ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2016. Том 23, № 4. С. 26–34

УДК 519.7 DOI: 10.17377/daio.2016.23.533

О ВЛОЖЕНИИ РАВНОВЕСНЫХ КОДОВ В СОВЕРШЕННЫЕ КОДЫ *)

А. М. Романов[1]
[1]Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
e-mail: rom@math.nsc.ru

Аннотация. Показано, что каждый q-ичный равновесный код веса 3 с минимальным расстоянием 4 и длины m вкладывается в некоторый q-ичный 1-совершенный код длины $n = (q^m-1)/(q-1)$. Библиогр. 10.

Ключевые слова: код Хэмминга, нелинейный совершенный код, равновесный код, i-компонента.

Введение

Пусть $\mathbb{F}_q^n$ — векторное пространство размерности n над конечным полем $\mathbb{F}_q$. *Расстояние Хэмминга* между двумя векторами $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_q^n$ равно числу координат, в которых они различаются, и обозначается через $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Произвольное подмножество $\mathcal{C}$ из $\mathbb{F}_q^n$ называется *q-ичным кодом длины n*. *Минимальным расстоянием кода* называется минимальное расстояние между двумя различными кодовыми векторами, т. е. векторами, принадлежащими коду. Код $\mathcal{C}$ называется *q-ичным 1-совершенным кодом*, если для каждого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_q^n$ существует единственный вектор $\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}$ такой, что $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) \leqslant 1$. Нетривиальные q-ичные 1-совершенные коды длины n существуют, если $n = (q^m - 1)/(q - 1)$, где m — натуральное число, не меньшее двух. Минимальное расстояние q-ичного 1-совершенного кода равно 3. Два кода $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathbb{F}_q^n$ называются *эквивалентными*, если существуют вектор $\boldsymbol{v} \in \mathbb{F}_q^n$ и мономиальная матрица M размера $n \times n$ над полем $\mathbb{F}_q$ такие, что $\mathcal{C}_2 = \{(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{c}M) : \boldsymbol{c} \in \mathcal{C}_1\}$. Будем предполагать, что нулевой вектор $\mathbf{0}$ принадлежит коду. Код называется *линейным*, если он образует линейное подпространство над $\mathbb{F}_q$. Линейные q-ичные 1-совершенные коды длины n единственны с точностью до

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14–01–00507).

эквивалентности и называются *q-ичными кодами Хэмминга*. Будем обозначать q-ичный код Хэмминга длины $n = (q^m - 1)/(q - 1)$ через $\mathcal{H}_{q,m}$.

Установлено [1,6,8,10], что существует не менее $q^{q^{cn}}$ неэквивалентных q-ичных 1-совершенных кодов длины n.

Вес вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_q^n$ равен расстоянию между вектором $\boldsymbol{x}$ и нулевым вектором $\mathbf{0}$. Код $\mathcal{C}$ называется *равновесным кодом веса* k, если из условия $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$ следует, что вес $\boldsymbol{x}$ равен k.

Пусть $n_1 \leqslant n_2$, $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathbb{F}_q^{n_1}$ и $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathbb{F}_q^{n_2}$. Все кодовые векторы из кода $\mathcal{C}_1$ удлиним с помощью нулевого вектора длины $n_2 - n_1$ до длины n_2. Говорят, что *код $\mathcal{C}_1$ вкладывается в код $\mathcal{C}_2$*, если все удлинённые векторы из $\mathcal{C}_1$ принадлежат $\mathcal{C}_2$. В коде $\mathcal{C}_2$ рассмотрим все кодовые векторы, в которых последние $n_2 - n_1$ координат равны нулю. Удалим последние $n_2 - n_1$ координат во всех таких векторах. Если полученное множество укороченных кодовых векторов совпадает с $\mathcal{C}_1$, то говорят, что *код $\mathcal{C}_1$ вкладывается в код $\mathcal{C}_2$ в строгом смысле*. В данной работе речь всегда будет идти о вложении в строгом смысле, поэтому будем говорить просто о вложении.

