ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2016. Том 23, № 4. С. 35–101

УДК 519.1 DOI: 10.17377/daio.2016.23.517

ПЕРМАНЕНТЫ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ: СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ *)

А. А. Тараненко[1]
[1]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия,
e-mail: taattg@mail.ru

Аннотация. *Перманентом многомерной матрицы* называется сумма по всем диагоналям произведений элементов, стоящих на диагоналях. В этом обзоре рассмотрены основные свойства многомерного перманента, достаточные условия его положительности, известные верхние оценки и особенности перманентов полистохастических матриц. Установлено, что число различных комбинаторных объектов может быть выражено с помощью многомерного перманента. Отдельное внимание уделено числу 1-факторов в униформных гиперграфах и числу трансверсалей в латинских гиперкубах. Табл. 1, библиогр. 63.

Ключевые слова: перманент, многомерная матрица, стохастическая матрица, полистохастическая матрица, трансверсаль латинского гиперкуба, 1-фактор в униформном гиперграфе.

Введение

Считается, что понятие перманента двумерных матриц введено Коши в 1812 г. в [16], а значит, история перманентов насчитывает более двухсот лет. Свойства перманентов хорошо изучены, и для них обнаружены разнообразные применения в теории графов, в теории комбинаторных структур и даже в физике. Наиболее известно использование перманента для подсчёта числа совершенных паросочетаний в двудольном графе. Исследованию перманентов посвящено множество работ, причём в значительной их части рассматриваются перманенты дважды стохастических матриц. Максимально полное для своего времени описание свойств перманента приведено в [4].

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14–11–00555) (разделы 5–7) и Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса» (разделы 1–4).

Разными авторами неоднократно предпринимались попытки обобщить понятие перманента на многомерные матрицы, но не выполнено ни одного систематического исследования многомерного перманента и его приложений. Как следствие, в этой области пока не сложилась система единых обозначений и терминологии. В данной работе попытаемся изложить известные на текущий момент свойства многомерных перманентов, опишем возможные способы применения перманентов к различным задачам дискретной математики и обозначим основные проблемы в теории многомерных перманентов.

Одно из первых обобщений перманента на многомерный случай предложено Кэли в 1849 г. [17]. Затем упоминание перманента многомерной матрицы и его свойств встречается в книге Мюира [47], где многомерный перманент возникает как одно из возможных обобщений детерминанта. По аналогичным соображениям многомерные перманенты возникают в книгах Н. П. Соколова [6,7], в которых помимо определений приводятся несколько простых свойств.

До последнего времени статьи Доу и Гибсона [24, 25], опубликованные в 1980-е гг., были единственными работами, в которых многомерный перманент являлся основным объектом исследования. В этих работах приведены доказательства некоторых простых, но важных свойств перманентов многомерных матриц. В частности, отмечен тот факт, что количество 1-факторов в простом d-дольном униформном гиперграфе совпадает с перманентом d-мерной матрицы смежности его долей.

Недавно для перманентов многомерных матриц обнаружены применения, которые помогли решить несколько комбинаторных задач. Например, с помощью многомерных перманентов автором этой работы существенно улучшена верхняя оценка на число трансверсалей в латинских квадратах [58], а Линиалом и Лурией получена верхняя оценка на количество латинских гиперкубов [39].

По-видимому, множество возможных приложений многомерных перманентов существенно богаче, чем множество приложений перманентов двумерных матриц. Многомерные перманенты тесно связаны с такими объектами, как трансверсали в латинских гиперкубах, 1-факторы в гиперграфах, замощения транзитивных графов, МДР-коды и комбинаторные дизайны. Многие результаты относительно данных объектов можно переформулировать в терминах перманентов многомерных матриц, а многомерные перманенты, в свою очередь, могут помочь в решении некоторых проблем для таких объектов. Как и в случае двумерных матриц, многомерные перманенты находят свое применение в физике для

описания взаимодействий элементарных частиц, о чём свидетельствует работа [60].

Часто матрицы, перманенты которых возникают в различных приложениях, имеют специальную структуру. Обычно это неотрицательные матрицы, у которых ненулевые элементы распределены по граням регулярным образом. Поэтому актуально отдельное рассмотрение перманентов многомерных матриц, у которых фиксированы суммы элементов по граням некоторой размерности. Такие классы матриц являются в некотором роде обобщением дважды стохастических матриц на многомерный случай, и для одного из таких классов, а именно для полистохастических матриц, в этой работе приведён ряд интересных свойств.

Естественно предположить, что задачи вычисления и проверки положительности перманента многомерных матриц не проще аналогичных двумерных проблем. Как известно, задача вычисления перманента двумерных (0,1)-матриц лежит в классе $\#P$-полных задач, т. е. является одной из наиболее сложных вычислительных проблем. Но для проверки положительности двумерного перманента существует несложный полиномиальный алгоритм, основанный на теореме Кёнига — Фробениуса. В многомерном случае уже задача распознавания положительности перманента трёхмерных (0,1)-матриц NP-полна, так как она эквивалентна NP-полной задаче о максимальном 1-факторе в 3-униформном 3-дольном гиперграфе. Тем не менее, для некоторых многомерных матриц предложены полиномиальные алгоритмы вычисления их перманента [19].

В этой работе, помимо обзора известных результатов, приводятся и несколько новых. Наиболее важными среди них являются конструкции многомерных матриц, перманент которых выражает число некоторых комбинаторных объектов, конструкция матриц, показывающая, что минимум перманента полистохастических матриц не достигается на равномерной матрице, теорема о положительности перманента всех полистохастических матриц порядка 3, теорема о чётности числа трансверсалей в латинских гиперкубах чётного порядка, оценки и точные значения числа трансверсалей в некоторых латинских гиперкубах.

Опишем кратко структуру работы.

В разд. 1 определены основные понятия, такие как многомерная матрица, грани многомерной матрицы и их направления, перманент многомерной матрицы, неотрицательные и полистохастические матрицы, рассмотрены простейшие свойства многомерных перманентов и вычислены перманенты нескольких важных примеров матриц.

В разд. 2 исследуется связь многомерного перманента с числом раз-

личных комбинаторных объектов. Приводятся конструкции многомерных матриц, перманенты которых позволяют оценить количество трансверсалей в латинских гиперкубах, количество МДР-кодов и латинских гиперкубов, количество дизайнов Штейнера, А-дизайнов и Н-дизайнов, число замощений транзитивных графов и абелевых групп, количество совершенных кодов в булевом кубе и число разбиений Бёрча. Многие из этих конструкций являются следствием того, что число 1-факторов в любом d-дольном гиперграфе равно перманенту d-мерной матрицы смежности его долей. Также в этом разделе указана связь между перманентом матрицы смежности произвольного униформного гиперграфа и числом 1-факторов в нём и приведено несколько других возможных способов обобщения понятия перманента на многомерный случай.

В разд. 3 рассмотрим наиболее важные результаты теории перманентов двумерных матриц: теоремы Брэгмана и Схрейвера об оценках перманента (0,1)-матриц, критерий положительности перманента Кёнига — Фробениуса, гипотезу Ван дер Вардена и её доказательства, теорему Биркгофа для дважды стохастических матриц.

В разд. 4 речь пойдёт о верхних оценках на перманент многомерных (0,1)-матриц в терминах числа единиц в гранях, причём для полистохастических матриц будет приведена асимптотически достижимая верхняя оценка перманента.

Остальные свойства полистохастических матриц изучены в разд. 5. В нём рассмотрим, как обобщаются теоремы о перманенте дважды стохастических матриц при переходе к матрицам большей размерности, приведём несколько конструкций полистохастических матриц и найдём свойства полистохастических матриц специального вида. Кроме того, будут описаны другие способы обобщения понятия стохастичности на многомерные матрицы и их свойства.

В разд. 6 продолжится исследование связи между числом трансверсалей в латинских гиперкубах и перманентами многомерных матриц. Здесь приведём точные значения и оценки на число трансверсалей некоторых латинских гиперкубов, асимптотически достижимую верхнюю оценку числа трансверсалей в латинских гиперкубах и докажем, что любой латинский гиперкуб чётного порядка имеет чётное число трансверсалей.

В разд. 7 перечислено несколько нетривиальных достаточных условий положительности перманента многомерных матриц. Большинство из них получается как следствие довольно сложных теорем о достаточных условиях существования 1-факторов в гиперграфах.

В разд. 8 будут обозначены наиболее важные проблемы и задачи

в теории многомерных перманентов.

1. Определения, простейшие свойства и примеры

Пусть $n, d \in \mathbb{N}$ и $I_n^d = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \mid \alpha_i \in \{1, \ldots, n\}\}$ — множество индексов. *d-Мерной матрицей A порядка n* будем называть массив чисел $(a_\alpha)_{\alpha \in I_n^d}$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$.

Для $k \in \{0, \ldots, d\}$ *k-мерной гранью* матрицы A называется такая k-мерная подматрица матрицы A, у которой зафиксированы значения $d-k$ координат, а остальные k координат пробегают все n значений. $(d-1)$-Мерную грань d-мерной матрицы будем называть *гипергранью*. *Направлением* Θ грани матрицы назовём (0,1)-вектор длины d такой, что если в данной грани i-я координата переменная, то соответствующая ей координата в векторе Θ равна 0, а если она фиксирована, то в векторе Θ i-я координата равна 1.

Будем говорить, что две многомерные матрицы *эквивалентны*, если их можно перевести друг в друга с помощью перестановок координат (транспонирования) и перестановок гиперграней внутри одного направления.

Для d-мерной матрицы A порядка n и индекса $\alpha \in I_n^d$ *минором элемента a_α* называется d-мерная матрица $(A|\alpha)$ порядка $n-1$, которая получается из A вычеркиванием всех элементов, лежащих с a_α в одной гиперграни. Иначе говоря, $(A|\alpha)$ строится удалением из матрицы A элементов a_β таких, что $\alpha_i = \beta_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Пусть A — произвольная d-мерная матрица порядка n. Обозначим через $D(A)$ множество всех *диагоналей* матрицы A:

$$D(A) = \left\{(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \mid \alpha^i \in I_n^d,\ \forall i \neq j\ \rho(\alpha^i, \alpha^j) = d\right\},$$

где ρ — расстояние Хэмминга (количество позиций, в которых два вектора различаются). Другими словами, диагональ — набор из n индексов матрицы такой, что каждая гипергрань содержит ровно один индекс. *Перманентом* матрицы A называется величина

$$\mathrm{per} A = \sum_{p \in D(A)} \prod_{\alpha \in p} a_\alpha.$$

Определим различные классы многомерных матриц.

Матрицы, у которых все элементы равны нулю или единице, будем для краткости называть (0,1)-матрицами. *Диагональная* матрица — (0,1)-матрица, у которой индексы единичных элементов образуют диагональ.

Матрица A называется *неотрицательной*, если $a_\alpha \geqslant 0$ при $\alpha \in I_n^d$. Почти все рассматриваемые в этой работе матрицы неотрицательны. *Носителем* матрицы будем называть множество индексов её ненулевых элементов.

Неотрицательная двумерная матрица такая, что сумма элементов в каждой строке и каждом столбце равна единице, называется *дважды стохастической*. Множество дважды стохастических матриц порядка n обозначается через Ω_n. Перманенты дважды стохастических матриц являются наиболее хорошо изученными объектами в теории двумерных перманентов.

Существует несколько способов обобщить понятие дважды стохастичности на многомерные матрицы. В качестве основного будем рассматривать следующее определение. Неотрицательную многомерную матрицу назовём *полистохастической*, если сумма элементов в любой её одномерной грани равна единице. Заметим, что любая двумерная грань полистохастической матрицы будет дважды стохастической матрицей. Множество всех d-мерных полистохастических матриц порядка n обозначим через Ω_n^d.

Многомерную (0,1)-матрицу назовём *транзитивной*, если с помощью перестановок координат и перестановок гиперграней внутри одного направления, сохраняющих структуру носителя матрицы, любой единичный элемент можно перевести в любой другой единичный элемент. Если матрица транзитивна, то все её гиперграни имеют одинаковое количество единиц.

1.1. Простейшие свойства перманентов многомерных матриц.

Свойство 1. *Перманенты эквивалентных матриц совпадают.*

Свойство 2. *Перманент является линейной функцией относительно гиперграней матрицы: при умножении любой гиперграни матрицы на число c перманент также умножатся на c, сумма перманентов матриц, отличающихся лишь одной гипергранью, равна перманенту матрицы, у которой эти гиперграни просуммированы.*

Свойство 3. *Для многомерных перманентов верен аналог разложения Лапласа: если Γ — гипергрань d-мерной матрицы A порядка n, то*

$$\mathrm{per} A = \sum_{a_\alpha \in \Gamma} a_\alpha \,\mathrm{per}(A|\alpha).$$

Свойство 4. *Пусть A и B — неотрицательные d-мерные матрицы*

порядка n такие, что для любого $\alpha \in I_n^d$ элемент b_α меньше или равен a_α. Тогда $\mathrm{per}B \leqslant \mathrm{per}A$.

Свойство 5. *Перманент любой транзитивной* $(0,1)$*-матрицы кратен числу ненулевых элементов в гипергранях.*

Доказательство. Так как любой единичный элемент транзитивной матрицы можно перевести в любой другой единичный элемент преобразованиями, не меняющими перманента матрицы, перманенты миноров всех единичных элементов одинаковы. По свойству 3 перманент матрицы кратен мощности носителя гиперграни. Свойство 5 доказано.

Свойство 6. *Для положительности перманента неотрицательной d-мерной матрицы порядка n необходимо, чтобы для любой её нулевой подматрицы, имеющей габариты $x_1 \times \cdots \times x_d$, выполнялось условие*

$$\sum_{i=1}^{d} x_i \leqslant (d-1)n.$$

Равенство достигается на диагональной матрице.

Доказательство. Заметим, что если перманент матрицы положителен, то существует множество из n ненулевых элементов, протыкающее все n гиперграней одного направления. Рассмотрим нулевую подматрицу с габаритами $x_1 \times \cdots \times x_d$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, d$ число гиперграней i-го направления, непересекающихся с этой подматрицей, равно $n - x_i$.

Если существует нулевая подматрица такая, что $\sum\limits_{i=1}^{d}(n - x_i) < n$, то все ненулевые элементы матрицы можно покрыть менее чем n гипергранями, что противоречит положительности перманента. Свойство 6 доказано.

Свойство 7. *Если d-мерная* $(0,1)$*-матрица A порядка n содержит ровно t нулей, то*

$$\mathrm{per}A \geqslant (n^{d-1} - t)(n-1)!^{d-1}.$$

Доказательство. Это свойство есть следствие того, что через каждый элемент d-мерной матрицы порядка n проходит ровно $(n-1)!^{d-1}$ диагоналей. Свойство 7 доказано.

Свойство 8. *Перманент многомерной матрицы можно выразить как сумму перманентов матриц меньшей размерности следующим образом.*

Пусть A — d-мерная матрица порядка n и $1 \leqslant k \leqslant d-2$. Зафиксируем направление k-мерных граней и занумеруем все грани этого направле-

ния $(d-k)$-мерными индексами. Определим множество Σ как множество отображений $\sigma\colon \{1,\dots,n\} \to I_n^{d-k}$ таких, что $(\sigma(1),\dots,\sigma(n))$ — диагональ в $(d-k)$-мерной матрице. Тогда

$$\mathrm{per}A = \sum_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{per}A_\sigma,$$

где A_σ — $(k+1)$-мерные матрицы порядка n, i-я гипергрань которых есть $\sigma(i)$-я k-мерная грань матрицы A.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что k-мерные грани матрицы A задаются фиксацией значений первых $d-k$ координат. По определению

$$\mathrm{per}A = \sum_{p\in D(A)} \prod_{\alpha\in p} a_\alpha.$$

Разобьём всё множество диагоналей $D(A)$ матрицы A на подмножества

$$D_\sigma(A) = \{p \in D(A) \mid p = ((\sigma(1), *, \dots, *), \dots, (\sigma(n), *, \dots, *))\},$$

где на месте $*$ могут стоять произвольные элементы множества $\{1,\dots,n\}$. Перегруппируем слагаемые в сумме, определяющей перманент:

$$\mathrm{per}A = \sum_{\sigma\in\Sigma} \sum_{p\in D_\sigma(A)} \prod_{\alpha\in p} a_\alpha.$$

Остаётся заметить, что для фиксированного σ величина $\sum\limits_{p\in D_\sigma(A)} \prod\limits_{\alpha\in p} a_\alpha$ равна перманенту матрицы A_σ. Свойство 8 доказано.

Свойство 9. *Пусть A — неотрицательная d-мерная матрица порядка n, r_β — сумма элементов матрицы A в одномерных гранях некоторого направления, $\beta \in I_n^{d-1}$. Рассмотрим $(d-1)$-мерную матрицу B порядка n с элементами r_β. Тогда*

$$\mathrm{per}A \leqslant \mathrm{per}B.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что известны суммы в таких одномерных гранях матрицы A, у которых фиксированы значения всех координат кроме последней. По определению

$$\mathrm{per}B = \sum_{p\in D(B)} \prod_{\beta\in p} r_\beta = \sum_{p\in D(B)} \prod_{\beta\in p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{\beta,i}\right).$$

После раскрытия скобок это выражение можно переписать в виде

$$\mathrm{per} B = \sum_{p \in D(B)} \Big(\prod_{i=1,\dots,n,\ \beta_i \in p} a_{\beta_i, i} + R(p) \Big) = \mathrm{per} A + \sum_{p \in D(B)} R(p),$$

где слагаемое $R(p)$ включает в себя слагаемые вида $\prod\limits_{i=1,\dots,n,\ \beta_i \in p} a_{\beta_i, k_i}$, в которых числа k_i могут повторяться.

Так как матрица A неотрицательна, $\sum\limits_{p \in D(B)} R(p)$ не меньше нуля, а значит, $\mathrm{per} B \geqslant \mathrm{per} A$. Свойство 9 доказано.

1.2. Примеры.

Пример 1. *Равномерной матрицей* J_n^d назовём d-мерную матрицу порядка n, каждый элемент которой равен $1/n$. Очевидно, что J_n^d — полистохастическая матрица.

Число диагоналей в любой d-мерной матрице порядка n равно $n!^{d-1}$. По свойству 2 перманент равномерной матрицы в n^n раз меньше числа всех диагоналей. Следовательно,

$$\mathrm{per} J_n^d = \frac{n!^{d-1}}{n^n}.$$

Пример 2. Пусть E_n^d — d-мерная матрица порядка n, каждый элемент которой равен единице, D_n^d — диагональная d-мерная матрица порядка n. Найдём перманент матрицы $E_n^d - D_n^d$ с помощью принципа включения-исключения: из множества всех диагоналей матрицы E_n^d исключим диагонали, которые проходят через один из элементов единичной диагонали D_n^d, затем добавим диагонали, проходящие ровно через два элемента этой диагонали, и т. д. Таким образом,

$$\mathrm{per}\big(E_n^d - D_n^d\big) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (n-i)!^{d-1}.$$

Эта формула впервые получена в [25].

Пример 3. Найдём перманент всех полистохастических матриц порядка 2. Так как сумма элементов в любой одномерной грани полистохастических матриц равна единице, элементы таких матриц порядка 2 могут принимать лишь два значения. Пусть $A_2^d(x)$ — d-мерная матрица порядка 2, элемент a_α которой равен x, если индекс α содержит чётное число единиц, и a_α равен $1-x$, если α содержит нечётное число единиц, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Любая диагональ матрицы $A_2^d(x)$ есть набор из двух индексов, которые переводятся друг в друга заменой в каждой позиции единицы двойкой и наоборот.

