ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2017. Том 24, № 1. С. 81–96

УДК 519.17 DOI: 10.17377/daio.2017.24.523

КРИТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ В КОМБИНАТОРНО ЗАМКНУТЫХ СЕМЕЙСТВАХ КЛАССОВ ГРАФОВ *)

Д. С. Малышев[1,2]

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия
[2]Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия
E-mail: dmalishev@hse.ru, dsmalyshev@rambler.ru

Аннотация. Понятия граничного и минимального сложного классов графов, объединённые общим термином «критический класс», являются полезными инструментами для анализа вычислительной сложности задач на графах в семействе наследственных классов графов. В данном семействе для нескольких задач на графах известны граничные классы. В этой работе критические классы графов рассматриваются применительно к семействам сильно наследственных и минорно замкнутых классов. До результатов настоящей работы имелся пример только одной задачи на графах, для которой в семействе сильно наследственных классов выявлены граничные классы. Более того, в семействе минорно замкнутых классов ни для одной задачи на графах не было известно ни одного граничного класса. В настоящей работе для обоих рассматриваемых семейств и нескольких классических задач на графах приводятся полные описания граничных классов. Для задачи 2-аддитивной аппроксимации ленточной ширины графа в семействе минорно замкнутых классов найден граничный класс, причём для двух других семейств критические классы для этой задачи не известны. Библиогр. 21.

Ключевые слова: вычислительная сложность, наследственный класс, критический класс, эффективный алгоритм.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16–31–60008-мол_а_дк, 16–01–00599-а, 16–31–00109-мол_а), гранта Президента РФ МК–4819.2016.1, а также лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ.

Введение

Классом графов называется любое множество обыкновенных графов, замкнутое относительно изоморфизма. Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Любой наследственный класс (и только наследственный класс) графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{S}$ своих запрещённых порождённых подграфов. В этом случае принята запись $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{S})$. Если наследственный класс графов может быть задан конечным множеством запрещённых порождённых подграфов, то он называется *конечно определённым.*

В настоящей работе помимо семейства $\mathbb{H}$ всех наследственных классов графов рассматриваем два его подсемейства. Первое из них — семейство $\mathbb{SH}$ всех *сильно наследственных классов графов*, т. е. классов, замкнутых относительно удаления вершин и рёбер. Второе — семейство $\mathbb{M}$ всех *минорно замкнутых классов графов*, т. е. сильно наследственных классов, замкнутых ещё и относительно стягивания рёбер. Любой сильно наследственный класс графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{S}$ своих запрещённых подграфов, при этом пишем $\mathcal{X} = \mathrm{Free}_s(\mathcal{S})$. Очевидно, что класс из $\mathbb{SH}$ может быть задан конечным множеством запрещённых подграфов тогда и только тогда, когда он может быть задан конечным множеством запрещённых порождённых подграфов. Поэтому термин «конечно определённый класс» имеет в семействе $\mathbb{SH}$ такое же значение, что и в семействе $\mathbb{H}$. Согласно известной теореме Робертсона и Сеймура [20] любой минорно замкнутый класс $\mathcal{X}$ может быть задан конечным множеством $\mathcal{S}$ своих запрещённых миноров, при этом пишем $\mathcal{X} = \mathrm{Free}_m(\mathcal{S})$.

Пусть Π — какая-либо задача на графах из класса NP. Сам термин «задача на графах» понимается интуитивно: это какой-нибудь вопрос, ответ на который надо дать для заданных входных данных, одним из которых является граф.

Определение 1. Наследственный класс графов называется Π-*простым*, если задача Π полиномиально разрешима в этом классе. Наследственный класс графов называется Π-*сложным*, если он не является Π-простым.

На протяжении всей работы предполагаем, что P$\neq$NP, и это предположение не включается явно в формулировки соответствующих результатов. Например, такого: если задача Π является NP-полной в каком-нибудь наследственном классе, то данный класс Π-сложный. Другим примером является утверждение о том, что для любой задачи Π любой наследственный класс является либо только Π-простым, либо только Π-сложным.

Понятие граничного класса графов служит полезным инструментом для анализа вычислительной сложности задач на графах в семействе наследственных классов графов, а особенно в семействе конечно определённых классов. Это понятие введено в [5] применительно к задаче о независимом множестве и обобщено в [6] на случай произвольной задачи на графах из класса NP. До настоящей работы понятие граничного класса рассматривалось только в рамках семейства $\mathbb{H}$, здесь распространим это понятие на случай всех трёх семейств $\mathbb{H}$, $\mathbb{SH}$ и $\mathbb{M}$.