В [4] показано, что каждый двоичный код длины m с минимальным расстоянием 3 вкладывается в некоторый двоичный 1-совершенный код длины $n = 2^m - 1$.

В [3] установлено, что каждый двоичный код длины $m + k$ с минимальным расстоянием $3k + 3$ вкладывается (имеется в виду, что вложение нестрогое) в некоторый двоичный 1-совершенный код длины $n = 2^m - 1$ и что каждый троичный код длины m с минимальным расстоянием 3 вкладывается в некоторый троичный 1-совершенный код длины $n = (3^m - 1)/2$. В [3] также доказано, что каждый q-ичный код длины m с минимальным расстоянием 5 вкладывается в некоторый q-ичный 1-совершенный код длины $n = (q^m - 1)/(q - 1)$.

В [7] показано, что каждый q-ичный код длины $m-1$ с минимальным расстоянием 3 вкладывается в некоторый q-ичный 1-совершенный код длины $n = (q^m - 1)/(q - 1)$.

В данной работе установлено, что каждый q-ичный равновесный код веса 3 с минимальным расстоянием 4 и длины m вкладывается в некоторый q-ичный 1-совершенный код длины $n = (q^m - 1)/(q - 1)$.

В [3] доказана вложимость q-ичных кодов с минимальным расстоянием 5. В данной работе, как и в [7], удалось уменьшить минимальное расстояние кода за счёт введения дополнительных ограничений.

1. Вложение в совершенные коды

Проверочная матрица $H = [\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_n]$ кода $\mathcal{H}_{q,m}$ длины $n = (q^m - 1)/(q - 1)$ состоит из n попарно линейно независимых вектор-столбцов $\boldsymbol{h}_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Транспонированный вектор-столбец $\boldsymbol{h}_i^T$ принадлежит $\mathbb{F}_q^m$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Предполагаем, что столбцы проверочной матрицы H упорядочены произвольным, но фиксированным образом. Множество $\mathbb{F}_q^m \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ порождает проективную геометрию $PG_{m-1}(q)$ размерности $m-1$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$. В этой геометрии точки соответствуют столбцам матрицы H и точки i, j, k лежат на одной прямой, если соответствующие им столбцы $\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{h}_j, \boldsymbol{h}_k$ линейно зависимы. Обозначим через l_{xy} прямую, проходящую через точки x и y, а через P_{xyz} — плоскость, порождённую тремя неколлинеарными точками x, y, z.

Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n$, тогда носителем вектора $\boldsymbol{x}$ является множество $\mathrm{supp}(\boldsymbol{x}) = \{i : x_i \neq 0\}$. Точки проективной геометрии $PG_{m-1}(q)$ соответствуют столбцам проверочной матрицы H, а столбцы проверочной матрицы H соответствуют координатам пространства $\mathbb{F}_q^n$. Говорим, что *точка i принадлежит* $\mathrm{supp}(\boldsymbol{x})$, если координата i принадлежит $\mathrm{supp}(\boldsymbol{x})$.

Вектор веса 3 кода Хэмминга $\mathcal{H}_{q,m}$ называется *тройкой.* Следуя [9], рассмотрим подпространство, порождённое множеством всех троек кода $\mathcal{H}_{q,m}$ с 1 в i-й координате. Это подпространство обозначим через $\mathcal{R}_i$. Пусть $\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_{q,m}$. Тогда множество $\mathcal{R}_i + \boldsymbol{u}$ называется *i-компонентой кода Хэмминга $\mathcal{H}_{q,m}$*.

В проверочной матрице H кода Хэмминга $\mathcal{H}_{q,m}$ длины $n = (q^m - 1)/(q-1)$ выберем m линейно независимых столбцов. Будем считать, что выбранными столбцами будут $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_m$.