Если размерность d чётна, то число единиц в индексах из одной диагонали имеет одинаковую чётность, а значит, на любой диагонали матрицы $A_2^d(x)$ стоят два одинаковых элемента. В силу симметрии половина диагоналей этой матрицы вносит в перманент вклад, равный x^2, а другая половина — $(1-x)^2$. Следовательно, для чётной размерности имеем

$$\mathrm{per} A_2^d(x) = 2^{d-2}(x^2 + (1-x)^2).$$

Максимум перманента чётномерных матриц $A_2^d(x)$ равен 2^{d-2} и достигается на (0,1)-матрице, а минимум находится на равномерной матрице и равен 2^{d-3}.

Если размерность d нечётна, то число единиц в индексах из одной диагонали имеет разную чётность. Следовательно, диагональ $A_2^d(x)$ содержит как элемент x, так и $1-x$. Поэтому для нечётной размерности имеем

$$\mathrm{per} A_2^d(x) = 2^{d-1}x(1-x).$$

Максимум перманента нечётномерных матриц $A_2^d(x)$ достигается на равномерной матрице и равен 2^{d-3}, а минимум находится на (0,1)-матрице и равен нулю.

Пример 4. Построим множество многомерных (0,1)-матриц с нулевым перманентом, у которых половина элементов любой одномерной грани равна единице. Этот пример ранее приводился в [9, 14].

Пусть d нечётно и $n \equiv 2 \mod 4$. Рассмотрим d-мерную (0,1)-матрицу A порядка n такую, что её элемент a_α равен единице тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i$ чётна. Заметим, что число нулей в любой одномерной грани матрицы A равно числу единиц.

Предположим, что перманент матрицы A больше нуля и $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ — единичная диагональ в матрице A. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^j.$$

С одной стороны, S чётно, так как по определению матрицы A величина $\sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i^j$ чётна для любого $j = 1, \ldots, n$. С другой стороны, поскольку все α_i^j

различны для фиксированного i, имеем

$$S = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j = \sum_{i=1}^{d} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{dn(n+1)}{2}$$

и S нечётно; противоречие.

2. Применения многомерного перманента в комбинаторике

В этом разделе опишем конструкции многомерных матриц, перманент которых связан с числом различных комбинаторных объектов. Отношение между перманентом многомерных матриц и трансверсалями в латинских гиперкубах будет более подробно рассмотрено в разд. 6, а в разд. 7 перечислено несколько утверждений о перманентах, полученных как следствие теорем о гиперграфах.

2.1. 1-Факторы в d-униформных гиперграфах. Исследуем связь многомерного перманента с 1-факторами в d-униформных гиперграфах и выразим с её помощью число некоторых комбинаторных объектов. Перед этим напомним необходимые определения, касающиеся гиперграфов.

Как известно, пара $H = (X, W)$ называется *гиперграфом* с множествами вершин X и гиперрёбер W, где каждое гиперребро $w \in W$ — некоторое подмножество вершин X. Гиперграф H называется *d-униформным*, если каждое его гиперребро состоит ровно из d вершин.

Степень вершины $x \in X$ в гиперграфе H — число гиперрёбер $w \in W$, содержащих x. Гиперграф называется *регулярным*, если все его вершины имеют одинаковую степень.

Каждому гиперграфу $H(X, W)$ можно однозначно поставить в соответствие двудольный граф $B(X, W; E)$, одна доля которого — множество вершин X гиперграфа H, а вторая доля — множество его гиперрёбер W. Вершины x и w графа B соединены ребром, если вершина x принадлежит гиперребру w в гиперграфе H. Такой граф $B(H) = B(X, W; E)$ будем называть *двудольным представлением* гиперграфа H.

Для гиперграфа $H(X, W)$ *двойственный гиперграф* $H^*(W, H)$ — гиперграф, в котором множество вершин совпадает с множеством гиперрёбер H, множество гиперрёбер H^* соответствует множеству вершин H, а вершина w принадлежит гиперребру x в гиперграфе H^*, если гиперребро w содержит вершину x в гиперграфе H.

Понятия регулярности и униформности двойственны в следующем смысле: если гиперграф H d-регулярный, то двойственный к нему гиперграф H^* будет d-униформным, и наоборот, если H — d-униформный

гиперграф, то гиперграф H^* d-регулярный. Легко видеть, что если гиперграф H является d-униформным, то степень любой вершины w из доли W в его двудольном представлении B равна d, а если d-регулярным, то степень любой вершины x из доли X в B равна d.

Ориентацией гиперребра $w \in W$ в гиперграфе H назовём некое упорядочение вершин гиперребра. Гиперграф H является *ориентированным*, если у каждого его гиперребра выбрана ориентация. Ориентация гиперграфа H называется *правильной*, если ни одна вершина не находится на одной и той же позиции в различных ориентациях гиперрёбер H.

k-*Фактором* в гиперграфе H назовём k-регулярный подгиперграф, покрывающий всё множество вершин H. Обозначим через $\varphi(H)$ число 1-факторов в гиперграфе H. Заметим, что для существования хотя бы одного 1-фактора в d-униформном гиперграфе H на n вершинах необходимо, чтобы n было кратно d. 1-Факторы в гиперграфах являются естественным обобщением понятия совершенного паросочетания в графах.

Гиперграф H называется *простым*, если он не содержит кратных гиперрёбер. *Матрицей смежности* $A(H)$ простого d-униформного гиперграфа H на n вершинах назовём такую d-мерную (0,1)-матрицу порядка n, что её элемент a_α равен единице тогда и только тогда, когда вершины с номерами из α образуют гиперребро гиперграфа H.

Данное определение матрицы смежности гиперграфа обобщает понятие матрицы смежности графа. Несложно видеть, что перманент матрицы смежности любого графа равен числу остовных правильно ориентированных 2-регулярных графов, составленных из рёбер этого графа. В свою очередь, перманент матрицы смежности d-униформного гиперграфа равен количеству остовных правильно ориентированных d-регулярных гиперграфов, построенных с помощью его гиперрёбер (каждое гиперребро можно использовать несколько раз).

Известно, что количество единиц в строке или столбце матрицы смежности графа равно степени соответствующей вершины. Для матриц смежности гиперграфов аналогичное свойство верно по отношению к гиперграням: число единиц в i-й гиперграни матрицы $A(H)$ равно величине $(d-1)!\deg(x_i)$, где $\deg(x_i)$ — степень вершины x_i.

Двойственными объектами к 1-факторам в d-униформных гиперграфах являются трансверсали в d-регулярных гиперграфах. *Трансверсалью* d-регулярного гиперграфа H называется набор вершин, однократно протыкающий каждое гиперребро. Трансверсалям в гиперграфе H взаимно однозначно соответствуют 1-факторы в двойственном гиперграфе

фе H^*.

Вершина $x \in X$ в гиперграфе H называется *кратной*, если существует вершина $y \in X$, отличная от x, такая, что наборы гиперрёбер, инцидентных вершинам x и y, совпадают.

Пусть H — d-регулярный гиперграф без кратных вершин с n гиперрёбрами. Тогда для гиперграфа H можно построить *матрицу смежности гиперрёбер* $A^*(H)$, которая будет d-мерной (0,1)-матрицей порядка n такой, что её элемент a_α равен единице, если в пересечении гиперрёбер с номерами из α лежит ровно одна вершина гиперграфа H. Заметим, что матрица смежности гиперрёбер гиперграфа H является матрицей смежности вершин для двойственного гиперграфа H^*, и наоборот:

$$A^*(H) = A(H^*), \quad A(H) = A^*(H^*).$$

Таким образом, все нижеперечисленные отношения между количеством 1-факторов в гиперграфе и перманентом его матрицы смежности можно переформулировать в терминах числа его трансверсалей и перманента матрицы смежности двойственного гиперграфа.

Перейдём к оценкам числа 1-факторов в гиперграфах с помощью многомерного перманента.

Во-первых, число 1-факторов в любом d-униформном гиперграфе H не превосходит перманента его матрицы смежности. В самом деле, пусть набор гиперрёбер $e_1, \dots e_{n/d}$ — 1-фактор в гиперграфе H. Для каждого из гиперрёбер зафиксируем некоторую ориентацию α^i, $i = 1, \dots, n/d$. Затем циклическими сдвигами вершин в каждой ориентации построим упорядоченные наборы $\alpha^1, \dots, \alpha^n$. По определению матрицы смежности $A(H)$ получим, что её элемент a_{α^i} равен единице для любого $i = 1, \dots, n$. Расстояние Хэмминга между различными наборами α^i и α^j равно d по построению. Следовательно, наборы $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ образуют единичную диагональ в матрице смежности $A(H)$, а значит, $\varphi(H) \leqslant \mathrm{per} A(H)$.

Отсюда вытекает, что перманент матриц смежности d-униформных гиперграфов, содержащих 1-фактор, всегда положителен. В разд. 7 перечислено несколько классов матриц, положительность перманента которых следует из существования 1-фактора в соответствующем гиперграфе.

Алоном и Фридлендом в [10] для графов доказано существенно более сильное неравенство между числом 1-факторов и перманентом матрицы смежности, которое достигается на двудольном графе. Этот результат также можно найти в [27].

Теорема 1. *Пусть G — простой граф на n вершинах. Тогда*

$$\varphi(G) \leqslant (\mathrm{per} A(G))^{1/2}.$$

Аналогичное неравенство для гиперграфов доказано в [59].

Теорема 2. *Пусть H — простой d-униформный гиперграф на n вершинах, причём d — делитель n, а функция $\mu(n,d)$ такая, что*

$$\mu(n,d) = \frac{d!^{2n}}{d^{dn} d!^{n/d}}$$

для всех $d \geqslant 4$. Тогда для числа 1-факторов в гиперграфе H верна оценка

$$\varphi(H) \leqslant \left(\frac{\mathrm{per} A(H)}{\mu(n,d)} \right)^{1/d}.$$

Так как количество единиц в гипергранях матрицы смежности связано со степенями вершин гиперграфа, оценивая её перманент через суммы элементов в гипергранях, можно ограничить число 1-факторов с помощью степеней вершин. Например, в [10] для оценки перманента матриц смежности графов используется теорема Брэгмана [2] (теорема 7) и доказывается

Теорема 3. *Пусть $G = (V, E)$ — простой граф, d_i — степень вершины $v_i \in V$. Тогда число 1-факторов в графе G удовлетворяет неравенству*

$$\varphi(G) \leqslant \prod_{i=1}^{n} d_i!^{1/2d_i}.$$

Этот результат ранее получен Каном и Ловасом, но их доказательство не опубликовано, а в [21] он доказывается методом энтропии.

Применив в теореме 2 тривиальную верхнюю оценку на перманент многомерных матриц из разд. 4, получим

Следствие 1 [59]. *Пусть $H = (X, W)$ — простой d-униформный гиперграф и r_i — степени вершин $x_i \in X$. Тогда число 1-факторов в гиперграфе H удовлетворяет неравенству*

$$\varphi(H) \leqslant \left(\frac{(d-1)!^n}{\mu(n,d)} \prod_{i=1}^{n} r_i \right)^{1/d}.$$

В заключение приведём список объектов, количество которых естественным образом выражается как число 1-факторов в гиперграфе специального вида, а значит, для их оценки могут быть использованы многомерные перманенты.

1. *Системой Штейнера с параметрами* t, k, n $(t < k < n)$ называется набор k-элементных блоков в некотором n-элементном множестве X такой, что любое t-элементное подмножество множества X содержится ровно в одном блоке. Пусть $S(t, k, n)$ — количество систем Штейнера с параметрами t, k, n. Для подсчёта этого числа рассмотрим D-униформный гиперграф $H_S(t, k, n)$ на N вершинах, где $D = C_k^t$, а $N = C_n^t$. Вершинами $H_S(t, k, n)$ являются t-элементные подмножества в n-элементном множестве X, а гиперребро состоит из D вершин таких, что их объединение даёт k-элементное множество. Тогда число 1-факторов в $H_S(t, k, n)$ совпадает с числом систем Штейнера:

$$\varphi(H_S(t, k, n)) = S(t, k, n).$$

Проблеме существования систем Штейнера с заданными параметрами и оценке их числа посвящено немало работ. Например, верхняя оценка на число троек Штейнера доказана в [38].

2. Рассмотрим граф $G(V, E)$ такой, что все его максимальные клики имеют мощность d. Набор максимальных клик назовём *совершенным кликосочетанием*, если объединение этих клик однократно покрывает все вершины графа. Обозначим через $\mathrm{PCM}(G)$ количество совершенных кликосочетаний в графе G. Построим по графу G d-униформный гиперграф $H_{PCM}(G)$ такой, что вершины этого гиперграфа являются вершинами графа G, а гиперрёбра $H_{PCM}(G)$ соответствуют максимальным кликам в графе G. Легко видеть, что число 1-факторов в $H_{PCM}(G)$ равно числу совершенных кликосочетаний в G:

$$\varphi(H_{PCM}(G)) = \mathrm{PCM}(G).$$

3. Пусть X — множество из kd точек в пространстве $\mathbb{R}^{d-1}$, $k \geqslant 1$. Точка $p \in \mathbb{R}^{d-1}$ называется *точкой Бёрча* для множества X, если существует такое разбиение множества X на k подмножеств из d точек, что выпуклая оболочка каждого из k подмножеств содержит точку p. Разбиение множества X с таким свойством назовём *разбиением Бёрча* относительно точки p, а через $BP(X, p)$ обозначим количество разбиений Бёрча.

Построим d-униформный гиперграф $H_{BP}(X, p)$ для множества точек X и точки p в пространстве $\mathbb{R}^{d-1}$ так, что множество вершин этого гиперграфа есть множество точек X, и d точек объединены в гиперребро, если их выпуклая оболочка содержит точку p. Тогда число 1-факторов в гиперграфе $H_{BP}(X, p)$ равно количеству разбиений Бёрча множества X относительно точки p:

$$\varphi(H_{BP}(X, p)) = BP(X, p).$$

Некоторые результаты о количестве разбиений Бёрча изложены в [32].

2.2. 1-Факторы в d-дольном гиперграфе. В п. 2.1 получено, что число 1-факторов в любом d-униформном гиперграфе оценивается с помощью многомерного перманента. Покажем, что для d-дольных гиперграфов существует многомерная матрица такая, что её перманент в точности равен числу 1-факторов.

Гиперграф $H = (X, W)$ называется *d-дольным*, если множество его вершин может быть разделено на d подмножеств (долей) таких, что каждое гиперребро содержит ровно одну вершину из каждого подмножества. Очевидно, что любой d-дольный гиперграф является d-униформным. d-Дольный гиперграф называется *сбалансированным*, если все его доли равномощны.

d-Дольность гиперграфа $H(X, W)$ эквивалентна тому, что доля W его двудольного представления $B(X, W; E)$ разбивается на полусовершенные коды, где *полусовершенным кодом* в двудольном графе называем подмножество вершин в одной из его долей такое, что окрестности различных вершин из этого подмножества не пересекаются и объединение всех окрестностей в точности совпадает со второй долей графа.

Пусть H — d-дольный гиперграф с долями мощности n. *Матрицей смежности долей* $\widetilde{A}(H)$ гиперграфа H назовём такую d-мерную матрицу порядка n, что её элемент a_α равен кратности гиперребра $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ в гиперграфе H, где α_i — вершина из доли i. Таким образом, между неотрицательными целочисленными d-мерными матрицами и d-дольными сбалансированными гиперграфами есть взаимно однозначное соответствие, и, как несложно видеть, перманент матрицы смежности долей $\widetilde{A}(H)$ равен количеству 1-факторов в гиперграфе H. Соответствие между числом 1-факторов в простом d-дольном гиперграфе и перманентом многомерных (0,1)-матриц обнаружено Доу и Гибсоном в [25].

Как показано в п. 2.1, трансверсали являются двойственным понятием к 1-факторам в гиперграфе, а значит, для подходящих гиперграфов

можно построить многомерную матрицу такую, что её перманент равен количеству трансверсалей. Опишем эту конструкцию подробно.

Пусть H — δ-регулярный гиперграф, разбивающийся на непересекающиеся 1-факторы. Так как гиперграф H δ-регулярный, степень любой вершины x из доли X в его двудольном представлении B равна δ, а поскольку он дополнительно разбивается на 1-факторы, доля X его двудольного представления разбивается на полусовершенные коды.

Предположим, что каждый 1-фактор гиперграфа H содержит одинаковое количество гиперрёбер, и обозначим их число через η. *Матрицей смежности 1-факторов* назовём δ-мерную матрицу $\widetilde{A}^*(H)$ порядка η такую, что её элемент a_α равен количеству вершин в пересечении гиперрёбер α_i из i-го 1-фактора по всем $i = 1, \ldots, \delta$. Тогда перманент матрицы смежности 1-факторов $\widetilde{A}^*(H)$ равен количеству трансверсалей в гиперграфе H. Более того, каждой δ-мерной целочисленной матрице с неотрицательными элементами соответствует δ-регулярный гиперграф такой, что её перманент равен количеству трансверсалей в гиперграфе, и наоборот.

Существует немало комбинаторных объектов, число которых равно количеству 1-факторов в d-дольном сбалансированном гиперграфе специального вида, а значит, для оценки этого числа могут быть полезны многомерные перманенты. Наиболее важными среди таких объектов являются замощения транзитивных графов, МДР-коды, латинские квадраты и латинские гиперкубы. Завершим этот пункт описанием соответствующих конструкций многомерных матриц и гиперграфов.

1. Первая конструкция предложена в [1]. Пусть $G(V, E)$ — регулярный граф. Обозначим через $\mathrm{Aut}(G)$ группу автоморфизмов графа G (группу отображений вершин графа на себя, сохраняющих смежность). Граф G называется *транзитивным*, если группа $\mathrm{Aut}(G)$ транзитивно действует на множестве его вершин, т. е. для любых $u, v \in V$ существует автоморфизм $a \in \mathrm{Aut}(G)$ такой, что $u = a(v)$.

Выберем подмножество вершин S мощности d в регулярном транзитивном графе G и назовём его *плиткой*. Набор автоморфизмов $\{a_i\}_{i=1}^n$ называется *замощением графа G плиткой S*, если $a_i(S) \cap a_j(S) = \varnothing$ для всех $i \neq j$, и для каждой вершины $v \in V$ существует автоморфизм a_i такой, что v принадлежит $a_i(S)$. Обозначим через $T(G, S)$ количество замощений графа G плиткой S.

Построим d-униформный гиперграф $H_T(G, S)$, вершинами которого являются все вершины графа G, а каждое гиперребро есть множество вершин $a(S)$ для некоторого автоморфизма $a \in \mathrm{Aut}(G)$. Если $H_T(G, S)$

является d-дольным (т. е. если его вершины можно разбить на d групп мощности n так, что пересечение всех $a(S)$ с любой из этих групп непусто), то для него можно построить матрицу смежности долей $A_T(G,S)$, которая имеет размерность d и порядок n и перманент которой совпадет с количеством замощений графа G плиткой S:

$$\mathrm{per} A_T(G,S) = T(G,S).$$

Большинство перечисленных ниже конструкций являются частными случаями данной.

2. *Замощением* конечной абелевой группы $\langle R,+\rangle$ называется такая пара подмножеств (плиток) S и T, что $S+T=R$ и $|S||T|=|R|$. Обозначим через s мощность плитки S, а через $GT(R,S)$ — количество замощений группы R плиткой S. Рассмотрим гиперграф $H_{GT}(R,S)$, множеством вершин которого является множество всех элементов группы R, а гиперрёбра суть множества вида $x-S$ для некоторого элемента $x \in R$. Заметим, что количество гиперрёбер в этом гиперграфе равно числу его вершин и что он является s-униформным и s-регулярным. Если в группе R существует хотя бы одно замощение (S,T) плиткой S, то гиперграф $H_{GT}(R,S)$ будет s-дольным, причём в качестве долей можно взять множества $s+T$, $s \in S$. Любому замощению группы R плиткой S можно поставить в соответствие как 1-фактор в $H_{GT}(R,S)$, так и трансверсаль. Таким образом, число замощений группы R равно и перманенту матрицы смежности долей $A_{GT}(R,S)$ размерности s и порядка $|R|/s$, и перманенту матрицы смежности 1-факторов $A^*_{GT}(R,S)$ той же размерности и того же порядка:

$$GT(R,S) = \mathrm{per} A_{GT}(R,S) = \mathrm{per} A^*_{GT}(R,S).$$

3. Пусть $\mathbb{E}^n$ — булев гиперкуб размерности n. *Совершенным кодом* C в гиперкубе $\mathbb{E}^n$ называется подмножество такое, что любой шар единичного радиуса в $\mathbb{E}^n$ содержит ровно один элемент из C.