Определение 2. Пусть $\mathbb{F} \in \{\mathbb{H}, \mathbb{SH}, \mathbb{M}\}$. Класс графов $\mathcal{X}$ называется $(\Pi, \mathbb{F})$-*предельным*, если существует бесконечная последовательность $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \ldots$, состоящая из Π-сложных классов графов, каждый из которых принадлежит $\mathbb{F}$, и такая, что $\mathcal{X} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$.

Определение 3. Минимальный по включению $(\Pi, \mathbb{F})$-предельный класс называется $(\Pi, \mathbb{F})$-*граничным*.

Значение этого понятия раскрывает теорема 1, которая может быть доказана так же, как соответствующие утверждения из [5, 6].

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{H}, \mathbb{SH}\}$. *Конечно определённый класс из* $\mathbb{F}$ *является* Π-*сложным тогда и только тогда, когда он включает* $(\Pi, \mathbb{F})$-*граничный класс. Минорно замкнутый класс является* Π-*сложным тогда и только тогда, когда он включает* $(\Pi, \mathbb{M})$-*граничный класс.*

Таким образом, по теореме 1 знание всех граничных классов графов приводит к полной классификации всех конечно определённых классов (или всех минорно замкнутых) по сложности решения данной задачи. Более того, из этой теоремы следует, что граничные классы существуют для любой NP-полной задачи на графах, так как класс всех графов может быть задан пустым множеством запрещённых (порождённых) подграфов или пустым множеством запрещённых миноров.

В [2] доказано, что для задачи о рёберной 3-раскраске и семейства $\mathbb{H}$ совокупность граничных классов континуальна, что косвенно подтверждает принципиальную невозможность получения полного описания множества граничных классов для этой задачи. По аналогии с рассуждениями из [2] можно доказать справедливость данного результата и для семейства $\mathbb{SH}$.

Определение 4. Пусть $\mathbb{F} \in \{\mathbb{H}, \mathbb{SH}, \mathbb{M}\}$. Класс из $\mathbb{F}$ называется $\mathbb{F}$-*минимальным* Π-*сложным*, если любой его собственный подкласс из $\mathbb{F}$

является уже П-простым.

Далее понятия $(\Pi, \mathbb{F})$-граничного и $\mathbb{F}$-минимального П-сложного классов графов будем объединять термином «$\mathbb{F}$-*критический класс*».

В [3] доказано, что для некоторых классических задач на графах в семействе $\mathbb{H}$ нет минимальных сложных классов. Нетрудно доказать (по аналогии с соответствующими рассуждениями из [3]), что для некоторых задач на графах минимальные сложные классы отсутствуют и в семействе $\mathbb{SH}$.

Понятия $(\Pi, \mathbb{M})$-граничного и $\mathbb{M}$-минимального П-сложного классов оказываются тождественными для любой задачи П, при этом множество $(\Pi, \mathbb{M})$-граничных классов графов для любой задачи П не более чем счётно. Эти два факта следуют из теоремы Робертсона — Сеймура.

Для некоторых задач на графах в семействе $\mathbb{H}$ известны граничные классы графов [2, 4–7]. Вместе с тем, до результатов настоящей работы имелся пример только одной задачи на графах (задачи о независимом множестве), для которой в семействе $\mathbb{SH}$ выявлены граничные классы [5]. Более того, в семействе $\mathbb{M}$ ни для одной задачи на графах не было известно ни одного граничного класса.

Цель настоящей работы — установление граничности некоторых классов графов в семействах $\mathbb{SH}$ и $\mathbb{M}$ для некоторых задач на графах. Именно, для семейств $\mathbb{SH}$ и $\mathbb{M}$ и ряда классических задач на графах приводится полное описание множества граничных классов. Заметим, что на настоящее время известен пример только одной задачи, допускающей в семействе $\mathbb{H}$ полное описание множества граничных классов [4]. Интересен тот факт, что для семейств $\mathbb{SH}$ и $\mathbb{M}$ получившиеся ответы различны для одних и тех же задач на графах. Другим основным результатом является установление $\mathbb{M}$-критичности некоторого класса графов для задачи 2-аддитивной аппроксимации ленточной ширины графа. Отметим, что для этой задачи и задачи о ленточной ширине графа не известны ни $\mathbb{H}$-критические классы, ни $\mathbb{SH}$-критические классы.