Рассмотрим q-ичный равновесный код $\Lambda \subset \mathbb{F}_q^m$ веса 3 с минимальным расстоянием 4 и длины m. Пусть код Λ содержит t векторов $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2 \ldots, \boldsymbol{\lambda}_t$, вес каждого из которых равен трём. Расстояние между любыми двумя различными векторами из кода $\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2 \ldots, \boldsymbol{\lambda}_t\}$ больше или равно четырём. Каждому вектору $\boldsymbol{\lambda}_s = (\lambda_{s1}, \lambda_{s2}, \ldots, \lambda_{sm})$ длины m сопоставим вектор $\boldsymbol{u}_s$ длины n, где $s \in \{1, \ldots, t\}$. Пусть

$$\mu_s \boldsymbol{h}_{i_s} = \lambda_{s1}\boldsymbol{h}_1 + \lambda_{s2}\boldsymbol{h}_2 + \cdots + \lambda_{sm}\boldsymbol{h}_m,$$

где $\mu_s \in \mathbb{F}_q$, $i_s \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}$. Тогда положим

$$\boldsymbol{u}_s = (\lambda_{s1}, \lambda_{s2}, \ldots, \lambda_{sm}, 0, \ldots, 0, -\mu_s, 0, \ldots, 0).$$

Носитель вектора $\boldsymbol{u}_s$ принадлежит множеству $\{1, 2, \ldots, m\} \cup \{i_s\}$. Поскольку код Хэмминга $\mathcal{H}_{q,m}$ образует нулевое пространство проверочной матрицы H, то $\boldsymbol{u}_s \in \mathcal{H}_{q,m}$.

Таким образом, по векторам длины m из кода Λ построено семейство компонент $R_{i_1}+\boldsymbol{u}_1, R_{i_2}+\boldsymbol{u}_2, \ldots, R_{i_t}+\boldsymbol{u}_t$ кода Хэмминга $\mathcal{H}_{q,m}$ длины $n=(q^m-1)/(q-1)$.

Семейство компонент $R_{i_1}+\boldsymbol{u}_1, R_{i_2}+\boldsymbol{u}_2, \ldots, R_{i_t}+\boldsymbol{u}_t$ кода Хэмминга $\mathcal{H}_{q,m}$ называется *допустимым*, если при $r, s \in \{1,2,\ldots,t\}$, $r \neq s$, имеет место равенство $(R_{i_r}+\boldsymbol{u}_r) \cap (R_{i_s}+\boldsymbol{u}_s) = \varnothing$ [2].

Далее покажем, что построенное выше семейство компонент кода Хэмминга $\mathcal{H}_{q,m}$ допустимо.

Этцион и Варди [5] предложили свитчинговую конструкцию двоичных 1-совершенных кодов полного ранга, а также оригинальный метод построения допустимого семейства i-компонент двоичного кода Хэмминга, и их конструкция двоичных 1-совершенных кодов полного ранга основывалась на этом методе. В [3] этот метод Этциона и Варди был обобщён для q-ичных кодов. Доказательство допустимости построенного выше семейства компонент кода Хэмминга $\mathcal{H}_{q,m}$ основано на обобщении метода Этциона и Варди [5], предложенного в [3].

Теорема 1. *Пусть* $s \in \{1,2,\ldots,t\}$. *Тогда* $\boldsymbol{u}_s \notin R_{i_s}$.

Доказательство. Из конструкции следует, что носитель вектора $\boldsymbol{u}_s = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ принадлежит множеству $\{1,2,\ldots,m\} \cup \{i_s\}$. Код Λ содержит t векторов, вес каждого из которых равен трём. Следовательно, столбец $\boldsymbol{h}_{i_s}$ является линейной комбинацией трёх столбцов из множества $\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_m\}$. Поскольку столбцы $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_m$ линейно независимы, при $x \in \{1,2,\ldots,m\}$ никакая линейная комбинация столбцов $\boldsymbol{h}_x$ и $\boldsymbol{h}_{i_s}$ не принадлежит множеству $\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_m\} \setminus \{\boldsymbol{h}_x\}$. Таким образом, в силу теоремы 1 из [3] имеем $\boldsymbol{u}_s \notin R_{i_s}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Семейство компонент* $R_{i_1}+\boldsymbol{u}_1, R_{i_2}+\boldsymbol{u}_2, \ldots, R_{i_t}+\boldsymbol{u}_t$ *кода Хэмминга* $\mathcal{H}_{q,m}$ *длины* n *допустимо.*