Несложно видеть, что мощность каждого совершенного кода C равна $N = \frac{2^n}{n+1}$. Совершенные коды существуют только в булевых гиперкубах $\mathbb{E}^n$ с $n = 2^m - 1$, причём любой такой гиперкуб можно разбить на $D = n+1$ непересекающихся совершенных кодов. Обозначим через $PC(n)$ количество совершенных кодов в гиперкубе $\mathbb{E}^n$.

Заметим, что граф кратчайших расстояний в гиперкубе $\mathbb{E}^n$ будет транзитивным графом, в качестве плитки в нём рассмотрим шар единичного радиуса и построим D-униформный гиперграф $H_{PC}(n)$, число

1-факторов в котором равно количеству замощений булева гиперкуба шарами единичного радиуса. Так как гиперкуб $\mathbb{E}^n$ разбивается на совершенные коды, гиперграф $H_{PC}(n)$ будет D-дольным, а если в качестве автоморфизмов гиперкуба $\mathbb{E}^n$ будем рассматривать только сдвиги на ненулевой вектор, то $H_{PC}(n)$ будет простым. Матрица смежности долей гиперграфа $H_{PC}(n)$ является D-мерной (0,1)-матрицей порядка $N = \frac{2^n}{n+1}$, и количество всех совершенных кодов в булевом гиперкубе $\mathbb{E}^n$ совпадает с её перманентом:

$$\mathrm{per} A_{PC}(n) = PC(n).$$

4. Обозначим через $\mathbb{Z}_q^n$ n-мерный гиперкуб порядка q. Подмножество гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$ мощности q^{n-d+1}, в котором минимальное расстояние Хэмминга между элементами равно d, называется МДР-*кодом с расстоянием* d. Другими словами, каждая $(d-1)$-мерная грань гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$ содержит ровно один элемент МДР-кода. Обозначим через $MDS(n,q,d)$ количество МДР-кодов с расстоянием d в $\mathbb{Z}_q^n$.

Построим гиперграф $H_{MDS}(n,q,d)$, вершинами которого являются все $(d-1)$-мерные грани в гиперкубе $\mathbb{Z}_q^n$, а любое гиперребро есть набор различных $D = C_n^{d-1}$ $(d-1)$-мерных граней такой, что в их пересечении лежит ровно один элемент гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$. Полученный гиперграф является простым и D-дольным, где в качестве долей можно взять все $(d-1)$-мерные грани одного направления.

Матрица смежности долей $A_{MDS}(n,q,d)$ этого гиперграфа есть D-мерная (0,1)-матрица порядка $N = q^{n-d+1}$ и её перманент связан с числом МДР-кодов с расстоянием d в гиперкубе $\mathbb{Z}_q^n$:

$$\mathrm{per} A_{MDS}(n,q,d) = MDS(n,q,d).$$

5. Рассмотрим n-мерный гиперкуб $\mathbb{Z}_q^n$ порядка q. Обозначим через $PMDS(n,q,d)$ количество разбиений гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$ на МДР-коды с расстоянием d. Построим простой гиперграф $H_{PMDS}(n,q,d)$, вершинами которого являются вершины гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$, а гиперрёбра соответствуют МДР-кодам с расстоянием d в $\mathbb{Z}_q^n$. Если такие МДР-коды существуют, то гиперграф $H_{PMDS}(n,q,d)$ будет непустым и q^{n-d+1}-дольным, где в качестве долей можно взять множества вершин $(d-1)$-мерных граней одного направления.

Пусть $A_{PMDS}(n,q,d)$ — матрица смежности долей этого гиперграфа. Размерность D матрицы $A_{PMDS}(n,q,d)$ равна q^{n-d+1}, её порядок N равен q^{d-1}. Перманент (0,1)-матрицы $A_{PMDS}(n,q,d)$ равен числу разбиений гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$ на МДР-коды с расстоянием d:

$$\mathrm{per} A_{PMDS}(n,q,d) = PMDS(n,q,d).$$

Данная конструкция может, в частности, использоваться для подсчёта количества латинских гиперкубов. *Латинским гиперкубом* размерности n и порядка q называется такое заполнение гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$ числами $\{1, \ldots, q\}$, что в любой одномерной грани все числа различны. Латинские гиперкубы размерности 2 обычно называют *латинскими квадратами.*

Любой n-мерный латинский гиперкуб порядка q можно рассматривать как упорядоченное разбиение гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$ на МДР-коды с расстоянием 2. Если обозначить через $LC(n, q)$ число n-мерных латинских гиперкубов порядка q, то

$$LC(n, q) = q! PMDS(n, q, 2) = q! \operatorname{per} A_{PMDS}(n, q, 2).$$

В частности, количество латинских квадратов порядка q выражается с помощью перманента q-мерной (0,1)-матрицы $A_{PMDS}(2, q, 2)$ порядка q, элемент a_α которой равен единице, если набор индексов $\{(i, \alpha_i)\}_{i=1}^q$ является диагональю в квадрате $\mathbb{Z}_q^2$ порядка q:

$$LC(2, q) = q! PMDS(2, q, 2) = q! \operatorname{per} A_{PMDS}(2, q, 2).$$

Для оценки количества латинских прямоугольников размера $k \times q$ можно построить k-мерную матрицу порядка q со структурой, аналогичной матрице $A_{PMDS}(2, q, 2)$. Единичным элементам такой матрицы соответствуют наборы из k элементов прямоугольника $k \times q$, расположенных в разных строках и столбцах.

Асимптотическая верхняя оценка на число латинских гиперкубов доказана в [39].

6. С помощью многомерного перманента можно выразить не только количество систем Штейнера, но и число H- и A-дизайнов, являющихся их обобщениями, как показано В. Н. Потаповым в [49].

Пусть $n \geqslant w \geqslant t$. Назовём набор $(n - w)$-мерных граней гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$ такой, что каждая $(n - t)$-мерная грань $\mathbb{Z}_q^n$ содержит ровно одну грань из этого набора, *дизайном типа* $H(n, q, w, t)$. Заметим, что дизайн $H(n, q, n, t)$ является МДР-кодом с расстоянием $d = n - t + 1$. *Дизайном типа* $A(n, q, w, t)$ называется такой набор $(n - t)$-мерных граней гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$, который однократно покрывает все его $(n - w)$-мерные грани.

Рассмотрим простой q^{w-t}-униформный гиперграф $H_{AHD}(n, q, w, t)$, вершины которого суть $(n-w)$-мерные грани гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$, а гиперрёбра состоят из таких q^{w-t} вершин, что объединение соответствующих им граней в кубе $\mathbb{Z}_q^n$ даёт некоторую $(n - t)$-мерную грань. Тогда число

1-факторов в гиперграфе $H_{AHD}(n, q, w, t)$ будет равно количеству А-дизайнов $A(n, q, w, t)$, а число его трансверсалей равно количеству Н-дизайнов $H(n, q, w, t)$. Если гиперкуб $\mathbb{Z}_q^n$ разбивается на непересекающиеся Н-дизайны, то количество А-дизайнов в этом гиперкубе равно перманенту матрицы смежности долей гиперграфа $H_{AHD}(n, q, w, t)$, и наоборот, если $\mathbb{Z}_q^n$ разбивается на непересекающиеся А-дизайны, то число его Н-дизайнов равно перманенту матрицы смежности 1-факторов гиперграфа $H_{AHD}(n, q, w, t)$.

Если $\mathbb{Z}_q^n$ не разбивается на А- или Н-дизайны, то их число можно оценить методами, изложенными в п. 2.1.

7. Пусть X — множество из nd цветных точек в пространстве $\mathbb{R}^{d-1}$, причём число точек одного цвета равно n, и p — точка в $\mathbb{R}^{d-1}$. *Цветным разбиением Бёрча* множества X относительно точки p назовём такое его разбиение на n непересекающихся подмножеств, что каждое подмножество состоит из d точек разных цветов и содержит в своей выпуклой оболочке точку p. Обозначим через $CBP(X, p)$ число цветных разбиений Бёрча множества X относительно точки p.

Для фиксированного множества цветных точек X и точки p построим простой d-униформный гиперграф $H_{CBP}(X, p)$, множество вершин которого есть множество X, а набор из d разноцветных вершин составляет гиперребро, если их выпуклая оболочка содержит точку p. Очевидно, что этот гиперграф будет d-дольным, где долями являются множества точек одного цвета.

Матрица смежности долей $A_{CBP}(X, p)$ такого гиперграфа имеет размерность d и порядок n, и её перманент равен количеству цветных разбиений Бёрча множества X относительно точки p:

$$\mathrm{per} A_{CBP}(X, p) = CBP(X, p).$$

Некоторые оценки числа цветных разбиений Бёрча могут быть найдены в [33].

2.3. Другие применения многомерных перманентов. Не все комбинаторные объекты, число которых можно выразить через перманент многомерной матрицы, удобно описывать в терминах 1-факторов в гиперграфах. В этом разделе рассмотрим несколько примеров таких объектов.

Напомним, что d-мерным *латинским гиперкубом* Q порядка n называется d-мерная матрица порядка n, содержащая ровно n разных элементов, все элементы любой одномерной грани которой различны. Двумерный латинский гиперкуб часто называют *латинским квадратом*, а трёх-

мерный — *латинский кубом. Трансверсалью* латинского гиперкуба Q называется диагональ, не содержащая одинаковых элементов. Следующий способ связать многомерный перманент и число трансверсалей в латинском гиперкубе описан в 1968 г. Юркатом и Райзером [34], а его применение будет более подробно рассмотрено в разд. 6.

Каждому d-мерному латинскому гиперкубу Q сопоставим $(d+1)$-мерную (0,1)-матрицу A того же порядка по следующему правилу: элемент гиперкуба q_α равен i тогда и только тогда, когда элемент матрицы $a_{\alpha,i}$ равен единице. Перманент такой матрицы A равен количеству трансверсалей в гиперкубе Q.

Ещё одним объектом, перечисление которого возможно с помощью многомерного перманента, является 1-факторизация гиперграфа.

1-*Факторизацией* гиперграфа H назовём разбиение всех его гиперрёбер на непересекающиеся 1-факторы, а гиперграф, в котором существует хотя бы одна 1-факторизация, будем называть *1-факторизуемым.* Очевидно, что любой 1-факторизуемый гиперграф является регулярным. Обозначим через $\Phi(H)$ количество 1-факторизаций гиперграфа H.

Существует несколько способов посчитать число 1-факторизаций регулярного гиперграфа с помощью многомерных перманентов. Во-первых, его можно получить последовательным удалением 1-факторов из гиперграфа H и оценкой количества доступных 1-факторов на каждом шаге с помощью уже доказанных неравенств. Таким способом доказывается

Теорема 4 [59]. *Пусть G_n^d — полный d-униформный гиперграф на n вершинах, т. е. гиперграф, множество гиперрёбер которого состоит из всех d-элементных подмножеств вершин. Тогда число его 1-факторизаций удовлетворяет неравенству*

$$\Phi(G_n^d) \leqslant \left((1+o(1))\frac{n^{d-1}}{\mu(n,d)^{1/n}e^d}\right)^{\frac{n^d}{d!}} \quad \textit{при } n \to \infty$$

с функцией $\mu(n,d)$ из теоремы 2.

Заметим, что существование 1-факторизации полного d-униформного гиперграфа на n вершинах, где d делит n, доказано Бараньяи [13].

Второй способ подсчёта числа 1-факторизаций k-регулярного гиперграфа H на n вершинах заключается в построении многомерной матрицы, перманент которой совпадает с этим числом.

Для каждой вершины x_i гиперграфа H занумеруем от 1 до k гиперрёбра, инцидентные этой вершине. Построим n-мерную (0,1)-матрицу

$A_\Phi(H)$ порядка k такую, что её элемент a_α равен единице, если объединение по всем $i = 1, \dots, n$ гиперрёбер α_i, инцидентных i-й вершине, образует 1-фактор в гиперграфе H. Заметим, что кратность каждого гиперребра 1-фактора будет равна k. Перманент построенной матрицы совпадает с количеством 1-факторизаций гиперграфа H:

$$\mathrm{per} A_\Phi(H) = \Phi(H).$$

1-Факторизации гиперграфа, как и 1-факторы, можно применить для оценки числа других объектов. Например, через количество 1-факторизаций в полном графе выражается число симметричных латинских квадратов.

Латинский квадрат называется *симметричным*, если он не меняется при транспонировании. Обозначим через $SLS(n)$ количество симметричных латинских квадратов порядка n.

Рассмотрим полный граф с петлями K'_n на n вершинах, при этом считаем, что каждая петля покрывает свою вершину однократно. Тогда матрица смежности графа K'_n есть единичная матрица. Любое разбиение графа K'_n на 1-факторы соответствует разбиению его матрицы смежности на симметричные диагонали, откуда следует, что количество симметричных латинских квадратов равно числу упорядоченных 1-факторизаций графа K'_n:

$$SLS(n) = n!\Phi(K'_n) = n!\, \mathrm{per} A_\Phi(K'_n).$$

2.4. Другие многомерные обобщения перманента. Существует несколько обобщений двумерного перманента на многомерный случай. Основное отличие между ними состоит в различных определениях диагонали.

В этой работе, если не оговорено особо, рассматривается перманент, в котором под диагоналями d-мерной матрицы понимаются МДР-коды с расстоянием d. Между тем в качестве диагоналей можно использовать МДР-коды и с другими расстояниями.

Пусть A — d-мерная матрица порядка n. Определим *r-диагональ* матрицы A как множество индексов элементов МДР-кода с расстоянием r и обозначим через $D_r(A)$ множество всех r-диагоналей матрицы A. *r-Перманентом* матрицы A будем называть величину

$$\mathrm{per}_r A = \sum_{p \in D_r(A)} \prod_{\alpha \in p} a_\alpha.$$

При $r = d$ имеем определение перманента, принятое за основное в этой работе. Как известно, только МДР-коды с расстояниями 2 и d существуют в любой d-мерной матрице. Поэтому случай $r = 2$, как и $r = d$, достоин особого внимания. Кроме того, для 2-перманента также можно найти приложения в задачах перечисления. Например, число $(d-1)$-мерных латинских гиперкубов порядка n равно 2-перманенту единичной d-мерной матрицы E_n^d порядка n. С помощью оценки 2-перманента такой матрицы Линиалом и Лурией получена

Теорема 5 [39]. *Пусть $LC(d,n)$ — число d-мерных латинских гиперкубов порядка n. Тогда*

$$LC(d,n) \leqslant \left((1+o(1))\frac{n}{e^d}\right)^{n^d} \text{ при } n \to \infty.$$

В пользу выбора d-перманента как основного обобщения двумерного перманента говорит тот факт, что r-перманент любой d-мерной матрицы A порядка n равен d-перманенту подходящей многомерной матрицы. Для этого достаточно рассмотреть матрицу $B_r(A)$ размерности $D = C_d^{r-1}$ и порядка $N = n^{d-r+1}$, построенную аналогично матрице $A_{MDS}(d,n,r)$, выражающей число МДР-кодов с расстоянием r в d-мерном гиперкубе порядка n, в которой вместо единичных элементов матрицы $A_{MDS}(d,n,r)$ следует взять элементы матрицы A, лежащие в пересечении соответствующих $(r-1)$-мерных граней.

Впервые подобная конструкция описана Доу и Гибсоном в [25], и с её помощью они получили следующую оценку 2-перманента.

Теорема 6 [24]. *Пусть A — трёхмерная $(0,1)$-матрица порядка n и $r_{i,j}$ — количество единиц в (i,j)-й одномерной грани некоторого направления. Тогда*

$$\mathrm{per}_2 A \leqslant \prod_{i,j=1}^{n} r_{i,j}!^{1/r_{i,j}}.$$

В отличие от теоремы Брэгмана (теоремы 7), которая будет сформулирована в разд. 3, оценка для 2-перманента из теоремы 6 недостижима.

3. Классические теоремы о двумерных перманентах

В этом разделе приведём наиболее важные утверждения относительно перманентов двумерных матриц. К сожалению, многие из этих теорем не обобщаются на многомерные матрицы, а проверить справедливость других весьма непросто.

Для перманентов двумерных матриц получено много нижних и верхних оценок. Наиболее известной верхней оценкой является следующая теорема, которая высказана в качестве гипотезы Минком в 1963 г. [46] и доказана в разное время и разными способами Брэгманом [2], Схрейвером [53] и Радхакришнаном [50].

Теорема 7 (Брэгман). *Пусть A — двумерная $(0,1)$-матрица порядка n, r_i — количество единиц в i-й строке матрицы A. Тогда*

$$\mathrm{per} A \leqslant \prod_{i=1}^{n} r_i!^{1/r_i}.$$

Равенство достигается на блочно-диагональных матрицах.

Немало других верхних оценок двумерного перманента можно найти в [4] или [55].

Положительность перманента двумерных неотрицательных матриц легко проверяется с помощью следующего критерия, который можно либо доказать индукцией по порядку матрицы, либо получить как следствие теоремы Холла о системе различных представителей.

Теорема 8 (Фробениус, Кёниг). *Пусть A — неотрицательная двумерная матрица порядка n. Перманент A равен нулю тогда и только тогда, когда A содержит такую нулевую $(s \times t)$-подматрицу, что $s + t = n + 1$.*

Одним из простых следствий теоремы 8 является тот факт, что перманент неотрицательной матрицы, у которой суммы элементов в любой строке и любом столбце совпадают, всегда положителен. Наилучшую нижнюю оценку для перманента таких матриц с целыми элементами даёт

Теорема 9 [54]. *Пусть A — неотрицательная двумерная матрица порядка n с целыми элементами, и пусть сумма элементов в каждой строке и каждом столбце матрицы A равна k. Тогда*

$$\mathrm{per} A \geqslant \left(\frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}} \right)^n .$$

Другим важным примером матриц с фиксированными суммами элементов по строкам и столбцам являются дважды стохастические матрицы. Напомним, что неотрицательная двумерная матрица называется *дважды стохастической*, если сумма элементов в каждой строке и каждом столбце равна единице. Множество дважды стохастических матриц

образует многогранник в пространстве всех матриц, который часто называют *многогранником Биркгофа*.

Как замечено ранее, из теоремы 8 следует

Теорема 10. *Перманент любой дважды стохастической матрицы положителен.*

На самом деле, верно несколько более сильное утверждение.

Теорема 11 (Биркгоф). *Пусть A — дважды стохастическая матрица порядка n. Тогда*

$$A = \sum_{i=1}^{k} \theta_i P_i,$$

где $P_1, \ldots, P_k$ — диагональные матрицы, а $\theta_1, \ldots, \theta_k$ — неотрицательные числа, $\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i = 1$.

Другими словами, углами многогранника Биркгофа дважды стохастических матриц являются диагональные матрицы и только они.

Рассмотрим задачу определения минимума и максимума перманента среди дважды стохастических матриц. Несложно понять, что максимум достигается на диагональной (0,1)-матрице и равен единице. Вопрос минимума перманента дважды стохастических матриц намного сложнее. Ответ на него даёт следующая теорема, приписываемая как гипотеза ван дер Вардену и доказанная в 1980 г. Г. П. Егорычевым [3] и Д. И. Фаликманом [8].