1. Используемые обозначения

Будем использовать следующие обозначения: $\Delta(G)$ — наибольшая из степеней вершин графа G; $N[x]$ — множество всех соседей вершины x, к которому добавлена сама вершина x; P_n — простой путь с n вершинами; Sun_n — граф со степенями всех вершин не более чем 3, получаемый из простого цикла с n вершинами добавлением n попарно не смежных вершин, каждая из которых смежна ровно с одной вершиной цикла; $K_{p,q}$ — полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой.

Для натуральных чисел a и b таких, что $a \leqslant b$, через $\overline{a,b}$ обозначается совокупность натуральных чисел от a до b включительно.

2. $\mathbb{SH}$-граничные и $\mathbb{M}$-критические классы графов для некоторых задач на графах

В этом разделе рассматриваем два конкретных класса графов. Это множество всех планарных графов $\mathcal{P}l$, а также класс $\mathcal{T}$, состоящий из всевозможных графов, каждая компонента связности которых, имеющая не менее чем две вершины, гомеоморфна P_2 или $K_{1,3}$.

Доказательство того, что некоторый класс графов является граничным для какой-нибудь задачи на графах разбивается на два этапа. Сначала доказывается предельность этого класса для рассматриваемой задачи, а затем — его минимальность как предельного. Как правило, второй шаг (т. е. установление минимальности) значительно более труден, чем первый. Однако применительно к парам $(\mathcal{T}, \mathbb{SH})$ и $(\mathcal{P}l, \mathbb{M})$ есть некоторое общее рассуждение, позволяющее для ряда задач на графах преодолевать эту сложность. Оно использует понятия кликовой [12] и древесной [9] ширины графа, а также два следующих факта, связанных с этими понятиями: для любого класса $\mathcal{X} \in \mathbb{SH}$, не включающего класс $\mathcal{T}$, кликовая ширина любого графа из $\mathcal{X}$ не превосходит некоторой константы $C_1(\mathcal{X})$ [11] и для любого минорно замкнутого класса $\mathcal{Y}$, не включающего класс $\mathcal{P}l$, древесная ширина любого графа из $\mathcal{Y}$ не превосходит некоторой константы $C_2(\mathcal{Y})$ [19]. Для многих задач на графах имеет место следующее утверждение: для любой наперёд заданной константы C задача полиномиально разрешима в классе графов, у каждого из которых кликовая (или древесная) ширина не превосходит C [8–10, 12, 16].

Теорема 2. *Если класс $\mathcal{T}$ является $(\Pi, \mathbb{SH})$-предельным и задача Π полиномиально разрешима на графах с ограниченной кликовой шириной, то класс $\mathcal{T}$ является единственным $(\Pi, \mathbb{SH})$-граничным. Если класс $\mathcal{P}l$ является Π-сложным и задача Π полиномиально разрешима на графах с ограниченной древесной шириной, то $\mathcal{P}l$ является единственным $(\Pi, \mathbb{M})$-граничным классом.*

Доказательство. Докажем только первую часть утверждения теоремы, поскольку вторая доказывается аналогично. Предположим, что есть $(\Pi, \mathbb{SH})$-граничный класс $\mathcal{X}$, отличный от класса $\mathcal{T}$. Так как класс $\mathcal{T}$ является $(\Pi, \mathbb{SH})$-предельным, имеем $\mathcal{T} \nsubseteq \mathcal{X}$. Поэтому для некоторого графа $G \in \mathcal{T}$ справедливо включение $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Free}_s(\{G\})$. Значит, в любой бесконечной монотонно убывающей последовательности, состоящей из П-сложных элементов множества $\mathbb{SH}$ и сходящейся к $\mathcal{X}$, есть член, содержащийся в классе $\mathrm{Free}_s(\{G\})$. Существует константа $C(G)$ такая, что кликовая ширина любого графа из класса $\mathrm{Free}_s(\{G\})$ не превосходит $C(G)$. Задача П полиномиально разрешима на графах с ограниченной кликовой шириной, а значит, и в классе $\mathrm{Free}_s(\{G\})$; противоречие с теоремой 1. Теорема 2 доказана.