Доказательство. Пусть $r, s \in \{1,2,\ldots,t\}$, $r \neq s$. Тогда покажем, что

$$(R_{i_r}+\boldsymbol{u}_r) \cap (R_{i_s}+\boldsymbol{u}_s) = \varnothing. \tag{1}$$

Для того чтобы выполнялось равенство (1), достаточно доказать, что

$$\boldsymbol{u}_r - \boldsymbol{u}_s \notin R_{i_r} + R_{i_s}. \tag{2}$$

Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Пусть $d(\boldsymbol{\lambda}_s, \boldsymbol{\lambda}_r) \geqslant 5$. Тогда справедливость соотношения (2) установлена в [3].

Случай 2. Пусть $d(\boldsymbol{\lambda}_s, \boldsymbol{\lambda}_r) = 4$. В силу теоремы 2 из [3] для справедливости соотношения (2) достаточно показать, что носитель вектора $\boldsymbol{u}_r - \boldsymbol{u}_s$ содержит некоторую точку x, не лежащую на прямой $l_{i_r i_s}$ и такую, что никакая другая точка (отличная от точек x, i_r, i_s) из этого носителя не принадлежит плоскости $P_{x i_r i_s}$.

Носитель вектора $\boldsymbol{u}_r - \boldsymbol{u}_s$ принадлежит множеству

$$\{1, 2, \ldots, m\} \cup \{i_r\} \cup \{i_s\}.$$

Точка x принадлежит носителю вектора $\boldsymbol{u}_r - \boldsymbol{u}_s$ и не лежит на прямой $l_{i_r i_s}$. Следовательно, точка x принадлежит множеству $\{1, 2, \ldots, m\}$. В силу теоремы 2 из [3] нужно выбрать точку x так, чтобы никакая линейная комбинация столбцов $\boldsymbol{h}_x$, $\boldsymbol{h}_{i_r}$, $\boldsymbol{h}_{i_s}$ не принадлежала множеству $\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_m\} \setminus \{\boldsymbol{h}_x\}$.

Случай 2.1. Допустим, что пересечение $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\lambda}_r) \cap \operatorname{supp}(\boldsymbol{\lambda}_s)$ содержит две точки, т. е.

$$\operatorname{supp}(\boldsymbol{\lambda}_r) \cap \operatorname{supp}(\boldsymbol{\lambda}_s) = \{x_1, x_2\}. \tag{3}$$

Вес векторов $\boldsymbol{\lambda}_r$, $\boldsymbol{\lambda}_s$ равен 3, а расстояние между векторами $\boldsymbol{\lambda}_r$ и $\boldsymbol{\lambda}_s$ равно 4. Следовательно, два столбца $\boldsymbol{h}_{x_1}$ и $\boldsymbol{h}_{x_2}$ из множества линейно независимых столбцов $\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_m\}$ участвуют в построении как столбца $\boldsymbol{h}_{i_r}$, так и столбца $\boldsymbol{h}_{i_s}$.

Один столбец $\boldsymbol{h}_{y_1}$ из множества $\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_m\}$ участвует в построении только столбца $\boldsymbol{h}_{i_r}$, а другой столбец $\boldsymbol{h}_{y_2}$ из множества $\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_m\}$ участвует в построении только столбца $\boldsymbol{h}_{i_s}$, т. е.

$$\operatorname{supp}(\boldsymbol{\lambda}_r) \setminus \operatorname{supp}(\boldsymbol{\lambda}_s) = \{y_1\}, \ \operatorname{supp}(\boldsymbol{\lambda}_s) \setminus \operatorname{supp}(\boldsymbol{\lambda}_r) = \{y_2\}. \tag{4}$$

Все столбцы $\boldsymbol{h}_{x_1}$, $\boldsymbol{h}_{x_2}$, $\boldsymbol{h}_{y_1}$, $\boldsymbol{h}_{y_2}$ различны и линейно независимы.