Теорема 12. *Минимум перманента в классе дважды стохастических матриц порядка n равен $\frac{n!}{n^n}$ и достигается только на равномерной матрице J_n, каждый элемент которой равен $1/n$.*

Альтернативные доказательства этой теоремы позже найдены Гийресом [30, 31], Бепатом [12] и Гурвицем [29].

Опишем основные идеи доказательств Г. П. Егорычева и Д. И. Фаликмана гипотезы Ван дер Вардена.

Во-первых, оба доказательства используют тот факт, что перманент матрицы является полилинейной функцией строк. Для положительных матриц $A = (A_1, \ldots, A_n)$, где A_i — i-я строка матрицы A, вводится квадратичная форма $f(x, y)$ от переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ вида

$$f(x, y) = \mathrm{per}(A_1, \ldots, A_{n-2}, x, y)$$

и устанавливается справедливость одного из следующих эквивалентных свойств.

Утверждение 1. (i) *Пусть $s, t \in \mathbb{R}^n$ — вещественные векторы, причём $t \neq 0$. Предположим, что $f(s,t) = 0$ и $f(s,s) > 0$. Тогда $f(t,t) < 0$.*

(ii) *Пусть $s, t \in \mathbb{R}^n$ — вещественные векторы, причём все компоненты вектора s неотрицательны. Тогда $f^2(s,t) \geqslant f(s,s)f(t,t)$.*

П. (i) утверждения 1 доказан Д. И. Фаликманом непосредственно из определения квадратичной формы f и свойств перманента матрицы. П. (ii) утверждения 1 получен Г. П. Егорычевым как следствие неравенства Александрова — Фенхеля для смешанных дискриминантов.

Затем в работах этих авторов утверждение 1 находит различное применение. Д. И. Фаликман на множестве дважды стохастических матриц вводит вспомогательную матричную функцию $F_\varepsilon(A) = \mathrm{per} A + \varepsilon / \prod\limits_{i,j=1}^{n} a_{i,j}$, где $\varepsilon \geqslant 0$ — произвольное вещественное число. Несложно проверить, что минимум функции $F_\varepsilon(A)$ достигается не на границе многогранника Биркгофа, а внутри него. С помощью утверждения 1 Д. И. Фаликман доказывает, что своё минимальное значение функция $F_\varepsilon(A)$ может принимать только на равномерной матрице J_n.

Г. П. Егорычев использует утверждение 1 для доказательства того, что в любой дважды стохастической матрице, которая минимизирует перманент (а не только в положительной, что уже доказано в [43]), перманент минора любого элемента равен перманенту всей матрицы. Учитывая результаты, полученные ранее Маркусом и Минком для дважды стохастических матриц и изложенные в книге [4], несложно получить, что этого свойства достаточно для справедливости гипотезы Ван дер Вардена.

К сожалению, для многомерного случая, где вместо строк естественно рассматривать гиперграни, аналог утверждения 1 неверен. В трёхмерном случае это можно проиллюстрировать следующим примером:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{per}^2(s,t) = \mathrm{per}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \times & -1 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\mathrm{per}(s,s)\mathrm{per}(t,t) = \mathrm{per} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \times & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{per} \begin{pmatrix} -1 & 1 & \times & -1 & 1 \\ 1 & -1 & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= 4 \cdot 4 = 16.$$

Этот пример несложно обобщить на случай произвольной размерности, заполняя в гипергранях двумерные грани нулевыми матрицами и матрицами s и t походящим образом.

Рассмотрим подход Гурвица [29], который основан на принципиально иной идее и помимо гипотезы Ван дер Вардена позволяет доказать и теорему Схрейвера (теорему 9). Это доказательство также изложено в [37].

Для дважды стохастической матрицы A вводится полином

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right).$$

Заметим, что коэффициент перед $x_1 \cdots x_n$ в полиноме $p(x_1, \dots, x_n)$ равен перманенту матрицы A:

$$\frac{\partial^n p}{\partial x_1 \dots \partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{per} A.$$

Вместе с полиномом $p(x_1, \dots, x_n)$ рассматриваются полиномы

$$p_i(x_1, \dots x_i) = \left. \frac{\partial^{n-i} p}{\partial x_{i+1} \dots \partial x_n} \right|_{x_{i+1} = \dots = x_n = 0}.$$

Тогда $p_n(x_1, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_n)$ и $p_0 = \mathrm{per} A$.

Далее для произвольного полинома $f(x_1, \dots, x_n)$ вводится понятие ёмкости:

$$\mathrm{cap}(f) = \inf_{x \in \Omega} f(x_1, \dots, x_n),$$

где $\Omega = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \prod\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \in \mathbb{R}_+ \right\}$.

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, Гурвиц находит, что ёмкость полинома $p(x_1, \dots, x_n)$ для любой дважды стохастической матрицы равна единице. В силу того, что полином p_0 совпадает с $\mathrm{per} A$, его ёмкость равна перманенту.

Далее полином f от n переменных назовём *стабильным*, если он не имеет нулей в области $\mathbb{C}_+^n$, где $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ z > 0\}$ — правая полуплоскость комплексной плоскости. Заметим, что для любой дважды стохастической матрицы A полином $p(x_1, \dots, x_n)$ стабильный.

С учётом всех введённых понятий гипотеза Ван дер Вардена вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 2. *Пусть полином $f(x_1, \dots, x_n)$ степени n стабилен и однороден. Обозначим $f' = \frac{\partial p}{\partial x_n}\big|_{x_n=0}$. Тогда либо $f' \equiv 0$, либо полином f' стабильный и*

$$\operatorname{cap}(f') \geqslant \operatorname{cap}(f) g(\deg_{x_n} f),$$

где $g(0) = 1$, $g(y) = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{y-1}$, $\deg_{x_n} f$ — максимальная степень переменной x_n в полиноме f.

Основной трудностью для применения этого метода к нижней оценке перманента многомерных матриц является построение по полистохастической матрице A полинома p, обладающего достаточно хорошими свойствами.

Более полную информацию о перманентах двумерных матриц и о связанных с ними проблемах можно найти в книге Минка [4], а современный обзор результатов и открытых вопросов представлен в [18].

4. Верхние оценки многомерного перманента

С помощью индукции или свойства 9 многомерных перманентов легко получить тривиальную верхнюю оценку.

Теорема 13. *Пусть A — d-мерная неотрицательная матрица порядка n. Предположим, что сумма элементов в i-й гиперграни матрицы A равна r_i. Тогда*

$$\operatorname{per} A \leqslant \prod_{i=1}^{n} r_i.$$

В этом разделе приведём несколько существенно более точных верхних оценок на перманенты полистохастических и (0,1)-матриц.

4.1. Верхние оценки перманентов (0,1)-матриц. Слегка ослабив большинство оценок для (0,1)-матриц, можно получить оценки и на перманент произвольной неотрицательной матрицы, все элементы которой не превосходят единицы.

Напомним, что для двумерных (0,1)-матриц теорема Брэгмана даёт верхнюю оценку перманента, которая достигается на всех блочно-диагональных матрицах и близка к нижней оценке для матриц с одинаковым числом единиц во всех строках и столбцах. Для многомерных матриц хотелось бы получить аналогичную оценку через число единиц в гранях матрицы, а именно, оценку точную или близкую к истинному значению перманента в достаточно большом числе случаев.

Одна из первых попыток обобщить теорему Брэгмана на трёхмерные матрицы была предпринята в 1987 г. Доу и Гибсоном.

Теорема 14 [24]. *Пусть A — трёхмерная $(0,1)$-матрица порядка n, и пусть количество единиц в i-й гиперграни матрицы A равно r_i. Тогда*

$$\mathrm{per} A \leqslant \prod_{i=1}^{n} r_i!^{1/r_i}.$$

Заметим, что если все суммы r_i в гипергранях матрицы A не превосходят n и существует двумерная матрица B порядка n со строчными суммами r_i, на которой достигается равенство в теореме Брэгмана, то существует трёхмерная матрица, на которой достигается оценка теоремы 14. Для её построения достаточно распределить строки матрицы B по одномерным граням трёхмерной матрицы диагональным образом. Если суммы в гипергранях матрицы A больше n, то теорема 14 даёт грубую оценку. Например, перманент единичной трёхмерной матрицы E_n^3 равен $n!^2$, в то время как теорема 14 оценивает его величиной $(n^2)!^{1/n}$.

На данный момент не получено хорошего обобщения теоремы Брэгмана для матриц, у которых количество единиц в гипергранях было бы близко к максимальному. В качестве кандидата на роль такой оценки автором предлагается

Гипотеза 1. *Пусть A — d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n. Предположим, что i-я гипергрань матрицы A содержит r_i единиц. Тогда*

$$\mathrm{per} A \leqslant n!^{d-2} \prod_{i=1}^{n} \left\lceil \frac{r_i}{n^{d-2}} \right\rceil !^{\frac{1}{\lceil r_i/n^{d-2} \rceil}}.$$

Равенство достигается на матрицах, все двумерные грани фиксированного направления которых равны двумерной матрице с r_i/n^{d-2} единицами в i-й строке, такой, что на ней достигается равенство в теореме Брэгмана. В [57] доказано, что гипотеза 1 выполняется асимптотически для матриц с достаточно большим количеством единиц в гипергранях.

Теорема 15. *Пусть для некоторого $d \in \mathbb{N}$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ задан набор из n натуральных чисел $\{r_i(n)\}_{i=1}^{n}$ такой, что*

$$\min_{i=1,\ldots,n} r_i(n)/n^{d-2} \to \infty \quad \text{при } n \to \infty.$$

Обозначим через $\Lambda^d(n,r)$ множество всех d-мерных $(0,1)$-матриц порядка n, у которых количество единиц в i-й гиперграни не превосхо-

дит $r_i(n)$, и введём функцию $F(x) = \lceil x\rceil!^{1/\lceil x\rceil}$. Тогда

$$\max_{A\in\Lambda^d(n,r)} \mathrm{per}A \leqslant n!^{d-2}e^{o(n)}\prod_{i=1}^{n} F\left(\frac{r_i(n)}{n^{d-2}}\right) \text{ при } n\to\infty.$$

Если гипотеза 1 была бы верна, то можно было бы достаточно точно оценивать перманент с помощью сумм элементов в гранях произвольной размерности. Действительно, пусть A — d-мерная (0,1)-матрица порядка n, l_β — k-мерные грани матрицы A фиксированного направления, $1\leqslant k\leqslant d-1$, r_β — сумма элементов в грани l_β. По свойству 8 перманента многомерных матриц

$$\mathrm{per}A = \sum_{\sigma\in\Sigma}\mathrm{per}A_\sigma,$$

где Σ — множество таких отображений $\sigma{:}\{1,\ldots,n\}\to I_n^{d-k}$, что набор $(\sigma(1),\ldots,\sigma(n))$ — диагональ в $(d-k)$-мерной матрице, а матрица A_σ является $(k+1)$-мерной матрицей порядка n, i-я гипергрань которой есть грань $l_{\sigma(i)}$ матрицы A. Заметим, что сумма элементов в гипергранях матриц A_σ равна $r_{\sigma(i)}$. Предполагая справедливость гипотезы 1, имеем

$$\mathrm{per}A_\sigma \leqslant n!^{k-1}\prod_{i=1}^{n} h_{\sigma(i)}!^{1/h_{\sigma(i)}},$$

где через $h_{\sigma(i)}$ обозначена величина $\left\lceil\frac{r_{\sigma(i)}}{n^{k-1}}\right\rceil$. Тогда будет выполнено неравенство

$$\mathrm{per}A \leqslant n!^{k-1}\sum_{\sigma\in\Sigma}\prod_{i=1}^{n} h_{\sigma(i)}!^{1/h_{\sigma(i)}}.$$

Определив $(d-k)$-мерную матрицу B порядка n с элементами $b_\beta = h_\beta!^{1/h_\beta}$, $\beta\in I_n^{d-k}$, это неравенство можем переписать в виде

$$\mathrm{per}A \leqslant n!^{k-1}\mathrm{per}B.$$

Если в этих рассуждениях грани l_β одномерные, то матрицы A_σ двумерные и их перманенты можно оценить с помощью теоремы Брэгмана. Поэтому верно

Утверждение 3 [57]. *Пусть A — d-мерная (0,1)-матрица порядка n, l_β — одномерные грани матрицы A некоторого направления, r_β — сумма элементов в грани l_β. Построим $(d-1)$-мерную матрицу B порядка n с элементами $b_\beta = r_\beta!^{1/r_\beta}$. Тогда*

$$\mathrm{per}A \leqslant \mathrm{per}B.$$

Если в каждой гиперграни матрицы B заменить все элементы максимальным в гиперграни и воспользоваться линейностью перманента, то в правой части неравенства утверждения 3 возникнет перманент некоторой $(d-1)$-мерной (0,1)-матрицы. Для оценки этого перманента можно снова применить утверждение 3, что даст следующий результат.

Теорема 16 [57]. *Пусть A — d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n. Выберем в A систему $\Theta_1, \ldots, \Theta_{d-1}$ вложенных направлений граней: вектор Θ_k задаёт направление k-мерных граней, вектор Θ_{k-1} получается из вектора Θ_k заменой одного нуля единицей (одна из переменных координат становится фиксированной). Считаем, что гиперграни направления Θ_{d-1} пронумерованы числами от 1 до n.*

Предположим, что для $1 \leqslant k \leqslant d-1$ единичные элементы k-мерных граней направления Θ_k, лежащих в i-й гиперграни, можно покрыть $s_{i,k}$ $(k-1)$-мерными гранями направления Θ_{k-1}. Тогда

$$\mathrm{per} A \leqslant \prod_{k=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{n} s_{i,k}!^{1/s_{i,k}}.$$

Равенство в этом неравенстве будет достигаться, например, на блочно-диагональных матрицах. В то же время оценка сильно зависит от расположения единиц в гранях матрицы и часто неточна.

Теорема 16 может быть использована для верхней оценки перманентов матриц, которые содержат мало единиц и имеют достаточно регулярную структуру. Например, рассмотрим применение этой теоремы к матрице, перманент которой выражает количество латинских квадратов.

Пусть $H_{LS}(n)$ — гиперграф, вершинами которого являются вершины куба $\mathbb{Z}_n^3$, а гиперрёбра соответствуют МДР-кодам с расстоянием 2 в $\mathbb{Z}_n^3$, и пусть $A_{LS}(n)$ — матрица смежности долей этого гиперграфа. Как было показано ранее, размерность и порядок матрицы $A_{LS}(n)$ равны n, и её перманент совпадает с числом латинских квадратов порядка n. Для краткости обозначим это число через $LS(n)$.

Заметим, что для любого $2 \leqslant k \leqslant d-1$ для покрытия всех единиц в k-мерных гранях матрицы $A_{LS}(n)$ необходимо не более $k-1$ $(k-1)$-мерных граней, а любая одномерная грань матрицы $A_{LS}(n)$ содержит не более одной единицы. По теореме 16

$$LS(n) = n! \, \mathrm{per} A_{LS}(n) \leqslant n! \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n} k!^{1/k} = \prod_{k=1}^{n} k!^{n/k},$$

что совпадает с известной верхней оценкой числа латинских квадратов.

В заключение сравним перечисленные в этом разделе оценки на следующем примере. Пусть

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \times \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \times \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \times \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Перманент матрицы A равен 74, сумма элементов в каждой гиперграни равна 8. Построим матрицу B с элементами $b_{i,j} = s_{i,j}!^{1/s_{i,j}}$, где $s_{i,j}$ — сумма элементов в (i,j)-й строке матрицы A. Можно проверить, что $\mathrm{per} B \approx 104,23$, что больше чем величина $4! \cdot 2^{4/2} = 96$ из гипотезы 1. В то же время теорема 16 оценивает перманент A числом $4!^2 = 576$.

4.2. Верхние оценки для перманентов полистохастических матриц. Для дважды стохастических матриц тривиальная верхняя оценка на перманент из теоремы 13 равна единице и достигается на диагональной матрице. Можно проверить, что попытка применения для оценки перманентов полистохастических матриц результатов п. 4.1 уже для малых порядков и размерностей даёт весьма далёкие от истины результаты. Но каких-либо более точных оценок для полистохастических матриц известной размерности и известного порядка пока найти не удаётся.

Тем не менее для множества полистохастических матриц фиксированной размерности и сколь угодно большого порядка доказано, что максимум перманента близок к перманенту равномерной матрицы. Для получения этого результата потребуется выйти за пределы класса полистохастических матриц.

Обозначим через $M_n^d(\gamma)$ множество неотрицательных d-мерных матриц порядка n, у которых сумма всех элементов равна γn, а в каждой одномерной грани сумма элементов не превосходит единицы. Заметим, что множество Ω_n^d всех d-мерных полистохастических матриц порядка n совпадает с множеством $M_n^d(n^{d-2})$.

Рассмотрим на множестве $M_n^d(\gamma)$ функцию максимума перманента:

$$P_n^d(\gamma) = \max_{A \in M_n^d(\gamma)} \mathrm{per} A.$$

Функция $P_n^d(\gamma)$ определена корректно, так как множество $M_n^d(\gamma)$ компактно.

Несложно проверить, что для двумерных матриц функция $P_n^d(\gamma)$ равна γ^n. По аналогии может возникнуть впечатление, что $P_n^d(\gamma)$ монотонно возрастает с увеличением γ и для матриц произвольной размерности.

На самом деле, функция $P_n^d(\gamma)$ является лишь кусочно монотонной, в чём можно убедиться уже на примере трёхмерных матриц порядка 2.

Несмотря на то, что немонотонность максимума перманента матриц из $M_n^d(\gamma)$ существенно затрудняет доказательство верхней оценки, автором получен следующий результат.

Теорема 17 [58]. *Пусть $d \geqslant 3$. Для любого $\delta \in (0,1]$ максимум перманента d-мерных матриц из множества $M_n^d(\gamma)$ при $\gamma = n^{d-3+\delta}$ и $n \to \infty$ равен*

$$P_n^d(\gamma) = \left((1+o(1))\frac{\gamma}{e^{d-1}}\right)^n.$$

Заметим, что в условиях теоремы 17 максимум перманента матриц из множества $M_n^d(\gamma)$ асимптотически равен перманенту матриц $\frac{\gamma}{n^{d-2}}J_n^d$, каждый элемент которых равен γ/n^{d-1}, асимптотическое поведение перманента которых легко находится с помощью формулы Стирлинга.

Так как при $\gamma = n^{d-2}$ множество $M_n^d(\gamma)$ совпадает с множеством полистохастических матриц, для их перманента верна

Теорема 18 [58]. *Пусть $d \geqslant 3$ и пусть Ω_n^d — множество всех d-мерных полистохастических матриц порядка n. Тогда*

$$\max_{A \in \Omega_n^d} \operatorname{per} A = \left((1+o(1))\frac{n^{d-2}}{e^{d-1}}\right)^n \quad \textit{при } n \to \infty.$$

5. Полистохастические матрицы, их свойства и обобщения

Поскольку любая выпуклая комбинация полистохастических матриц даёт полистохастическую матрицу, все d-мерные полистохастические матрицы порядка n образуют выпуклый многогранник в n^d-мерном пространстве. По аналогии с двумерным случаем многогранник полистохастических матриц назовём *многогранником Биркгофа*. Несложно проверить, что размерность многогранника Биркгофа равна $(n-1)^d$.

Напомним, что в классе дважды стохастических матриц существует единственная с точностью до перестановки строк и столбцов матрица, состоящая из нулей и единиц. В d-мерном случае для достаточно больших порядков n существует множество неэквивалентных полистохастических (0,1)-матриц. Кроме того, позиции единиц в полистохастических (0,1)-матрицах образуют МДР-код с расстоянием 2 в гиперкубе $\mathbb{Z}_n^d$. В этом разделе будем называть все полистохастические (0,1)-матрицы МДР-*кодами*.