Класс $\mathcal{T}$ оказывается $(\Pi, \mathbb{H})$-предельным для многих задач на графах П [6]. Среди них задачи о независимом множестве, о порождённом паросочетании и о доминирующем множестве. По аналогии с рассуждениями из работы [6] для каждой из них можно показать предельность класса $\mathcal{T}$ и в семействе $\mathbb{SH}$. Класс $\mathcal{P}l$ является сложным для этих трёх задач [1]. Каждая из них полиномиально разрешима на графах с ограниченной кликовой шириной [12, 15, 16] и с ограниченной древесной шириной [9], поэтому по теореме 2 для каждой из них класс $\mathcal{T}$ будет единственным граничным в семействе $\mathbb{SH}$, а класс $\mathcal{P}l$ — единственным граничным в семействе $\mathbb{M}$.

3. $\mathbb{M}$-критический класс графов для задачи 2-аддитивной аппроксимации ленточной ширины графа

Определение 5. *Нумерацией графа G* называется произвольное инъективное отображение $f_G\colon V(G) \longrightarrow \overline{1, |V(G)|}$. *Шириной нумерации f_G* называется число $\max\limits_{(u,v)\in E(G)} |f_G(u) - f_G(v)|$.

Определение 6. *Ленточной шириной графа G*, обозначаемой через $b(G)$, называется минимум среди ширин всевозможных его нумераций.

Определение 7. *Задача о ленточной ширине графа* (кратко, *задача* ЛШ) для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы определить, выполняется ли неравенство $b(G) \leqslant k$.

Задача ЛШ является классической NP-полной задачей на графах [1].

В данной работе рассматривается задача 2-аддитивного приближения ленточной ширины заданного графа. Задача ЛШ$_{+2}$ для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы определить, верно ли неравенство $b(G) \leqslant k+2$. Можно дать такие неформальные интерпретации обеих задач: в задаче ЛШ речь идёт о точном вычислении ленточной ширины заданного графа G, а в задаче ЛШ$_{+2}$ — о поиске числа $b'(G)$ такого, что $b(G) \leqslant b'(G) \leqslant b(G) + 2$. Задача ЛШ$_{+2}$ является NP-полной в классе всех графов. Это следует из NP-трудности при любом $\varepsilon > 0$ задачи приближения ленточной ширины графа с мультипликативной ошибкой

$1+\varepsilon$ [13] и существования алгоритма сложности $O(2^{O(k)}n^{k+1})$ для распознавания выполнения неравенства $b(G) \leqslant k$ для заданного графа G с n вершинами [21].

Лемма 1. *Пусть G — произвольный граф. Если H — порождённый подграф графа G, то $b(H) \leqslant b(G)$. Если $G_1, \ldots, G_p$ — компоненты связности графа G, то $b(G) = \max(b(G_1), \ldots, b(G_p))$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную оптимальную нумерацию f_G графа G и множество $\{i \mid \exists v \in V(H),\ f_G(v) = i\}$. Упорядочим его элементы в порядке их возрастания. Пусть n_v — номер вершины $v \in V(H)$ при таком упорядочивании. Очевидно, что

$$|n_u - n_v| \leqslant |f_G(u) - f_G(v)|$$

для любых смежных вершин u и v графа H. Рассмотрим нумерацию графа H, в которой каждая вершина $v \in V(H)$ получает номер n_v. Очевидно, что её ширина не превосходит $b(G)$. Значит, $b(H) \leqslant b(G)$.

Поскольку каждая из компонент связности $G_1, \ldots, G_p$ — порождённый подграф графа G, имеем $b(G) \geqslant \max(b(G_1), \ldots, b(G_p))$. Рассмотрим оптимальные нумерации $f_{G_1}, \ldots, f_{G_p}$ графов $G_1, \ldots, G_p$ соответственно. Для любого $i \in \overline{1,p}$ и любой вершины $v \in V(G_i)$ прибавим к числу $f_{G_i}(v)$ число $\sum\limits_{j=1}^{i-1} b(G_j)$. Такие сдвиги порождают нумерацию графа G ширины $b(G) = \max(b(G_1), \ldots, b(G_p))$. Значит, $b(G) = \max(b(G_1), \ldots, b(G_p))$. Лемма 1 доказана.

Помимо задачи ЛШ$_{+2}$ в данной работе рассматриваются 1-гусеницы и циклические 1-гусеницы.

Определение 8. Граф называется 1-*гусеницей*, если он может быть получен добавлением к простому пути, называемому *несущим*, нескольких попарно не смежных вершин (возможно, ни одной), каждая из которых смежна ровно с одной из вершин пути.