Пусть $x \in \{x_1, x_2\}$. Множество $\{x_1, x_2\}$ принадлежит носителю вектора $\boldsymbol{u}_r - \boldsymbol{u}_s$, поскольку вес векторов $\boldsymbol{\lambda}_r$, $\boldsymbol{\lambda}_s$ равен 3 и расстояние между векторами $\boldsymbol{\lambda}_r$ и $\boldsymbol{\lambda}_s$ равно 4. В силу (3) и (4) точка x не лежит на прямой $l_{i_r i_s}$. Столбцы $\boldsymbol{h}_x$, $\boldsymbol{h}_{y_1}$, $\boldsymbol{h}_{y_2}$ линейно независимы. Следовательно, никакая линейная комбинация столбцов $\boldsymbol{h}_x$, $\boldsymbol{h}_{i_r}$, $\boldsymbol{h}_{i_s}$ не принадлежит множеству $\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_m\} \setminus \{\boldsymbol{h}_x\}$ в силу (3) и (4).

Случай 2.2. Пересечение $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\lambda}_r) \cap \operatorname{supp}(\boldsymbol{\lambda}_s)$ содержит только одну точку. Тогда x принадлежит симметрической разности

$$\operatorname{supp}(\boldsymbol{\lambda}_r) \bigtriangleup \operatorname{supp}(\boldsymbol{\lambda}_s).$$

Таким образом, $\boldsymbol{u}_r - \boldsymbol{u}_s \notin R_{i_r} + R_{i_s}$ для всех $r, s \in \{1, 2, \ldots, t\}$, $r \neq s$. Теорема 2 доказана.

Докажем теорему о вложимости. Через $\boldsymbol{e}_i$ обозначим вектор длины n, в котором i-я компонента равна 1, а другие компоненты равны 0. Пусть

$$\mathcal{T}_{q,m} = \left(\mathcal{H}_{q,m} \setminus \bigcup_{s=1}^{t}(R_{i_s} + \boldsymbol{u}_s)\right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{t}(R_{i_s} + \boldsymbol{u}_s + \mu_s \cdot \boldsymbol{e}_{i_s})\right). \qquad (5)$$

В силу теоремы 2 семейство компонент $R_{i_1} + \boldsymbol{u}_1, R_{i_2} + \boldsymbol{u}_2, \ldots, R_{i_t} + \boldsymbol{u}_t$ кода Хэмминга $\mathcal{H}_{q,m}$ допустимо. Следовательно, множество $\mathcal{T}_{q,m}$ является q-ичным 1-совершенным кодом длины n (см. [5, 9]). В силу теоремы 1 код $\mathcal{T}_{q,m}$ содержит нулевой вектор.

Теорема 3. *Каждый q-ичный равновесный код веса* 3 *с минимальным расстоянием* 4 *и длины m вкладывается в некоторый q-ичный* 1*-совершенный код длины $n = (q^m - 1)/(q - 1)$.*