Пожалуй, наиболее простым примером МДР-кода будет d-мерная матрица порядка n такая, что её элемент m_α равен единице тогда и только тогда, когда $\alpha_1+\cdots+\alpha_d \equiv 0 \bmod n$. В дальнейшем такую матрицу будем обозначать через $\mathcal{M}_n^d$.

5.1. Конструкции полистохастических матриц. Приведём несколько способов построения полистохастических матриц.

Во-первых, полистохастическую матрицу можно получить как выпуклую линейную комбинацию других полистохастических матриц.

Несколько более сложным способом является построение с помощью кронекерового произведения. Пусть A — d-мерная матрица порядка n_1, B — d-мерная матрица порядка n_2. *Кронекеровым произведением* $A \otimes B$ матриц A и B назовём матрицу d-мерную матрицу C порядка $n_1 n_2$ такую, что $c_\gamma = a_\alpha b_\beta$ для $\gamma = n_2(\alpha-1)+\beta$, $\alpha \in I_{n_1}^d$, $\beta \in I_{n_2}^d$, где сложение и умножение производятся покоординатно. Несложно видеть, что кронекерово произведение любых двух полистохастических матриц есть полистохастическая матрица.

Следующий способ позволяет получать полистохастические матрицы большей размерности из матриц меньшей размерности. Пусть A — d-мерная полистохастическая матрица порядка n. Построим $(d+1)$-мерную матрицу B того же порядка. Одну из гиперграней Γ матрицы B заполним элементами матрицы A. Оставшиеся элементы в одномерных гранях, перпендикулярных выбранной гиперграни, заполняются равномерным образом: элемент $b_\beta \notin \Gamma$ положим равным $\frac{1-a_\alpha}{n-1}$, где α — проекция индекса β на гипергрань Γ.

Последний способ построения полистохастических матриц имеет в качестве источника гипотезу Маркуса и Минка для дважды стохастических матриц. В [42] они предположили, что перманент любой дважды стохастической матрицы A порядка n не меньше перманента матрицы $B = \frac{nJ_n^2-A}{n-1}$. Если эта гипотеза справедлива, то с её помощью можно получить ещё одно доказательство гипотезы Ван дер Вардена.

Для d-мерной полистохастической матрицы A порядка n матрица $B = \frac{nJ_n^d-A}{n-1}$ также будет полистохастической. Но уже для матриц размерности 3 и 4 обобщение гипотезы Маркуса и Минка неверно. Для трёхмерных матриц в качестве контрпримера можно рассмотреть матрицу $\mathcal{M}_3^3$, а для четырехмерных — матрицу, полученную применением предыдущей конструкции к матрице $\mathcal{M}_3^3$.

5.2. Полистохастические матрицы и классические теоремы для двумерных матриц. Несмотря на то, что перманент любой дважды стохастической матрицы положителен, среди полистохастических матриц существуют такие, что их перманент равен нулю. Самым простым примером полистохастической матрицы с нулевым перманентом является МДР-код $\mathcal{M}_n^d$ нечётной размерности d и чётного порядка n. С помощью описанного в примере 4 подсчёта суммы всех индексов по единичной диагонали легко проверить, что перманент МДР-кода $\mathcal{M}_n^d$ равен нулю.

Тем не менее пока не обнаружено ни одной полистохастической матрицы четвёртой или другой чётной размерности с нулевым перманентом. Поэтому можно высказать следующую гипотезу, имеющую большое значение для теории многомерных перманентов.

Гипотеза 2. *Все полистохастические матрицы чётной размерности имеют положительный перманент.*

Хотя для дважды стохастических матриц это утверждение несложно доказать, все попытки обобщения известных доказательств на многомерный случай пока безуспешны.

Также не найдено ни одной полистохастической матрицы нечётного порядка, имеющей нулевой перманент. Это позволяет предположить, что верна

Гипотеза 3. *Все полистохастические матрицы нечётного порядка имеют положительный перманент.*

В подтверждение этой гипотезы можно привести следующее утверждение.

Теорема 19. *Пусть A — d-мерная полистохастическая матрица порядка 3. Тогда перманент матрицы A больше нуля.*

Доказательство. Заметим, что в любой размерности МДР-код порядка 3 единствен с точностью до эквивалентности и что он имеет ненулевой перманент. Точное значение его перманента приведено в разд. 6.

Пусть A — полистохастическая матрица порядка 3 с нулевым перманентом, и пусть некоторая её одномерная грань содержит не менее двух ненулевых элементов. Без ограничения общности можно считать, что $a_{\alpha^1} \neq 0$ и $a_{\alpha^2} \neq 0$, где $\alpha^1 = (1, 3, \ldots, 3)$ и $\alpha^2 = (2, 3, \ldots, 3)$.

Обозначим через A^3 гипергрань вида $(3, *, \ldots, *)$, где $*$ принимает любые значения от 1 до 3, A^3 есть $(d-1)$-мерная полистохастическая матрица порядка 3. Обозначим через B минор элемента $a_{3,\ldots,3}$ в гиперграни A^3 и докажем, что B будет $(d-1)$-мерной матрицей порядка 2,

состоящей из нулей и единиц.

Выберем в подматрице B ненулевой элемент a_β, $\beta = (3, x_2, \ldots, x_d)$, $x_i \in \{1, 2\}$, и обозначим через $a_{\overline{\beta}}$ диагональный элемент к a_β в матрице B: $\overline{\beta} = (3, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_d)$, $\overline{x}_i = 3 - x_i$. Так как предположили, что перманент матрицы A равен нулю, элемент a_{β^1}, $\beta^1 = (1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_d)$, дополняющий до диагонали элементы a_{α^2} и a_β, равен нулю. Аналогично элемент a_{β^2} с $\beta^2 = (2, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_d)$ равен нулю как дополняющий до диагонали элементы a_{α^1} и a_β.

Заметим, что одномерная грань, определённая соотношением $(*, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_d)$, содержит два нулевых элемента a_{β^1} и a_{β^2}, а значит, оставшийся в ней элемент $a_{\overline{\beta}}$ должен быть равен единице. Аналогично, взяв в этом рассуждении в качестве начального элемента в подматрице B элемент $a_{\overline{\beta}}$, получаем, что a_β равен единице.

Таким образом, минор B элемента $a_{3,\ldots,3}$ в гиперграни A^3 является (0,1)-матрицей. Тогда гипергрань A^3 в матрице A также представляет собой (0,1)-матрицу, так как если некоторый минор полистохастической матрицы есть (0,1)-матрица, то и вся матрица заполнена нулями и единицами.

Остаётся заметить, что если в полистохастической матрице A порядка 3 некоторая гипергрань есть (0,1)-матрица, то матрица A будет выпуклой линейной комбинацией двух МДР-кодов, а значит, её перманент положителен. Теорема 19 доказана.

Как отмечено ранее, не все полистохастические матрицы имеют положительный перманент, а значит, ещё меньшая их часть может быть разложена в сумму диагональных матриц. Например, при помощи латинских квадратов с ненулевым числом трансверсалей, содержащих элементы, не входящие ни в одну трансверсаль, можно построить полистохастическую трёхмерную матрицу с положительным перманентом, которая не представима в виде суммы диагональных матриц. Существование таких латинских квадратов доказано в [63].

Однако среди полистохастических матриц чётной размерности пока не найдено примеров, которые невозможно было бы разложить в сумму диагональных матриц. Поэтому можно предположить, что гипотеза 2 о положительности перманента может быть усилена до следующего утверждения, обобщающего теорему Биркгофа.

Гипотеза 4. *Все полистохастические матрицы чётной размерности можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации диагональных матриц.*

Теорема Биркгофа имеет и другую интерпретацию, которая утверждает, что углами многогранника Биркгофа дважды стохастических матриц являются диагональные матрицы и только они. Несложно видеть, что любой МДР-код будет угловой матрицей в многограннике Биркгофа полистохастических матриц, но для размерности большей двух все угловые матрицы не исчерпываются МДР-кодами. Самый простой пример такого угла многогранника Биркгофа найден в [40] и [20]:

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & & 0 & 1/2 & 1/2 & & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & \times & 1/2 & 1/2 & 0 & \times & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & & 1/2 & 0 & 1/2 & & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right).$$

Для матриц размерности $d \geqslant 3$ и порядка $n \geqslant 4$ углы многогранника Биркгофа, не являющиеся МДР-кодами, можно построить с помощью не дополняющихся до латинских гиперкубов латинских параллелепипедов.

Точное число углов в многограннике Биркгофа полистохастических матриц, а также доля МДР-кодов среди них, пока остаются неизвестными. Единственным результатом в этой области является конструкция углов многогранника трёхмерных полистохастических матриц, предложенная Линиалом и Лурией в [40].

Теорема 20. *Количество вершин в многограннике Биркгофа трёхмерных полистохастических матриц не менее $M(n)^{3/2-o(1)}$, где $M(n)$ — число трёхмерных* МДР-*кодов порядка n.*

Заметим, что если бы для многогранника полистохастических матриц чётной размерности удалось установить, что все его углы имеют положительный перманент, то гипотеза 2 была бы верна.

В оставшейся части этого пункта рассмотрим проблему минимума и максимума перманента для полистохастических матриц.

Напомним, что в двумерном случае максимум перманента достигается на диагональной матрице, а в соответствии с гипотезой Ван дер Вардена (теоремой 12) минимум находится на равномерной матрице. Для полистохастических матриц пока не найдены матрицы, на которых достигался бы минимум и максимум перманента. Но, как и в двумерном случае, равномерная матрица будет локальным экстремумом для перманента на множестве полистохастических матриц, хотя знак этого экстремума будет зависеть от размерности.

Теорема 21 [58]. *Равномерная матрица J_n^d является точкой локального экстремума для функции перманента на множестве d-мерных полистохастических матриц порядка n: при чётном d на J_n^d перманент имеет локальный минимум, при нечётном — локальный максимум.*

В отсутствии глобального экстремума перманента на равномерной матрице можно убедиться с помощью следующих примеров.

Для порядков $n \leqslant 10$ всегда можно найти трёхмерный МДР-код, перманент которого будет больше перманента равномерной матрицы. Для четырёхмерных матриц порядка $n \leqslant 6$ перманент МДР-кода $\mathcal{M}_n^4$ больше не только перманента равномерной матрицы, но и перманента любого другого МДР-кода. Более того, после рассмотрения ряда различных полистохастических матриц можно предположить, что верна

Гипотеза 5. *Максимум перманента полистохастических матриц достигается на некотором МДР-коде.*

Напомним, что если верна гипотеза 2, то минимум перманента полистохастических матриц чётной размерности отличен от нуля. По аналогии с гипотезой Ван дер Вардена в качестве наиболее вероятного претендента на матрицу с минимальным перманентом логично рассмотреть равномерную матрицу J_n^d, тем более что в чётной размерности на этой матрице перманент имеет локальный минимум. Доу и Гибсон в [25] предположили, что среди многомерных матриц, которые являются выпуклой линейной комбинацией диагональных матриц, минимум перманента достигается на матрице, пропорциональной равномерной матрице.

Оба эти предположения ошибочны, так как по теореме 21 для нечётной размерности равномерная матрица является локальным максимумом на множестве полистохастических матриц, а для чётной их можно опровергнуть с помощью следующей конструкции.

Утверждение 4. *Пусть порядок n нечётен или размерность d чётна, $d \geqslant 3$. Тогда существует полистохастическая d-мерная матрица H_n^d порядка n, перманент которой асимптотически меньше перманента равномерной матрицы:*

$$\mathrm{per} H_n^d \leqslant \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)^n \mathrm{per} J_n^d.$$

Доказательство. Обозначим МДР-код $\mathcal{M}_n^d$ порядка n через $\mathcal{M}$, а МДР-код, у которого элемент m_α равен единице тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i \equiv 1 \bmod n$, — через $\mathcal{M}'$. Матрицы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ эквивалентны и их перманенты совпадают. Положим

$$H_n^d = 1/2(\mathcal{M} + \mathcal{M}').$$

Заметим, что любая единичная диагональ в матрице $\mathcal{M}$ или $\mathcal{M}'$ перехо-

дит в H_n^d в диагональ, заполненную элементами $1/2$, поэтому

$$\mathrm{per} H_n^d \geqslant 2^{-n}(\mathrm{per}\mathcal{M} + \mathrm{per}\mathcal{M}') = 2^{-n+1}\mathrm{per}\mathcal{M}.$$

Покажем, что остальные диагонали не оказывают влияния на перманент матрицы H_n^d. Предположим, что для некоторого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ существует диагональ $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$, проходящая через k единичных элементов матрицы $\mathcal{M}'$ и $n-k$ единичных элементов матрицы $\mathcal{M}$:

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i^j \equiv 1 \bmod n \quad \text{для } j = 1, \ldots, k,$$

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i^j \equiv 0 \bmod n \quad \text{для } j = k+1, \ldots, n.$$

Рассмотрим величину $S = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i^j$. Как и в примере 4, разный порядок суммирования даёт

$$S \equiv k \bmod n, \qquad S \equiv d\frac{n(n+1)}{2} \bmod n.$$

Если порядок n нечётен или размерность d чётна, то последнее равенство принимает вид $S \equiv 0 \bmod n$, а значит, матрица H_n^d не содержит новых диагоналей, влияющих на перманент, по сравнению с матрицами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$:

$$\mathrm{per} H_n^d = 2^{-n+1}\mathrm{per}\mathcal{M}.$$

Напомним, что по теореме 18 максимум перманента полистохастических матриц асимптотически равен перманенту равномерной матрицы. Следовательно, для перманента МДР-кода $\mathcal{M}$ верно

$$\mathrm{per}\mathcal{M} \leqslant (1+o(1))^n \mathrm{per} J_n^d.$$

Таким образом,

$$\mathrm{per} H_n^d \leqslant \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)^n \mathrm{per} J_n^d \quad \text{при } n \to \infty.$$

Утверждение 4 доказано.

На самом деле даже для небольших порядков n перманент описанной матрицы H_n^d существенно меньше перманента J_n^d. Приведём небольшую табл. 1 значений перманентов этих матриц в четырёхмерном случае.

Таблица 1

n	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{per} H_n^4$	6,75	32	207,8125	1782	19574,734	273920
$\mathrm{per} J_n^4$	8	54	552,96	8000	155455,227	3906984,375

Более того, посчитав число трансверсалей в латинских гиперкубах порядка 3 (что сделано в разд. 6), можно убедиться в том, что перманент матрицы H_3^d меньше перманента равномерной матрицы J_3^d для всех размерностей $d \geqslant 3$, что делает матрицу H_n^d новым кандидатом на матрицу с минимальным перманентом.

Заметим, что среди полистохастических матриц чётной размерности существуют МДР-коды, перманент которых меньше перманента равномерной матрицы. Один пример такого четырёхмерного МДР-кода порядка 6 будет приведён в разделе про латинские кубы и гиперкубы.

На основании рассмотренных примеров можно высказать следующую гипотезу о расположении локальных экстремумов многомерного перманента.

Гипотеза 6. *Все локальные экстремумы перманента в многограннике Биркгофа находятся в вершинах или в центрах его граней.*

5.3. Перманенты МДР-кодов. Так как МДР-коды являются углами многогранника Биркгофа полистохастических матриц, их исследование даёт полезную информацию о перманентах матриц внутри этого многогранника. Рассмотрим свойства перманентов некоторых МДР-кодов.

Пусть $G = \langle \{g_1, \ldots, g_n\}, * \rangle$ — коммутативная группа порядка n. *Коммутативным d*-мерным МДР-кодом порядка n назовём (0,1)-матрицу M такую, что её элемент m_α равен единице тогда и только тогда, когда $g_{\alpha_1} * \cdots * g_{\alpha_d} = e$, где e — единичный элемент группы G. Заметим, что любой МДР-код $M(g)$, построенный по соотношению $g_{\alpha_1} * \cdots * g_{\alpha_d} = g$ для некоторого $g \in G$, эквивалентен МДР-коду M.

Утверждение 5. *Любой d-мерный коммутативный МДР-код M порядка n является транзитивным, и его перманент делится на n^{d-2}.*

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$ — индексы двух единичных элементов в матрице M. Тогда преобразование координат $(x_1, \ldots, x_d) \mapsto (y_1, \ldots, y_d)$, задаваемое соотношениями $g_{x_i} * g_{\alpha_i}^{-1} * g_{\beta_i} = g_{y_i}$, $i = 1, \ldots, d$, не меняет матрицы M и переводит единичный элемент с индексом α в элемент с индексом β. Следовательно, M — транзитивная матрица.

По свойству 5 перманент любой транзитивной матрицы делится на число единиц в любой её гиперграни. Остаётся только заметить, что гипергрань матрицы M содержит ровно n^{d-2} единиц. Утверждение 5 доказано.

Матрица $\mathcal{M}_n^d$ является наиболее простым примером коммутативного МДР-кода. В разд. 6 оценим её перманент снизу.

Теорема 22. *Если размерность* d *нечётна, а порядок* n *чётен, то* $\mathrm{per}\mathcal{M}_n^d = 0$, *в остальных случаях* $\mathrm{per}\mathcal{M}_n^d \geqslant (nn!)^{\lfloor d/2 \rfloor - 1}$.

5.4. Другие обобщения понятия стохастичности. Принятое нами определение полистохастических матриц является отнюдь не единственным возможным способом обобщения понятия дважды стохастичности, поэтому рассмотрим другие возможные обобщения и их свойства.

Напомним, что неотрицательная многомерная матрица называется *полистохастической*, если сумма элементов в любой её одномерной грани равна единице. Такое определение выделяет достаточно узкий класс в множестве всех многомерных матриц. В качестве более широкого класса можно рассматривать неотрицательные d-мерные матрицы, у которых сумма элементов одинакова в любой k-мерной грани, $1 \leqslant k \leqslant d-1$. Назовём такие матрицы *k-стохастическими.* Множество полистохастических матриц совпадает с множеством 1-стохастических матриц, у которых сумма элементов в каждой одномерной грани равна единице, и вкладывается в множество k-стохастических матриц, сумма элементов в k-мерных гранях которых равна n^{k-1}. Некоторые простые свойства k-стохастических матриц доказаны Юркатом и Райзером в [34].

Очевидно, что множество k-стохастических матриц образует выпуклый многогранник в пространстве всех многомерных матриц, и для каждого k от 1 до $d-1$ можно попробовать описать все вершины этого многогранника и оценить их число. Например, наиболее полное описание вершин многогранника трёхмерных матриц, у которых сумма элементов в любой гиперграни равна единице, выполнено в работе Брульди и Цимы [15], и предложенные ими конструкции дают неплохую нижнюю оценку числа вершин.

Расширение класса полистохастических матриц до k-стохастических матриц оказывает значительное влияние на экстремумы перманента. Напомним, что по теореме 21 равномерная матрица является локальным максимумом для перманента полистохастических матриц нечётной размерной, а для чётной размерности — локальным минимумом. Но уже в классе 2-стохастических матриц равномерная матрица не будет точкой

локального экстремума.

Действительно, выберем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и построим d-мерные матрицы K_2^d порядка 2:

$$K_2^3 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad K_2^d = \left(K_2^{d-1} \times -K_2^{d-1}\right).$$

Дополним матрицу K_2^d нулями до d-мерной матрицы K_n^d порядка n. Заметим, что сумма элементов в любой двумерной грани матрицы K_n^d равна нулю, а значит, матрица $J_n^d + K_n^d$ 2-стохастическая. Раскладывая её перманент по гиперграни, содержащей ε, получаем

$$\mathrm{per}\left(J_n^d + K_n^d\right) = \mathrm{per} J_n^d + (-1)^{d+1}\varepsilon^2 2^{d-2}\frac{(n-2)!^{d-1}}{n^{n-2}}.$$

Поэтому если d чётно, то $\mathrm{per}\left(J_n^d + K_n^d\right) < \mathrm{per} J_n^d$, а если d нечётно, то $\mathrm{per}\left(J_n^d + K_n^d\right) > \mathrm{per} J_n^d$, в то время как теорема 21 утверждает обратное.