Определение 9. *Циклическая* 1-*гусеница* — граф, получаемый добавлением к простому циклу, называемому *несущим*, попарно не смежных вершин (возможно, ни одной), каждая из которых смежна ровно с одной из вершин цикла.

В [17] доказана

Лемма 2. *Существует оптимальная нумерация 1-гусеницы с несущим путём $(v_1, \ldots, v_k)$ такая, что для любого i совокупность номеров* *элементов множества* $N[v_i] \setminus \{v_{i-1}, v_{i+1}\}$ *совпадает с диапазоном натуральных чисел* $\left[\sum_{j=1}^{i-1} |N[v_j] \setminus \{v_{j-1}, v_{j+1}\}| + 1, \sum_{j=1}^{i} |N[v_j] \setminus \{v_{j-1}, v_{j+1}\}|\right]$.

Из леммы 2 следует, что результат отождествления конца любого простого пути с любым из концов несущего пути произвольной 1-гусеницы имеет ту же ленточную ширину, что и сама 1-гусеница.

Пусть граф H — циклическая 1-гусеница с n вершинами, имеющая ровно k вершин степени более чем 2. Будем считать, что $k > 0$, иначе H — простой цикл и $b(H) = 2$. Удалим из графа H все вершины, принадлежащие шарам радиуса 2 с центрами в вершинах графа H, каждая степени более чем 2. В получившейся дизъюнктной сумме простых путей рассмотрим путь $P' \triangleq (u_1, \ldots, u_s)$ максимальной длины. Очевидно, что если путь P' непустой, то граф $H' \triangleq H \setminus P'$ является 1-гусеницей. Далее покажем, что если параметры $\Delta(H)$ и s достаточно большие (в терминах k), то $b(H') \leqslant b(H) \leqslant b(H') + 2$.

В дальнейшем понадобится некоторая дискретная функция $\mathrm{num}(i, q)$, в которой i является натуральным аргументом, а q — натуральным параметром, не меньшим чем 2. Она определяется так. Из натурального ряда удалим все числа, кратные q. В получившейся последовательности i-й член положим равным $\mathrm{num}(i, q)$.

Лемма 3. *Для любого* i *справедливо неравенство*

$$\mathrm{num}(i, q) \leqslant i + 2\left\lfloor \frac{i+1}{q} \right\rfloor + 1.$$

Для любых i *и* j *таких, что* $|i - j| \leqslant q$, *имеет место*

$$|\mathrm{num}(i, q) - \mathrm{num}(j, q)| \leqslant q + 2.$$

Доказательство. Очевидно, что разность $\mathrm{num}(i+1, q) - \mathrm{num}(i, q)$ равна 1 или 2 для любого i. Более того, $\mathrm{num}(i+1, q) - \mathrm{num}(i, q) = 2$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{num}(i, q) \equiv -1 \pmod{q}$. Такие i (для которых $\mathrm{num}(i, q)$ сравнимо с -1 по модулю q) будем называть *точками роста*. Очевидно, что любой отрезок натурального ряда, содержащий q элементов, имеет либо одну, либо две точки роста. Поэтому $|\mathrm{num}(i, q) - \mathrm{num}(j, q)| \leqslant q + 2$ для любых i и j, связанных неравенством $|i - j| \leqslant q$. На отрезке $\overline{1, q-1}$ ровно одна точка роста. На отрезке $\overline{q, i}$ ровно $i - q + 1$ элементов, тем самым этот отрезок содержит не более чем $2\left(\left\lfloor \frac{i+1-q}{q} \right\rfloor + 1\right) = 2\left\lfloor \frac{i+1}{q} \right\rfloor$ точек роста. Значит, на отрезке $\overline{1, i}$ не более $2\left\lfloor \frac{i+1}{q} \right\rfloor + 1$ точек роста.

