pp. 9–49, Mir, Moscow, 1970.

5. V. V. Koz'minykh, On primitive recursive functions of a single argument, *Algebra Logika,* **7**, No. 1, 75–90, 1968. Translated in *Algebra Logic,* **7**, No. 1, 44–53, 1968.

6. S. S. Marchenkov, A method for constructing maximal subalgebras of algebras of general recursive functions, *Algebra Logika,* **17**, No. 5, 581–595, 1978. Translated in *Algebra Logic,* **17**, No. 5, 383–392, 1978.

7. S. S. Marchenkov, On cardinality of the set of precomplete classes in some classes of a countable-valued logic, in S. V. Yablonskii, ed., *Problemy kibernetiki* (Problems of Cybernetics), Vol. 38, pp. 109–116, Nauka, Moscow, 1981.

8. **S. S. Marchenkov,** *Elementarnye rekursivnye funktsii* (Elementary Recursive Functions), MTsNMO, Moscow, 2003.

9. **S. S. Marchenkov,** *Funktsional'nye sistemy s operatsiei superpozitsii* (Functional Systems with Superposition Operation), FIZMATLIT, Moscow, 2004.

10. **V. L. Mikheev,** Class of algebras of primitive recursive functions, *Mat. Zametki,* **14**, No. 1, 143–156, 1973. Translated in *Math. Notes Acad. Sci. USSR,* **14**, No. 1, 638–645, 1981.

11. **R. W. Ritchie,** Classes of predictably computable functions, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **106**, No. 1, 139–173, 1963. Translated in *Problemy matematicheskoi logiki* (Problems of Mathematical Logic), pp. 50–93, Mir, Moscow, 1970.

12. **M. G. Rozinas,** An algebra of many-placed primitive recursive functions, in *Uchenye zapiski Ivanovskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo instituta* (Scientific Notes of Ivanovo State Pedagogical Institute), Vol. 117, pp. 95–111, ISPI, Ivanovo, 1972.

13. **V. A. Sokolov,** Maximal subalgebras of the algebra of all partially recursive functions, *Kibern.,* No. 1, 70–73, 1972. Translated in *Cybern.,* **8**, No. 1, 76–79, 1972.

Sergei S. Marchenkov

Received
3 December 2015
Revised
26 April 2016