Свойства перманентов d-мерных $(d-1)$-стохастических (0,1)-матриц порядка n с l единицами в каждой гиперграни рассмотрены Доу и Гибсоном [25]. Для множества таких матриц они использовали обозначение $\Lambda(n, d, l)$. Приведём несколько утверждений из [25].

Утверждение 6. *Если $A \in \Lambda(n, d, 2)$, то перманент матрицы A равен или 0, или 2^t для некоторого $1 \leqslant t \leqslant n/2$.*

Утверждение 7. *Для любого чётного n и $d \geqslant 3$ существует матрица $A \in \Lambda(n, d, n^{d-2})$ с нулевым перманентом.*

Утверждение 8. *Для любого нечётного n и $d \geqslant 3$ существует матрица $A \in \Lambda(n, d, m^{d-2})$ с нулевым перманентом, где m — любое чётное число, удовлетворяющее неравенству $m(1 + m^{-\frac{1}{d-1}}) \leqslant n$.*

Приведём формулировку в терминах многомерных матриц результата о взвешенных 1-факторах в гиперграфах из [14], позволяющего оценить снизу и сверху перманент некоторого подкласса $(d-1)$-стохастических матриц.

d-Мерную неотрицательную матрицу A порядка n назовём *λ-сбалансированной*, если для любых элементов a_α и a_β выполнено

$$\frac{a_\alpha}{a_\beta} \leqslant \lambda.$$

Очевидно, что если матрица λ-сбалансирована, то все её элементы положительны.

Теорема 23 [14]. *Пусть A — d-мерная λ-сбалансированная $(d-1)$-стохастическая матрица порядка n. Тогда существует вещественное число $\varkappa = \varkappa(d,\lambda) > 0$ такое, что*

$$n^{-\varkappa} e^{-n(d-1)} \leqslant \mathrm{per} A \leqslant n^{\varkappa} e^{-n(d-1)}.$$

Наконец, как самый общий случай можно рассмотреть класс матриц, у которых известны суммы элементов во всех гранях некоторой размерности, но сами суммы могут быть различны. Множество таких матриц по-прежнему образует выпуклый многогранник в пространстве всех многомерных матриц, и в [34] получена оценка на мощность носителя всех его углов в трёхмерном случае. Этот результат несложно обобщить на случай произвольной размерности. Для этого потребуется

Лемма 1. *Размерность пространства d-мерных матриц порядка n, у которых известны суммы элементов во всех $(d-k)$-мерных гранях, где $0 \leqslant k \leqslant d$, равна $n^d - \sum\limits_{i=0}^{k} C_d^i (n-1)^i$.*

Доказательство. Для $k = d$ формула, очевидно, верна. Выберем некоторый индекс $\alpha \in I_n^d$ и обозначим через $V_n^d(k,\alpha)$ множество индексов элементов, лежащих в объединении всех k-мерных граней, проходящих через α. Несложно проверить, что в пространстве d-мерных матриц порядка n с известными суммами во всех $(d-k)$-мерных гранях по любому означиванию элементов, индексы которых не лежат в множестве $V_n^d(k,\alpha)$, всегда единственным образом восстанавливаются значения всех остальных элементов матрицы. Следовательно, размерность этого пространства равна $n^d - \left|V_n^d(k,\alpha)\right|$.

Остаётся только заметить, что мощность множества $V_n^d(k,\alpha)$ не зависит от выбора α и равна $\sum\limits_{i=0}^{k} C_d^i (n-1)^i$. Лемма 1 доказана.

Занумеруем в d-мерной матрице порядка n все k-мерные грани числами от 1 до t, где $t = C_d^k n^{d-k}$, и обозначим через $\mathfrak{M}_k(s_1,\ldots,s_t)$ класс неотрицательных матриц, у которых сумма элементов в i-й k-мерной грани равна s_i. Матрицу $A \in \mathfrak{M}_k(s_1,\ldots,s_t)$ будем называть *k-угловой*, если она не может быть выражена в виде нетривиальной линейной комбинации матриц этого класса.

Напомним, что носителем многомерной матрицы называется множество индексов её ненулевых элементов, и обозначим через $N(A)$ мощность носителя матрицы A.

Утверждение 9. *Мощность носителя $N(A)$ d-мерной k-угловой матрицы A порядка n удовлетворяет неравенству*

$$N(A) \leqslant \sum_{i=0}^{d-k} C_d^i (n-1)^i.$$

Доказательство. Пусть A — произвольная d-мерная матрица порядка n из класса $\mathfrak{M}_k(s_1, \ldots, s_t)$, и пусть $N = N(A)$ — мощность носителя этой матрицы. Занумеруем все элементы носителя от 1 до N. Обозначим через U матрицу инцидентности элементов носителя матрицы A и k-мерных граней. Матрица U является прямоугольной двумерной (0,1)-матрицей U размера $t \times N$. Заметим, что любой столбец матрицы U содержит ровно C_d^k единиц. Более того, объединение любых n^{d-k} строк матрицы U, соответствующих множеству k-мерных граней одного направления, содержит ровно по одному единичному элементу в каждом столбце.

Несложно видеть, что матрица A является k-угловой тогда и только тогда, когда столбцы матрицы U линейно независимы. Так как строчный и столбцевой ранги совпадают, для линейной независимости столбцов матрицы U необходимо, чтобы их число было не больше количества линейно независимых характеристических функций k-мерных граней в d-мерной матрице порядка n. Класс $\mathfrak{M}_k(s_1, \ldots, s_t)$ задаётся системой из t линейных уравнений на элементы d-мерной матрицы порядка n, а значит, количество линейно независимых характеристических функций k-мерных граней равно коразмерности пространства d-мерных матриц порядка n, у которых известны суммы во всех k-мерных гранях. Из леммы 1 следует, что это число равно $\sum\limits_{i=0}^{d-k} C_d^i (n-1)^i$. Утверждение 9 доказано.

6. Многомерные перманенты и латинские гиперкубы

Напомним, что *d-мерным латинским гиперкубом Q порядка n* называется d-мерная матрица порядка n, элементы которой принимают n различных значений и все значения в любой одномерной грани которой различны. Двумерный латинский гиперкуб называется *латинским квадратом*, а трёхмерный — *латинским кубом*. Два d-мерных латинских гиперкуба *эквивалентны*, если эквивалентны соответствующие им $(d+1)$-мерные матрицы. *Трансверсаль* латинского гиперкуба — это диагональ, содержащая все n различных значений. Число трансверсалей в гиперкубе Q будем обозначать через $T(Q)$.

Обозначим через $\mathcal{Q}_n^d$ d-мерный латинский гиперкуб порядка n такой, что $q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_d} = \alpha_0$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=0}^{d} \alpha_i \equiv 0 \bmod n$. Легко видеть, что гиперкубу $\mathcal{Q}_n^d$ соответствует $(d+1)$-мерный МДР-код $\mathcal{M}_n^{d+1}$ порядка n.

Любой латинский гиперкуб можно рассматривать как таблицу значений некоторой квазигруппы. *d-Арной квазигруппой порядка n* называется алгебраическая система, состоящая из множества $\mathbb{Z}_n^d$ и взаимно однозначно обратимой по каждой переменной d-арной операции $f\colon \mathbb{Z}_n^d \to \mathbb{Z}_n$

$$f(x_1,\ldots,x_d) = x_0.$$

Трансверсалью квазигруппы f назовём такой набор $\bigl\{\bigl(a_0^i,\ldots,a_d^i\bigr)\bigr\}_{i=1}^n$, состоящий из означиваний переменных и значения квазигруппы, что для любого $k \in \{0,\ldots,d\}$ элемент a_k^i пробегает все n возможных значений.

Несложно видеть, что любой d-арной квазигруппе порядка n взаимно однозначно соответствует d-мерный латинский гиперкуб того же порядка и количество трансверсалей в них совпадает.

6.1. Применение многомерного перманента для подсчёта числа трансверсалей. Как замечено в разд. 2, количество трансверсалей в любом $(d-1)$-мерном латинском гиперкубе равно перманенту соответствующего d-мерного МДР-кода. Рассмотрим новый способ связать число трансверсалей с многомерным перманентом и приведём несколько его применений.

Пусть Q — d-мерный латинский гиперкуб порядка n, $X = (x_1,\ldots,x_n)$ — набор переменных. Построим по гиперкубу Q гиперкуб $Q(X)$ с элементами $\{x_i\}_{i=1}^n$ такой, что элемент $q_\alpha(X)$ гиперкуба $Q(X)$ равен x_i тогда и только тогда, когда элемент q_α гиперкуба Q равен i. Очевидно, что перманент гиперкуба $Q(X)$ является полиномом степени n от переменных $x_1,\ldots,x_n$. Назовём такой полином *перманентом* латинского гиперкуба Q.

Некоторые свойства латинского гиперкуба находят своё отражение в его перманенте [23]. Используем тот факт, что количество трансверсалей $T(Q)$ в гиперкубе Q совпадает с коэффициентом перед $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ перманента гиперкуба. Это наблюдение позволяет выразить количество трансверсалей в любом латинском гиперкубе как сумму перманентов матриц специального вида.

Для полинома $p(x_1,\ldots,x_n)$ степени n от переменных $x_1,\ldots,x_n$ введём функцию $\langle r\rangle\, p(X)$, равную сумме значений полинома $p(X)$ по всем

(0,1)-векторам длины n и веса r. По принципу включения-исключения коэффициент перед $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ в полиноме $p(X)$ есть $\sum\limits_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \langle r \rangle \, p(X)$. Поэтому количество трансверсалей в гиперкубе Q удовлетворяет равенству

$$T(Q) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \langle r \rangle \operatorname{per} Q(X),$$

где $\langle r \rangle \operatorname{per} Q(X)$ можно рассматривать как сумму перманентов d-мерных (0,1)-матриц порядка n, каждая одномерная грань которых содержит ровно r единиц.

Описанное соответствие позволяет доказать, что каждый линейно-латинский гиперкуб чётного порядка имеет чётное число трансверсалей. d-Мерную матрицу Q порядка n, элементы которой принимают ровно n значений, назовём *линейно-латинским гиперкубом*, если существует такое направление одномерных граней, что в любой одномерной грани этого направления все элементы различны. Так как все латинские гиперкубы линейно-латинские, верна

Теорема 24. *Любой d-мерный латинский гиперкуб чётного порядка имеет чётное число трансверсалей.*

Понятие линейно-латинских квадратов использовалось Баласубраманианом в [11] для доказательства аналогичного двумерного утверждения. Доказательство теоремы 24 основано на следующем свойстве многомерного перманента, имеющем самостоятельную ценность.

Утверждение 10. *Пусть $A = (A_1, \ldots, A_n)$ — d-мерная целочисленная матрица порядка n, где A_i — гиперграни одного направления A. Положим $A' = (A_1 + A_2, A_2, \ldots, A_n)$ — матрица, полученная сложением двух гиперграней. Тогда перманенты A и A' имеют одинаковую чётность.*

Доказательство. Поскольку перманент — полилинейная функция относительно гиперграней, имеем

$$\operatorname{per} A' = \operatorname{per} A + \operatorname{per}(A_2, A_2, \ldots, A_n).$$

Каждой диагонали $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \ldots, \alpha^n)$ матрицы $(A_2, A_2, \ldots, A_n)$, где элемент с индексом α^i лежит в гиперграни с номером i, можно сопоставить диагональ $(\alpha^2, \alpha^1, \alpha^3 \ldots, \alpha^n)$. Произведения элементов матрицы $(A_2, A_2, \ldots, A_n)$, стоящих на этих диагоналях, одинаковы, а значит, каждая такая пара диагоналей вносит чётный вклад в её перманент. Утверждение 10 доказано.

Рассмотренная конструкция позволяет выразить через линейную комбинацию перманентов матриц специального вида не только количество трансверсалей в латинских гиперкубах, но и перманент любой многомерной матрицы.

Утверждение 11. *Пусть A — d-мерная матрица порядка n. Построим по матрице A $(d-1)$-мерный гиперкуб $Q(X)$ порядка n от переменных $x_1, \ldots, x_n$ следующим образом: элементам $\{a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1},i}\}_{i=1}^{n}$ одномерной грани матрицы A поставим в соответствие элемент $q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1}} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1},i} x_i$ гиперкуба $Q(X)$. Тогда*

$$\mathrm{per} A = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \langle r \rangle \, \mathrm{per}\, Q(X).$$

6.2. Количество трансверсалей в латинских гиперкубах и перманент. Так как количество трансверсалей в $(d-1)$-мерном латинском гиперкубе равно перманенту некоторого d-мерного МДР-кода, часто результаты, полученные относительно одного из этих объектов, применимы и ко второму объекту. Например, с помощью теоремы 18 можно оценить сверху количество трансверсалей в латинских гиперкубах [58].

Теорема 25. *Пусть $T(d,n)$ — максимальное количество трансверсалей в d-мерных латинских гиперкубах порядка n. Тогда*

$$T(d,n) \leqslant \left((1+o(1)) \frac{n^{d-1}}{e^d} \right)^n \quad \text{при } n \to \infty.$$

В частности, число трансверсалей в латинских квадратах порядка n асимптотически не превосходит $\left((1+o(1))\frac{n}{e^2}\right)^n$.

В [28] предложена вероятностная конструкция, доказывающая асимптотическую точность этой оценки для латинских квадратов и строящая бесконечную серию достигающих её латинских гиперкубов. Кроме того, в [28] приводится альтернативное доказательство теоремы 25.

Проблема оценки максимального числа трансверсалей в латинских квадратах $T(2,n)$ поставлена Уонлессом на конференции Loops'03, и до недавних пор наилучшей являлась оценка на число $T(2,n)$, найденная в [44]:

$$b_1^n \leqslant T(2,n) \leqslant b_2^n \sqrt{n} n!,$$

где $b_1 \approx 1,719$ и $b_2 \approx 0,614$, что эквивалентно $T(2,n) \leqslant \left((1+o(1))\frac{n}{e^c}\right)^n$ с $c \approx 1,48$.

Перейдём к проблеме нижней оценки числа трансверсалей в латинских гиперкубах. К сожалению, даже для латинских квадратов не предложено хорошего метода поиска трансверсали в данном квадрате. Между тем, пока не обнаружено ни одного латинского квадрата нечётного порядка без трансверсалей. Гипотеза о том, что все такие квадраты содержат трансверсаль, обычно приписывается Райзеру [52]. Предпринято несколько попыток доказательства этой гипотезы, но все они оказались безуспешными. К данному моменту с помощью численных экспериментов гипотеза проверена для латинских квадратов порядка не более 9. Более подробную информацию о трансверсалях в латинских квадратах можно найти в [62].

Вернёмся к трансверсалям в латинских гиперкубах. На основании анализа числа трансверсалей в латинских гиперкубах малых порядков и размерностей Уонлессом в [62] выдвинуты следующие гипотезы.

Гипотеза 7. *Все латинские гиперкубы нечётного порядка имеют по крайней мере одну трансверсаль.*

Гипотеза 8. *Все латинские гиперкубы нечётной размерности имеют по крайней мере одну трансверсаль.*

Заметим, что первая из этих гипотез является обобщением гипотезы Райзера на многомерный случай, а вторая — ослаблением гипотезы 2 о положительности перманента полистохастических матриц на случай МДР-кодов. Для латинских гиперкубов, имеющих достаточно хорошую структуру, можно не только установить существование трансверсалей, но и оценить их число. Для этой цели нам будет удобнее рассматривать латинский гиперкуб как квазигруппу.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_k) = x_0$ и $g(y_1, \ldots, y_l) = y_0$ — k-арная и l-арная квазигруппы порядка n. Рассмотрим $(k+l-1)$-арную квазигруппу h порядка n, заданную соотношением $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, g(y_1, \ldots, y_l)) = x_0$. Такую квазигруппу h будем называть *суперпозицией* квазигрупп f и g.

Утверждение 12. *Если квазигруппы f и g имеют $T(f)$ и $T(g)$ трансверсалей, то число трансверсалей в квазигруппе h не меньше $T(f)T(g)$:*

$$T(h) \geqslant T(f)T(g).$$

Доказательство. Выберем в квазигруппах f и g трансверсали $\big\{\big(a_0^i, a_1^i \ldots a_{k-1}^i, i\big)\big\}_{i=1}^n$ и $\big\{\big(i, b_1^i \ldots, b_l^i\big)\big\}_{i=1}^n$ соответственно. Тогда набор $\big\{\big(a_0^i, a_1^i, \ldots, a_{k-1}^i, b_1^i, \ldots, b_l^i\big)\big\}_{i=1}^n$ является трансверсалью в квазигруппе h. Утверждение 12 доказано.

Утверждение 13. *Пусть для некоторого $a \in \mathbb{Z}_n$ квазигруппа f', заданная соотношением $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, a) = x_0$, имеет $T(f')$ трансверсалей, а квазигруппа g', заданная соотношением $g(y_1, \ldots, y_l) = a$, имеет $T(g')$ трансверсалей. Тогда количество трансверсалей в суперпозиции f и g не менее $n!T(f')T(g')$:*

$$T(h) \geqslant n!T(f')T(g').$$

Доказательство. Предположим, что $\{(a_0^i, \ldots, a_{k-1}^i)\}_{i=1}^n$ является трансверсалью в квазигруппе f', а $\{(b_1^j, \ldots, b_l^j)\}_{j=1}^n$ — трансверсалью в квазигруппе g'. Тогда для любой перестановки $\sigma \in S_n$ набор

$$\{(a_0^i, \ldots, a_{k-1}^i, b_1^{\sigma(i)}, \ldots, b_l^{\sigma(i)})\}_{i=1}^n$$

будет трансверсалью в квазигруппе h. Утверждение 13 доказано.

Следствием этих утверждений является тот факт, что количество трансверсалей во многих полностью разделимых квазигруппах положительно. d-Арную квазигруппу h назовём *полностью разделимой*, если она является суперпозицией полностью разделимых квазигрупп f и g, причём 1-арные и 2-арные квазигруппы считаем полностью разделимыми.

Теорема 26. *Пусть h — d-арная полностью разделимая квазигруппа порядка n и d нечётно. Тогда соответствующий ей d-мерный латинский гиперкуб порядка n содержит по крайней мере $(nn!)^{\frac{d-1}{2}}$ трансверсалей.*

Если h — d-арная полностью разделимая квазигруппа порядка n, где d-чётно, и самая внешняя квазигруппа f в её суперпозиции имеет трансверсаль, то соответствующий d-мерный латинский гиперкуб порядка n содержит по крайней мере $(nn!)^{\lfloor\frac{d-1}{2}\rfloor}$ трансверсалей.

Заметим, что латинскому гиперкубу $\mathcal{Q}_n^d$ соответствует полностью разделимая квазигруппа, поэтому верна

Теорема 27. *Пусть размерность d чётна и порядок n чётен. Тогда $T(\mathcal{Q}_n^d) = 0$, в остальных случаях $T(\mathcal{Q}_n^d) \geqslant (nn!)^{\lfloor\frac{d-1}{2}\rfloor}$.*

6.3. Трансверсали в некоторых латинских гиперкубах. Изучение трансверсалей в латинских кубах специального вида начнём с гиперкуба $\mathcal{Q}_n^d$.

То, что любой латинский гиперкуб $\mathcal{Q}_n^d$ нечётной размерности d имеет по крайней мере одну трансверсаль, впервые получено в [56]. Наилучшую нижнюю оценку на число трансверсалей в этом гиперкубе даёт теорема 27, а верхнюю — теорема 25.