Стало быть, для любого i справедливо неравенство

$$\mathrm{num}(i,q) \leqslant i + 2\left\lfloor \frac{i+1}{q} \right\rfloor + 1.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если* $\Delta(H) \geqslant 8k+4$ *и* $s \geqslant 8k+10$, *то*

$$b(H') \leqslant b(H) \leqslant b(H') + 2.$$

Доказательство. Пусть $\Delta(H) = \Delta$ и $b(H') = b$. Очевидно, что $n \leqslant k(\Delta+s+3)$. Так как граф H' содержит граф $K_{1,\Delta}$ в качестве порождённого подграфа и $b(K_{1,\Delta}) \geqslant \lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor$, по лемме 1 справедливо неравенство $b \geqslant \lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor > \frac{\Delta}{2} - 1$. Проверим, что выполнено неравенство $2\lfloor \frac{n}{b} \rfloor + 3 \leqslant s$. Действительно,

$$2\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor + 3 \leqslant 2\frac{n}{b} + 3 < \frac{2k(\Delta+s+3)}{\frac{\Delta}{2}-1} + 3 = \frac{4k(\Delta+s+3)+3(\Delta-2)}{\Delta-2}.$$

Убедимся в том, что последнее число не больше s. Для этого достаточно показать, что $s(\Delta-2-4k) > 4k\Delta + 3\Delta + 12k$. Поскольку $\Delta \geqslant 4+8k$, то $\frac{s(\Delta-2-4k)}{\Delta} \geqslant \frac{s}{2}$. Ясно, что $4k+3+\frac{12k}{\Delta} \leqslant 4k+5$, поэтому и $\frac{s}{2} \geqslant 4k+3+\frac{12k}{\Delta}$, так как $s \geqslant 8k+10$.

Пусть i^* — максимальное число такое, что $\mathrm{num}(i^*,b) \leqslant n$. По построению функции $\mathrm{num}(i,q)$ имеем $\mathrm{num}(i^*,b) \geqslant n-2$. Проверим, что $i^*+s \geqslant n$. Действительно, $s \geqslant 2\lfloor \frac{n}{b} \rfloor + 3$. Покажем, что $i^* \geqslant n - 2\lfloor \frac{n}{b} \rfloor - 3$. Предположим, что $i^* < n - 2\lfloor \frac{n}{b} \rfloor - 3$. По лемме 3 выполнено неравенство

$$\mathrm{num}(i^*,b) \leqslant i^* + 2\left\lfloor \frac{i^*+1}{b} \right\rfloor + 1.$$

Правая часть этого неравенства меньше чем $n - 2\lfloor \frac{n}{b} \rfloor - 2 + 2\lfloor \frac{n}{b} \rfloor = n-2$; противоречие с выбором i^*.

В пути P' рассмотрим подпуть $P \triangleq (u_1,\dots)$ такой, что в графе $H^* \triangleq H \setminus V(P)$ ровно i^* вершин. Такой подпуть обязательно существует, так как $i^*+s \geqslant n$. Ясно, что граф H^* является 1-гусеницей. По лемме 2 можно считать, что в некоторой оптимальной нумерации f_{H^*} графа H^* сосед вершины u_1, не принадлежащий P, имеет номер 1, а сосед второго конца пути P, не принадлежащий P, имеет номер i^*. Также по лемме 2 справедливо соотношение $b(H^*) = b(H')$. Для каждого $i \in \overline{1,i^*}$ вершине H^* с номером i припишем номер $\mathrm{num}(i,b)$. Каждый элемент множества $\overline{1,n} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{i^*} \{\mathrm{num}(i,b)\}$ либо кратен b, либо принадлежит множеству $\{n-1,n\}$ по определению функции $\mathrm{num}(i,q)$ и в силу неравенства $\mathrm{num}(i^*,b) \geqslant n-2$. Для любого $i \in \overline{1,\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor}$ i-й вершине пути P (считая от u_1) припишем номер ib. Оставшимся вершинам пути P инъективно припишем номера из множества $\overline{1,n} \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{i^*} \{\mathrm{num}(i,b)\} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{b} \rfloor} \{ib\} \right)$ (если таковые найдутся). Очевидно, мы построили нумерацию графа H. Её ширина не превосходит $b+2$ по лемме 3. По лемме 1 справедливо неравенство $b \leqslant b(H)$. Лемма 4 доказана.

Для семейства $\mathbb{F} \in \{\mathbb{H}, \mathbb{SH}, \mathbb{M}\}$ и класса $\mathcal{X}$ назовём $\mathbb{F}$-*замыканием* $\mathcal{X}$ множество всех графов, которые являются порождёнными подграфами графов из $\mathcal{X}$ (если $\mathbb{F} = \mathbb{H}$), или подграфами графов из $\mathcal{X}$ (если $\mathbb{F} = \mathbb{SH}$), или минорами графов из $\mathcal{X}$ (если $\mathbb{F} = \mathbb{M}$). Обозначим $\mathbb{M}$-замыкание класса всех циклических 1-гусениц через $\mathcal{CC}$.