Доказательство. Из конструкции описанного выше допустимого семейства компонент q-ичного кода $\mathcal{H}_{q,m}$ и формулы (5) следует, что каждый q-ичный равновесный код Λ длины m, веса 3 и с минимальным расстоянием 4 может быть вложен в q-ичный 1-совершенный код $\mathcal{T}_{q,m}$ длины $n = (q^m - 1)/(q - 1)$. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев Ю. Л.** О негрупповых плотно упакованных кодах // Пробл. кибернетики. 1962. Вып. 8. С. 375–378.
2. **Романов А. М.** Обзор методов построения нелинейных совершенных кодов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 4. С. 60–88.
3. **Романов А. М.** О допустимых семействах компонент кодов Хэмминга // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 2. С. 84–91.
4. **Avgustinovich S. V., Krotov D. S.** Embedding in a perfect code // J. Comb. Des. 2009. Vol. 17, No. 5. P. 419–423
5. **Etzion T., Vardy A.** Perfect binary codes: Constructions, properties, and enumeration // IEEE Trans. Inf. Theory. 1994. Vol. 40, No. 3. P. 754–763.
6. **Etzion T.** Nonequivalent q-ary perfect codes // SIAM J. Discrete Math. 1996. Vol. 9, No. 3. P. 413–423.
7. **Krotov D. S., Sotnikova E. V.** Embedding in q-ary 1-perfect codes and partitions // Discrete Math. 2015. Vol. 338, No. 11. P. 1856–1859.
8. **Lindström B.** On group and nongroup perfect codes in q symbols // Math. Scand. 1969. Vol. 25. P. 149–158.
9. **Phelps K. T., Villanueva M.** Ranks of q-ary 1-perfect codes // Des. Codes Cryptogr. 2002. Vol. 27, No. 1–2. P. 139–144.

10. **Schönheim J.** On linear and nonlinear single-error-correcting q-ary perfect codes // Inform. Control. 1968. Vol. 12. P. 23–26.

Романов Александр Михайлович

Статья поступила
22 марта 2016 г.

Исправленный вариант —
26 апреля 2016 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
October–December 2016. Volume 23, No. 4. P. 26–34

UDC 519.7 DOI: 10.17377/daio.2016.23.533

ON THE EMBEDDING OF CONSTANT-WEIGHT CODES INTO PERFECT CODES

A. M. Romanov[1]
[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
e-mail: rom@math.nsc.ru

Abstract. We show that each q-ary constant-weight code of weight 3, minimum distance 4, and length m can be embedded in a q-ary 1-perfect code of length $n = (q^m - 1)/(q - 1)$. Bibliogr. 10.

Keywords: Hamming code, nonlinear perfect code, constant-weight code, i-component.

REFERENCES

1. **Yu. L. Vasil'ev,** On nongroup close-packed codes, in A. A. Lyapunov, ed., *Problemy kibernetiki* (Problems of Cybernetics), Vol. 8, pp. 375–378, Fizmatgiz, Moscow, 1962.
2. **A. M. Romanov,** A survey of methods for constructing nonlinear perfect binary codes, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **13**, No. 4, 60–88, 2006. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **2**, No. 2, 252–269, 2008.
3. **A. M. Romanov,** On admissible families of components of Hamming codes, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **19**, No. 2, 84–91, 2012. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **6**, No. 3, 355–359, 2012.
4. **S. V. Avgustinovich** and **D. S. Krotov,** Embedding in a perfect code, *J. Comb. Des.,* **17**, No. 5, 419–423, 2009.
5. **T. Etzion** and **A. Vardy,** Perfect binary codes: Constructions, properties, and enumeration, *IEEE Trans. Inf. Theory.,* **40**, No. 3, 754–763, 1994.
6. **T. Etzion,** Nonequivalent q-ary perfect codes, *SIAM J. Discrete Math.,* **9**, No. 3, 413–423, 1996.
7. **D. S. Krotov** and **E. V. Sotnikova,** Embedding in q-ary 1-perfect codes and partitions, *Discrete Math.,* **338**, No. 11, 1856–1859, 2015.
8. **B. Lindström,** On group and nongroup perfect codes in q symbols, *Math. Scand.,* **25**, 149–158, 1969.
9. **K. T. Phelps** and **M. Villanueva,** Ranks of q-ary 1-perfect codes, *Des. Codes Cryptogr.,* **27**, No. 1–2, 139–144, 2002.

10. **J. Schönheim,** On linear and nonlinear single-error-correcting q-ary perfect codes, *Inform. Control,* **12**, 23–26, 1968.

Alexander M. Romanov

Received
22 March 2016

Revised
26 April 2016