Нахождение асимптотики числа трансверсалей $\mathcal{Q}_n^d$ является сложной задачей даже для латинских квадратов $\mathcal{Q}_n^2$. Варди [61] предположил, что существуют константы $0 < c_1 < c_2 < 1$ такие, что количество трансверсалей в квадратах $\mathcal{Q}_n^2$ удовлетворяет неравенству $c_1^n n! \leqslant T\big(\mathcal{Q}_n^2\big) \leqslant c_2^n n!$ для всех нечётных $n \geqslant 3$.

После ряда работ, посвящённых нижним и верхним оценкам числа $T\big(\mathcal{Q}_n^2\big)$, гипотеза Варди была усилена Уонлессом [62].

Гипотеза 9. *Пусть n нечётно. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{T\big(\mathcal{Q}_n^2\big)}{n!}\right) = -1.$$

Из теоремы 25 следует, что этот предел не превосходит -1, а в [26] утверждается, что гипотеза 9 верна, и анонсирована даже более точная асимптотика числа $T\big(\mathcal{Q}_n^2\big)$.

Гипотезу 9 можно обобщить на многомерный случай, предположив, что если количество трансверсалей в гиперкубе $\mathcal{Q}_n^d$ не равно нулю, то оно близко к максимальному.

Гипотеза 10. *Пусть n или d нечётно. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{T\big(\mathcal{Q}_n^d\big)}{n!^{d-1}}\right) = -1.$$

Рассмотрим, сколько трансверсалей может содержаться в латинских гиперкубах малых порядков. Для любой размерности d латинский гиперкуб порядка 2 единствен и совпадает с $\mathcal{Q}_2^d$ с точностью до эквивалентности. Напомним, что число трансверсалей $\mathcal{Q}_2^d$ равно $\operatorname{per} \mathcal{M}_2^{d+1}$. Используя формулы из примера 3 разд. 1, получаем, что $T\big(\mathcal{Q}_2^d\big) = 0$ для чётного d и $T\big(\mathcal{Q}_2^d\big) = 2^{d-1}$ — для нечётного.

Для порядка 3 d-мерный латинский гиперкуб $\mathcal{Q}_3^d$ также единствен. Для подсчёта числа трансверсалей $\mathcal{Q}_3^d$ выберем в нём $(d-2)$-мерные грани диагональным образом и составим из них $(d-1)$-мерные гиперкубы. Заметим, что в трёх из шести возможных случаев получившиеся гиперкубы являются латинскими, а в другой половине случаев гиперграни гиперкубов заполнены одинаково. Таким образом, выполнено следующее рекуррентное соотношение:

$$T\big(\mathcal{Q}_3^d\big) = 3T\big(\mathcal{Q}_3^{d-1}\big) + 18T\big(\mathcal{Q}_3^{d-2}\big), \quad T\big(\mathcal{Q}_3^2\big) = 3, \quad T\big(\mathcal{Q}_3^3\big) = 27.$$

Решив это соотношение, получаем $T\big(\mathcal{Q}_3^d\big) = 3^{d-2}(2^d - (-1)^d)$ — последовательность A080424 в [5].

Количество неэквивалентных d-мерных латинских гиперкубов порядка 4 увеличивается экспоненциально с ростом d. Пока не известно, существуют ли другие латинские гиперкубы порядка 4, кроме $\mathcal{Q}_4^d$ с чётным d, которые не имеют трансверсалей. С помощью утверждений 12 и 13 из разд. 5, а также с помощью теоремы Д. С. Кротова и В. Н. Потапова о характеризации квазигрупп порядка 4 [35] можно получить, что верна

Теорема 28. *Любой латинский гиперкуб порядка* 4 *и нечётной размерности имеет трансверсаль.*

В заключение приведём некоторые результаты относительно числа трансверсалей в латинских гиперкубах малых размерностей и порядков. В качестве материала для этой части были использованы гиперкубы, перечисленные Маккаем и Уонлессом в [45].

Существует всего 5 неэквивалентных латинских кубов порядка 4. Наибольшее количество трансверсалей содержится в кубах

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{matrix} \times \begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \times \begin{matrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{matrix}$$

и равно 256, при этом последний из них эквивалентен кубу $\mathcal{Q}_4^3$. Минимальное количество трансверсалей равно 96 и содержится в кубе

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \times \begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{matrix} \times \begin{matrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{matrix}.$$

Два других латинских куба порядка 4 содержат соответственно 208 и 128 трансверсалей.

Для порядка 5 существует 15 неэквивалентных латинских кубов, и все они имеют разное число трансверсалей. Максимальное количество трансверсалей, равное 3325, имеет куб $\mathcal{Q}_5^3$, а минимальное число трансверсалей равно 859. Также среди них присутствуют латинские кубы, которые имеют чётное количество трансверсалей, а значит, в многомерном случае, как и в двумерном, из нечётности порядка латинского гиперкуба не следует нечётности числа его трансверсалей.

Неэквивалентных латинских кубов порядка 6 насчитывается уже более двухсот тысяч. Максимальное количество трансверсалей (57024) имеет куб $\mathcal{Q}_6^3$, а минимальное количество трансверсалей (7632) достигается на двух латинских кубах, один из которых имеет следующий вид:

$$\begin{matrix} \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{4} & \mathit{5} \\ \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{0} & \mathit{4} & \mathit{5} & \mathit{3} \\ \mathit{2} & \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{5} & \mathit{3} & \mathit{4} \\ \mathit{3} & \mathit{4} & \mathit{5} & \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{2} \\ \mathit{4} & \mathit{5} & \mathit{3} & \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{0} \\ \mathit{5} & \mathit{3} & \mathit{4} & \mathit{2} & \mathit{0} & \mathit{1} \end{matrix}, \quad \text{где} \quad \begin{matrix} \mathit{0} = & 0\,1\,2\,3\,4\,5 \\ \mathit{1} = & 1\,0\,3\,2\,5\,4 \\ \mathit{2} = & 2\,3\,4\,5\,0\,1 \\ \mathit{3} = & 3\,2\,5\,4\,1\,0 \\ \mathit{4} = & 4\,5\,0\,1\,2\,3 \\ \mathit{5} = & 5\,4\,1\,0\,3\,2 \end{matrix}.$$

Можно проверить, что структура этого куба сходна со структурой куба порядка 4 с минимальным числом трансверсалей. Также заметим, что четырёхмерный МДР-код порядка 6, соответствующий этому латинскому кубу, имеет перманент, меньший перманента равномерной матрицы J_6^4, и является контрпримером к тривиальному обобщению гипотезы Ван дер Вардена на многомерный случай.

Рассмотрим теперь четырёхмерные латинские гиперкубы. Количество неэквивалентных 4-мерных латинских гиперкубов порядка 4 равно 26. Только один из этих гиперкубов, а именно гиперкуб $\mathcal{Q}_4^4$, не имеет трансверсалей. Максимальное количество трансверсалей (5120) содержится в гиперкубе

$$\begin{matrix} \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} \\ \mathit{1} & \mathit{0} & \mathit{3} & \mathit{2} \\ \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{0} & \mathit{1} \\ \mathit{3} & \mathit{2} & \mathit{1} & \mathit{0} \end{matrix},$$

где

$$\mathit{0} = \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}, \quad \mathit{1} = \begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{matrix}, \quad \mathit{2} = \begin{matrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{matrix}, \quad \mathit{3} = \begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}.$$

Для порядка 5 существует 86 четырёхмерных латинских гиперкубов, и все они содержат трансверсали. Минимальное количество их трансверсалей равно 60843 и содержится в гиперкубе, которому соответствует некоторая разделимая квазигруппа, а максимальное число (321375) содержится в гиперкубе $\mathcal{Q}_5^4$.

7. Условия положительности многомерного перманента

Напомним, что в двумерном случае характеризацию матриц с положительным перманентом даёт теорема Кёнига — Фробениуса (теорема 8). В качестве возможного обобщения этой теоремы на многомерные матрицы можно предложить следующее утверждение.

Гипотеза 11. *Пусть A — неотрицательная матрица чётной размерности. Если для габаритов $x_1 \times \cdots \times x_d$ любой нулевой подматрицы матрицы A выполнено $\max\limits_{i \neq j}(x_i + x_j) \leqslant n$, то перманент матрицы A положителен.*

Так как двумерная грань любой полистохастической матрицы есть дважды стохастическая матрица, все полистохастические матрицы удовлетворяют условиям этой гипотезы. Для матриц нечётной размерности аналог гипотезы 11 неверен из-за существования полистохастических матриц с нулевым перманентом.

Другой возможный подход к характеризации многомерных матриц с положительным перманентом заключается в описании экстремальных матриц. (0,1)-Матрицу будем называть *экстремальной*, если её перманент равен нулю и при замене любого нулевого элемента на единицу перманент увеличивается. Многомерную (0,1)-матрицу назовём *максимальной*, если при замене любого нулевого элемента на единицу её перманент увеличивается, и *минимальной*, если замена любого единичного элемента нулём уменьшает перманент. Заметим, что экстремальная матрица — эта максимальная матрица с нулевым перманентом.

Как частный случай гипотезы 4 можно предположить, что верна

Гипотеза 12. *Пусть A — d-мерный МДР-код порядка n, где d чётно. Тогда A — минимальная матрица.*

Как показано в разд. 2, перманент любой d-мерной (0,1)-матрицы совпадает с количеством 1-факторов в некотором d-дольном сбалансированном гиперграфе, а значит, любые условия, гарантирующие существование 1-фактора в таком гиперграфе, можно переформулировать как условия положительности перманента. Одно из таких условий приводится в [9].

Теорема 29. *Пусть A — d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n. Если существуют два таких направления одномерных граней, что все грани одного направления содержат строго больше $n/2$ единиц, а второго — не менее $n/2$ единиц, то перманент матрицы A больше нуля.*

Заметим, что в этой теореме условие наличия одномерной грани, в ко-

торой больше половины единичных элементов, не может быть ослаблено, так как существуют многомерные (0,1)-матрицы с нулевым перманентом, в которых каждая одномерная грань заполнена единицами наполовину (пример 4).

Многие условия существования 1-факторов в гиперграфах являются асимптотическими и начинают работать только если гиперграф имеет достаточно большое число вершин. С их помощью можно получать условия на положительность перманента матриц достаточно большого порядка. Например, один из результатов работы [41] может быть переформулирован следующим образом.

Теорема 30. *Введём функцию*

$$t(n) = \begin{cases} n^2 - \left(n - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor\right)\left(n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 1, & \text{если } n \not\equiv 2 \bmod 3, \\ n^2 - \left(n - \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor\right)^2 + 2, & \text{если } n \equiv 2 \bmod 3. \end{cases}$$

Пусть A — неотрицательная трёхмерная матрица порядка n, каждая гипергрань которой содержит не менее $t(n)$ ненулевых элементов. Тогда, начиная с некоторого n, перманент матрицы A больше нуля. Кроме того, если условие на количество положительных элементов в гипергранях не будет выполнено, то найдётся матрица с нулевым перманентом.

Другое асимптотическое условие на наличие 1-факторов в d-дольном гиперграфе, доказанное в [48], позволяет охарактеризовать матрицы с положительным перманентом с помощью числа единиц в гранях произвольной размерности.

Теорема 31. *Пусть $1 \leqslant k \leqslant d-1$ и A — d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n. Выберем некоторое направление k-мерных граней и обозначим через N_k и N_{d-k} минимальные количества единиц в k-мерных гранях этого направления и в $(d-k)$-мерных гранях ортогонального направления соответственно. Тогда если $\frac{N_k}{n^k} + \frac{N_{d-k}}{n^{d-k}} \geqslant 1 + o(1)$ при $n \to \infty$, то* $\mathrm{per} A > 0$.

Для поиска матриц с положительным перманентом можно использовать не только d-дольные гиперграфы, но и произвольные d-униформные гиперграфы. В частности, из теоремы 2 следует, что перманент матрицы смежности любого гиперграфа, содержащего 1-фактор, всегда положителен. Конечно, далеко не все многомерные (0,1)-матрицы могут быть матрицами смежности гиперграфа. d-Мерную (0,1)-матрицу порядка n, где d делит n, будем называть *гиперграфовой*, если она является матрицей смежности некоторого d-униформного гиперграфа на n вершинах.

В последнее время опубликовано большое число работ, в которых

рассматривается вопрос существования 1-факторов в униформных гиперграфах. Поэтому приведём лишь несколько приложений этих работ к многомерных матрицам.

Один из первых результатов о существовании 1-факторов в гиперграфах получен в [22]. Для гиперграфовых матриц из него следует

Теорема 32. *Если любая гипергрань d-мерной гиперграфовой матрицы порядка n содержит не менее $(1-1/d)\frac{(n-1)!}{(n-d)!}$ единиц, то её перманент больше нуля.*

Из определения гиперграфовой матрицы следует, что не все её грани содержат единицы. k-Мерную грань d-мерной гиперграфовой матрицы порядка n будем называть *существенной*, если в ней могут содержаться единицы.

Обозначим через $t(d,n)$ минимальное количество единиц в существенных одномерных гранях d-мерной гиперграфовой матрицы порядка n, достаточное для того, чтобы любой соответствующей ей гиперграф имел 1-фактор. Другими словами, если все существенные одномерные грани гиперграфовой матрицы содержат больше чем $t(d,n)$ единиц, то её перманент больше нуля. В [51] для величины $t(d,n)$ получены следующие результаты.

Теорема 33. *Для всех $d \geqslant 3$ и достаточно больших n, кратных d, количество единиц в существенных одномерных гранях d-мерных гиперграфовых матриц порядка n, достаточное для существования 1-фактора, равно*

$$t(d,n) = \begin{cases} n/2+3-d, & \text{если } d/2 \text{ чётно и } n/d \text{ нечётно}, \\ n/2+5/2-d, & \text{если } d \text{ нечётно и } (n-1)/2 \text{ нечётно}, \\ n/2+3/2-d, & \text{если } d/2 \text{ чётно и } (n-1)/2 \text{ чётно}, \\ n/2+2-d & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для гиперграфовых матриц условия положительности перманента можно сформулировать не только с помощью числа единиц в гипергранях и существенных одномерных гранях, но и с использованием числа единиц в существенных гранях другой размерности. Переформулировав результат из [48], получаем следующее достаточное условие положительности перманента гиперграфовых матриц, которое является асимптотически точным.

Теорема 34. *Пусть A — гиперграфовая d-мерная матрица порядка n. Если для $k < d/2$ любая существенная k-мерная грань A содержит не менее $(1/2+o(1))\frac{n!}{(n-k)!}$ единиц, то перманент матрицы A больше нуля.*

Для $k \geqslant d/2$ достаточно хорошая оценка на количество единиц в существенных k-мерных гранях гиперграфовых матриц, гарантирующая положительность перманента, пока не получена. В [36] Куном и Остусом выдвинута гипотеза о том, какая степень подмножеств из k вершин гиперграфа будет достаточной для существования в нём 1-фактора. Для гиперграфовых матриц эта гипотеза может быть переформулирована следующим образом.

Гипотеза 13. *Существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant n_0$ и всех d-мерных гиперграфовых матриц A порядка n, если каждая существенная k-мерная грань A содержит не менее*

$$\max\left\{\frac{1}{2}, 1 - \left(\frac{d-1}{d}\right)^{d-k}\right\}\frac{(n-d+k)!}{(n-d)!}(1+o(1))$$

единиц, то перманент матрицы A больше нуля.

В заключение приведём простой критерий положительности перманента симметричных матриц. d-Мерную матрицу A порядка n назовём *симметричной*, если $a_\alpha = a_\beta$ для любых индексов α и β, связанных некоторой перестановкой координат. Другими словами, матрица симметрична, если она не меняется при транспонировании. Заметим, что матрицы смежности гиперграфов — многомерные симметричные (0,1)-матрицы, у которых на главной диагонали любой двумерной грани стоят нули.

Для матрицы A построим множество $N(A) = \{N_1, \dots, N_k\}$, где N_i пробегает все d-элементные мультимножества из элементов $\{1, \dots, n\}$, соответствующие индексам единичных элементов матрицы A. С помощью теоремы Холла о существовании системы различных представителей можно доказать

Утверждение 14. *Пусть A — симметричная d-мерная матрица порядка n. Если из элементов множества $N(A)$ можно выбрать такое семейство множеств $\{S_1, \dots, S_n\}$, что каждое число $m \in \{1, \dots, n\}$ содержится в объединении этих множеств как мультимножестве ровно d раз, то перманент матрицы A больше нуля.*

Для d-униформных гиперграфов из этого утверждения легко получить

Следствие 2. *Любой d-регулярный d-униформный гиперграф имеет правильную ориентацию.*

8. Основные проблемы теории многомерных перманентов

1. Найти полезные для приложений достаточные условия положительности перманента k-стохастических матриц и произвольных многомерных (0,1)-матриц.

2. Исследовать, каким образом меняется перманент при различных преобразованиях многомерных матриц (например, в конструкциях полистохастических матриц из разд. 5).

3. Обобщить на многомерный случай теорему Брэгмана так, чтобы равенство в ней достигалось на как можно более широком классе матриц.

4. Описать матрицы, на которых достигается минимум и максимум перманента полистохастических матриц для чётных и нечётных размерностей.

5. Предложить новые конструкции многомерных матриц, перманент которых позволяет найти количество известных комбинаторных объектов.

6. Усилить известные оценки перманентов многомерных матриц из разд. 2, выражающих число различных комбинаторных объектов.

7. Описать вершины многогранника полистохастических и k-стохастических матриц и исследовать свойства их перманентов.

8. Найти достижимую оценку числа 1-факторов в гиперграфе в терминах перманента его матрицы смежности.

Автор благодарен В. Н. Потапову за большую помощь, оказанную при подготовке этой работы, и С. В. Августиновичу за полезные обсуждения и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В.** Многомерные перманенты в задачах перечисления // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15, № 5. С. 3–5.
2. **Брэгман Л. М.** Некоторые свойства неотрицательных матриц и их перманентов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211, № 1. С. 27–30.
3. **Егорычев Г. П.** Решение проблемы Ван дер Вардена для перманентов // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 6. С. 65–71.
4. **Минк Х.** Перманенты. М.: Мир, 1982. 213 с.
5. Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей // https://oeis.org.
6. **Соколов Н. П.** Пространственные матрицы и их приложения. М.: Физматлит, 1960. 299 с.
7. **Соколов Н. П.** Введение в теорию многомерных матриц. Киев: Наукова думка, 1972. 177 с.

8. **Фаликман Д. И.** Доказательство гипотезы Ван дер Вардена о перманенте дважды стохастической матрицы // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 6. С. 931–938.
9. **Aharoni R., Georgakopoulos A., Sprüssel P.** Perfect matchings in r-partite r-graphs // Eur. J. Comb. 2009. Vol. 30. P. 39–42.
10. **Alon N., Friedland S.** The maximum number of perfect matchings in graphs with a given degree sequence // Electron. J. Comb. 2008. Vol. 15, No. N13. P. 1–2.
11. **Balasubramanian L.** On transversals in Latin squares // Linear Algebra Appl. 1990. Vol. 131. P. 125–129.
12. **Bapat R. B.** A stronger form of the Egorychev–Falikman theorem on permanents // Linear Algebra Appl. 1984. Vol. 63. P. 95–100.
13. **Baranyai Zs.** On the factorization of the complete uniform hypergraph // Infinite and Finite Sets (Hajnal A., Rado T., Sós V. T., eds.). Vol. 1. Amsterdam: North-Holland, 1973. P. 91–108. (Colloq. Math. Soc. J. Bolyai; Vol. 10.)
14. **Barvinok A., Samorodnitsky A.** Computing the partition function for perfect matchings in a hypergraph // Comb. Probab. Comput. 2011. Vol. 20, No. 6. P. 815–835.
15. **Brualdi R. A., Csima J.** Extremal plane stochastic matrices of dimension three // Linear Algebra Appl. 1975. Vol. 11. P. 105–133.
16. **Cauchy A.-L.** Mèmoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions operées entre les variables qu'elles renferment // J. Éc. Polytech., Math. 1815. Vol. 10, No. 17. P. 29–112.
17. **Cayley A.** On the theory of determinants // Trans. Camb. Philos. Soc. 1849. Vol. 8. P. 75–88.
18. **Cheon G.-S., Wanless I. M.** An update on Minc's survey of open problems involving permanents // Linear Algebra Appl. 2005. Vol. 403. P. 314–342.
19. **Cifuentes D., Parrilo P. A.** An efficient tree decomposition method for permanents and mixed discriminants // Linear Algebra Appl. 2016. Vol. 493. P. 45–81.
20. **Csima J.** Multidimensional stochastic matrices and patterns // J. Algebra. 1970. Vol. 14. P. 194–202.
21. **Cutler J., Radcliffe A. J.** An entropy proof of the Kahn–Lovàsz theorem // Electron. J. Comb. 2011. Vol. 18, No. 1. P10, 1–9.
22. **Daykin D. E., Häggkvist R.** Degrees giving independent edges in a hypergraph // Bull. Aust. Math. Soc. 1981. Vol. 23, No. 1. P. 103–109.
23. **Donovan D., Johnson K., Wanless I. M.** Permanents and determinants of Latin squares // J. Comb. Des. 2016. Vol. 24, No. 3. P. 132–148.
24. **Dow S. J., Gibson P. M.** An upper bound for the permanent of a 3-dimensional (0,1)-matrix // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. Vol. 99, No. 1. P. 29–34.

25. Dow S. J., Gibson P. M. Permanents of d-dimensional matrices // Linear Algebra Appl. 1987. Vol. 90. P. 133–145.

26. Eberhard S., Manners F., Mrazović R. Additive triples of bijections, or the toroidal semiqueens problem // arXiv:1510.05987v3.

27. Gibson P. M. Combinatorial matrix functions and 1-factors of graphs // SIAM J. Appl. Math. 1970. Vol. 19. P. 330–333.

28. Glebov R., Luria Z. On the maximum number of Latin transversals // J. Comb. Theory, Ser. A. 2016. Vol. 141. P. 136–146.

29. Gurvits L. Van der Waerden/Schrijver–Valiant like conjectures and stable (aka hyperbolic) homogeneous polynomials: One theorem for all // Electron. J. Comb. 2008. Vol. 15. P. 1–26. R66.

30. Gyires B. Elementary proof for a Van der Waerden's conjecture and related theorems // Comput. Math. Appl. 1996. Vol. 31, No. 10. P. 7–21.

31. Gyires B. Contribution to van der Waerden's conjecture // Comput. Math. Appl. 2001. Vol. 42. P. 1431–1437.

32. Hell S. On the number of Birch partitions // Discrete Comput. Geom. 2008. Vol. 40. P. 586–594.

33. Hell S. On the number of colored Birch and Tverberg partitions // Electron. J. Comb. 2014. Vol. 21, No. 3. P3.23.

34. Jurkat W. B., Ryser H. J. Extremal configurations and decomposition theorems // J. Algebra. 1968. Vol. 8. P. 194–222.

35. Krotov D. S., Potapov V. N. n-Ary quasigroups of order 4 // SIAM J. Discrete Math. 2009. Vol. 23, No. 2. P. 561–570.

36. Kühn D., Osthus D. Embedding large subgraphs into dense graphs // Surv. Comb. New York: Cambridge Univ. Press, 2009. P. 137–167 (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 365).

37. Laurent M., Schriver A. On Leonid Gurvits's proof for permanents // Amer. Math. Mon. 2010. Vol. 117. P. 903–911.

38. Linial N., Luria Z. An upper bound on the number of Steiner triple systems // Random Struct. Algorithms. 2013. Vol. 34, No 4. P. 399–406.

39. Linial N., Luria Z. An upper bound on the number of high-dimensional permutations // Combinatorica. 2014. Vol. 34, No. 4. P. 471–486.

40. Linial N., Luria Z. On the vertices of the d-dimensional Birkhoff polytope // Discrete Comput. Geom. 2014. Vol. 51. P. 161–170.

41. Lo A., Markström K. Perfect matchings in 3-partite 3-uniform hypergraphs // J. Comb. Theory, Ser. A. 2014. Vol. 127. P. 22–57.

42. Marcus M., Minc H. On a conjecture of B. L. van der Waerden // Proc. Camb. Philos. Soc. 1967. Vol. 63. P. 305–309.

43. Marcus M., Newman M. On the minimum of the permanent of a doubly stochastic matrix // Duke Math. J. 1959. Vol. 26. P. 61–72.

44. McKay B. D., McLeod J. C., Wanless I. M. The number of transversals in a Latin square // Des. Codes Cryptogr. 2006. Vol. 40. P. 269–284.

45. McKay B. D., Wanless I. M. A census of small Latin hypercubes // SIAM J. Discrete Math. 2008. Vol. 22. P. 719–736.

46. Minc H. Upper bound for permanents of (0,1)-matrices // Bull. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 69. P. 789–791.

47. Muir T. A treatise on the theory of determinants. London: Macmillan and Co., 1882. 774 p.

48. Pikhurko O. Perfect matchings and K_4^3-tilings in hypergraphs of large codegree // Graphs Comb. 2008. Vol. 24, No. 4. P. 391–404.

49. Potapov V. N. On the multidimensional permanent and q-ary designs // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2014. Vol. 11. P. 451–456.

50. Radhakrishnan J. An entropy proof of Bregman's theorem // J. Comb. Theory, Ser. A. 1997. Vol. 77, No. 1. P. 161–164.

51. Rödl V., Ruciǹski A., Szemerèdi E. Perfect matchings in large uniform hypergraphs with large minimum collective degree // J. Comb. Theory, Ser. A. 2009. Vol. 116, No. 3. P. 613–636.

52. Ryser H. J. Neuere Probleme der Kombinatorik // Vortrage über Kombinatorik (Germany, Oberwolfach, July 24–29, 1967). Oberwolfach: Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1967. P. 69–91.

53. Schrijver A. A short proof of Minc's conjecture // J. Comb. Theory, Ser. A. 1978. Vol. 25, No. 1. P. 80–83.

54. Schrijver A. Counting 1-factors in regular bipartite graphs // J. Comb. Theory, Ser. B. 1998. Vol. 72, No. 1. P. 122–135.

55. Soules G. W. Permanental bounds for nonnegative matrices via decomposition // Linear Algebra Appl. 2005. Vol. 394. P. 73–89.

56. Sun Z.-W. An additive theorem and restricted sumsets // Math. Res. Lett. 2008. Vol. 15, No. 6. P. 1263–1276.

57. Taranenko A. A. Upper bounds on the permanent of multidimensional (0,1)-matrices // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2014. Vol. 11. P. 958–965.

58. Taranenko A. A. Multidimensional permanents and an upper bound on the number of transversals in Latin squares // J. Comb. Des. 2015. Vol. 23. P. 305–320.

59. Taranenko A. A. Upper bounds on the numbers of 1-factors and 1-factorizations of hypergraphs // arXiv:1503.08270v1.

60. Tichy M. C. Sampling of partially distinguishable bosons and the relation to the multidimensional permanent // Phys. Rev. A. 2015. Vol. 91, No. 2. 022316. P. 1–13.

61. Vardi I. Computational recreations in mathematics. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1991.

62. Wanless I. M. Transversals in Latin squares: a survey // Surv. Comb. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011. P. 403–437 (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 392).

63. **Wanless I. M., Webb B. S.** The existence of Latin squares without orthogonal mates // Des. Codes Cryptogr. 2006. Vol. 40. P. 131–135.

Тараненко Анна Александровна

Статья поступила
13 ноября 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
October–December 2016. Volume 23, No. 4. P. 35–101

UDC 519.1 DOI: 10.17377/daio.2016.23.517

PERMANENTS OF MULTIDIMENSIONAL MATRICES: PROPERTIES AND APPLICATIONS

A. A. Taranenko[1]
[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
e-mail: taattg@mail.ru

Abstract. The permanent of a multidimensional matrix is the sum of the products of entries over all diagonals. In this survey, we consider the basic properties of the multidimensional permanent, sufficient conditions for its positivity, available upper bounds, and the specifics of the permanents of polystochastic matrices. We prove that the number of various combinatorial objects can be expressed via multidimensional permanents. Special attention is paid to the number of 1-factors of uniform hypergraphs and the number of transversals in Latin hypercubes. Tabl. 1, bibliogr. 63.

Keywords: permanent, multidimensional matrix, stochastic matrix, polystochastic matrix, transversal in a Latin hypercube, 1-factor of a uniform hypergraph.

REFERENCES

1. **S. V. Avgustinovich,** Multidimensional permanents in enumeration problems, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **15**, No. 5, 3–5, 2008. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **4**, No. 1, 19–20, 2010.
2. **L. M. Bregman,** Some properties of nonnegative matrices and their permanents, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **211**, No. 1, 27–30, 1973. Translated in *Sov. Math., Dokl.,* **14**, No. 1, 945–949, 1973.
3. **G. P. Egorychev,** Proof of the van der Waerden conjecture for permanents, *Sib. Mat. Zh.,* **22**, No. 6, 65–71, 1981. Translated in *Sib. Math. J.,* **22**, No. 6, 854–859, 1981.
4. **H. Minc,** *Permanents,* Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 1978 (Encycl. Math. Its Appl., Vol. 6). Translated under the title *Permanenty,* Mir, Moscow, 1982.
5. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at http://oeis.org. Accessed Apr. 25, 2016.

6. **N. P. Sokolov,** *Prostranstvennye matritsy i ikh prilozheniya* (Space Matrices and Their Applications), Fizmatlit, Moscow, 1960.
7. **N. P. Sokolov,** *Vvedenie v teoriyu mnogomernykh matrits* (Introduction to the Theory of Multidimensional Matrices), Naukova Dumka, Kiev, 1972.
8. **D. I. Falikman,** Proof of the van der Waerden conjecture regarding the permanent of a doubly stochastic matrix, *Mat. Zametki,* **29**, No. 6, 931–938, 1981. Translated in *Math. Notes Acad. Sci. USSR,* **29**, No. 6, 475–479, 1981.
9. **R. Aharoni, A. Georgakopoulos,** and **P. Sprüssel,** Perfect matchings in r-partite r-graphs, *Eur. J. Comb.,* **30**, 39–42, 2009.
10. **N. Alon** and **S. Friedland**, The maximum number of perfect matchings in graphs with a given degree sequence, *Electron. J. Comb.,* **15**, No. N13, 1–2, 2008.
11. **L. Balasubramanian,** On transversals in Latin squares, *Linear Algebra Appl.,* **131**, 125–129, 1990.
12. **R. B. Bapat,** A stronger form of the Egorychev–Falikman theorem on permanents, *Linear Algebra Appl.,* **63**, 95–100, 1984.
13. **Zs. Baranyai,** On the factorization of the complete uniform hypergraph, in A. Hajnal, T. Rado, V. T. Sós, eds., *Infinite and Finite Sets,* Vol. 1, pp. 91–108, North-Holland, Amsterdam, 1975 (Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 10).
14. **A. Barvinok** and **A. Samorodnitsky,** Computing the partition function for perfect matchings in a hypergraph, *Comb. Probab. Comput.,* **20**, No. 6, 815–835, 2011.
15. **R. A. Brualdi** and **J. Csima,** Extremal plane stochastic matrices of dimension three, *Linear Algebra Appl.,* **11**, 105–133, 1975.
16. **A.-L. Cauchy,** Mèmoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment, *J. Éc. Polytech.,* **10**, No. 17, 29–112, 1815 [French].
17. **A. Cayley,** On the theory of determinants, *Trans. Camb. Philos. Soc.,* **8**, 75–88, 1849.
18. **G.-S. Cheon** and **I. M. Wanless,** An update on Minc' survey of open problems involving permanents, *Linear Algebra Appl.,* **403**, 314–342, 2005.
19. **D. Cifuentes** and **P. A. Parrilo,** An efficient tree decomposition method for permanents and mixed discriminants, *Linear Algebra Appl.,* **493**, 45–81, 2016.
20. **J. Csima,** Multidimensional stochastic matrices and patterns, *J. Algebra,* **14**, 194–202, 1970.
21. **J. Cutler** and **A. J. Radcliffe,** An entropy proof of the Kahn–Lovàsz theorem, *Electron. J. Comb.,* **18**, No. 1, P10, 1–9, 2011.
22. **D. E. Daykin** and **R. Häggkvist,** Degrees giving independent edges in a hypergraph, *Bull. Aust. Math. Soc.,* **23**, No. 1, 103–109, 1981.
23. **D. Donovan, K. Johnson,** and **I. M. Wanless,** Permanents and determinants of Latin squares, *J. Comb. Des.,* **24**, No. 3, 132–148, 2016.

24. S. J. Dow and **P. M. Gibson,** An upper bound for the permanent of a 3-dimensional (0,1)-matrix, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **99**, No. 1, 29–34, 1987.

25. S. J. Dow and **P. M. Gibson,** Permanents of d-dimensional matrices, *Linear Algebra Appl.,* **90**, 133–145, 1987.

26. S. Eberhard, F. Manners, and **R. Mrazović,** Additive triples of bijections, or the toroidal semiqueens problem, 2016 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1510.05987).

27. P. M. Gibson, Combinatorial matrix functions and 1-factors of graphs, *SIAM J. Appl. Math.,* **19**, 330–333, 1970.

28. R. Glebov and **Z. Luria,** On the maximum number of Latin transversals, *J. Comb. Theory, Ser. A,* **141**, 136–146, 2016.

29. L. Gurvits, Van der Waerden/Schrijver–Valiant like conjectures and stable (aka hyperbolic) homogeneous polynomials: One theorem for all, *Electron. J. Comb.,* **15**, No. R66, 1–26, 2008.

30. B. Gyires, Elementary proof for van der Waerden's conjecture and related theorems, *Comput. Math. Appl.,* **31**, No. 10, 7–21, 1996.

31. B. Gyires, Contribution to van der Waerden's conjecture, *Comput. Math. Appl.,* **42**, No. 10–11, 1431–1437, 2001.

32. S. Hell, On the number of Birch partitions, *Discrete Comput. Geom.,* **40**, 586–594, 2008.

33. S. Hell, On the number of colored Birch and Tverberg partitions, *Electron. J. Comb.,* **21**, No. 3, P3.23, 2014.

34. W. B. Jurkat and **H. J. Ryser,** Extremal configurations and decomposition theorems, *J. Algebra.,* **8**, 194–222, 1968.

35. D. S. Krotov and **V. N. Potapov,** n-Ary quasigroups of order 4, *SIAM J. Discrete Math.,* **23**, No. 2, 561–570, 2009.

36. D. Kühn and **D. Osthus,** Embedding large subgraphs into dense graphs, in *Surveys in Combinatorics 2009,* pp. 137–167, Cambridge Univ. Press, New York, 2009 (Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., Vol. 365).

37. M. Laurent and **A. Schriver,** On Leonid Gurvits's proof for permanents, *Amer. Math. Mon.,* **117**, 903–911, 2010.

38. N. Linial and **Z. Luria,** An upper bound on the number of Steiner triple systems, *Random Struct. Algorithms,* **34**, No. 4, 399–406, 2013.

39. N. Linial and **Z. Luria,** An upper bound on the number of high-dimensional permutations, *Combinatorica,* **34**, No. 4, 471–486, 2014.

40. N. Linial and **Z. Luria,** On the vertices of the d-dimensional Birkhoff polytope, *Discrete Comput. Geom.,* **51**, 161–170, 2014.

41. A. Lo and **K. Markström,** Perfect matchings in 3-partite 3-uniform hypergraphs, *J. Comb. Theory, Ser. A,* **127**, 22–57, 2014.

42. M. Marcus and **H. Minc,** On a conjecture of B. L. van der Waerden, *Proc. Camb. Philos. Soc.,* **63**, 305–309, 1967.

43. **M. Marcus** and **M. Newman,** On the minimum of the permanent of a doubly stochastic matrix, *Duke Math. J.,* **26**, 61–72, 1959.

44. **B. D. McKay, J. C. McLeod,** and **I. M. Wanless,** The number of transversals in a Latin square, *Des. Codes Cryptogr.,* **40**, 269–284, 2006.

45. **B. D. McKay** and **I. M. Wanless,** A census of small Latin hypercubes, *SIAM J. Discrete Math.,* **22**, 719–736, 2008.

46. **H. Minc,** Upper bound for permanents of (0,1)-matrices, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **69**, 789–791, 1963.

47. **T. Muir,** *A Treatise on the Theory of Determinants,* Macmillan Co., London, 1933.

48. **O. Pikhurko,** Perfect matchings and K_4^3-tilings in hypergraphs of large codegree, *Graphs Comb.,* **24**, No. 4, 391–404, 2008.

49. **V. N. Potapov,** On the multidimensional permanent and q-ary designs, *Sib. Elektron. Mat. Izv.,* **11**, 451–456, 2014.

50. **J. Radhakrishnan,** An entropy proof of Bregman's theorem, *J. Comb. Theory, Ser. A,* **77**, No. 1, 161–164, 1997.

51. **V. Rödl, A. Ruciǹski,** and **E. Szemerèdi,** Perfect matchings in large uniform hypergraphs with large minimum collective degree, *J. Comb. Theory, Ser. A,* **116**, No. 3, 613–636, 2009.

52. **H. J. Ryser,** Neuere Probleme der Kombinatorik, in *Vorträge über Kombinatorik, Oberwolfach, Germany, July 24–29, 1967*, pp. 69–91, Math. Forschungsinst. Oberwolfach, Oberwolfach, 1967 [German].

53. **A. Schrijver,** A short proof of Minc's conjecture, *J. Comb. Theory, Ser. A,* **25**, No. 1, 80–83, 1978.

54. **A. Schrijver,** Counting 1-factors in regular bipartite graphs, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **72**, No. 1, 122–135, 1998.

55. **G. W. Soules,** Permanental bounds for nonnegative matrices via decomposition, *Linear Algebra Appl.,* **394**, 73–89, 2005.

56. **Z.-W. Sun** An additive theorem and restricted sumsets, *Math. Res. Lett.,* **15**, No. 6, 1263–1276, 2008.

57. **A. A. Taranenko,** Upper bounds on the permanent of multidimensional (0,1)-matrices, *Sib. Elektron. Mat. Izv.,* **11**, 958–965, 2014.

58. **A. A. Taranenko,** Multidimensional permanents and an upper bound on the number of transversals in Latin squares, *J. Comb. Des.,* **23**, 305–320, 2015.

59. **A. A. Taranenko,** Upper bounds on the numbers of 1-factors and 1-factorizations of hypergraphs, 2015 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1503.08270).

60. **M. C. Tichy,** Sampling of partially distinguishable bosons and the relation to the multidimensional permanent, *Phys. Rev. A,* **91**, No. 2, 022316, 1–13, 2015.

61. I. Vardi, *Computational Recreations in Mathematics,* Addison-Wesley, Redwood City, 1991.

62. I. M. Wanless, Transversals in Latin squares: A survey, in *Surveys in Combinatorics 2011,* pp. 403–437, Cambridge Univ. Press, New York, 2011 (Lon. Math. Soc. Lect. Note Ser., Vol. 392).

63. I. M. Wanless and **B. S. Webb,** The existence of Latin squares without orthogonal mates, *Des. Codes Cryptogr.,* **40**, 131–135, 2006.

Anna A. Taranenko

Received
13 November 2015