Теорема 3. *Класс $\mathcal{CC}$ является* (ЛШ$_{+2}$,$\mathbb{M}$)*-критическим.*

Доказательство. Известно, что для любого $\varepsilon > 0$ задача приближения ленточной ширины графа с мультипликативной ошибкой $2-\varepsilon$ NP-трудна в классе всех циклических 1-гусениц [13]. Отсюда и из результата работы [21] следует, что класс $\mathcal{CC}$ является ЛШ$_{+2}$-сложным. Докажем, что любой его собственный минорно замкнутый подкласс является ЛШ$_{+2}$-простым, откуда будет следовать справедливость утверждения теоремы.

Пусть G' — произвольный граф из $\mathcal{CC}$. Найдётся циклическая 1-гусеница G, для которой G' является минором. Количество вершин G обозначим через n. Ясно, что

$$\mathcal{CC} \cap \mathrm{Free}_m(\{G'\}) \subseteq \mathcal{CC} \cap \mathrm{Free}_m(\{G\}).$$

Пусть H — произвольный граф из $\mathcal{CC} \cap \mathrm{Free}_m(\{G\})$. Каждая его компонента связности является либо циклической 1-гусеницей, либо 1-гусеницей, причём компонент первого типа не более одной. Задача ЛШ полиномиально разрешима в классе 1-гусениц [17]. Отсюда и по лемме 1 можем считать, что граф H изоморфен циклической 1-гусенице. Количество вершин графа H, каждая из которых имеет степень не менее чем 3, не превосходит $2n$, иначе граф Sun_{2n} является минором графа H. Последнее невозможно, так как любая циклическая 1-гусеница с не более чем n вершинами является минором графа Sun_{2n}.

Нетрудно предложить нумерацию графа H с шириной, ограниченной некоторой линейной функцией от $\Delta(H)$. Для этого возьмём произвольную цикловую вершину графа H, ей припишем номер 1. Относительно этой вершины можно определить понятия левых и правых вершин графа H. Для нумерации левых вершин будем использовать только чётные числа, а для нумерации правых вершин — только нечётные. Поэтому если $\Delta(H) \leqslant 16n+3$, то ленточная ширина графа H ограничена некоторой линейной функцией от n. Если $\Delta(H) \geqslant 16n+4$ и расстояние между любыми двумя вершинами графа H, каждая из которых имеет степень не менее чем 3, не более $16n+9$, то несущий цикл графа H имеет не более чем $2(16n+9)n$ вершин. Известно, что для любого фиксированного числа C, задача ЛШ полиномиально разрешима в классе графов, у которых найдётся не более чем C вершин таких, что любое ребро графа инцидентно одной из этих вершин [14]. Ввиду этого и результата из [21] можно считать, что $\Delta(H) \geqslant 16n+4$ и расстояние между некоторыми двумя цикловыми вершинами графа H, каждая из которых имеет степень не менее чем 3, больше либо равно $16n+10$. По лемме 4 по графу H можно построить 1-гусеницу, имеющую ленточную ширину от $b(H)$ до $b(H)+2$. Отсюда и результата из [17] следует справедливость утверждения теоремы. Теорема 3 доказана.

Отметим, что на настоящее время для задач ЛШ и ЛШ$_{+2}$ в семействах $\mathbb{H}$ и $\mathbb{SH}$ не известно ни граничных классов, ни минимальных сложных классов. Удаётся только заметить, что $\mathbb{H}$-замыкание множества всех 1-гусениц (обозначаемое далее через $\mathcal{C}$) является как (ЛШ,$\mathbb{H}$)-, так и (ЛШ$_{+2}$,$\mathbb{H}$)-предельным классом. Аналогичный результат верен и для семейства $\mathbb{SH}$.

Лемма 5. *Для каждой из задач* ЛШ *и* ЛШ$_{+2}$ *класс* $\mathcal{C}$ *предельный в семействе* $\mathbb{H}$.

Доказательство. Заметим, задачи ЛШ и ЛШ$_{+2}$ являются NP-полными в классе циклических 1-гусениц. Для задачи ЛШ это доказано в [18], а для задачи ЛШ$_{+2}$ — следует из [13, 21]. Поскольку дальнейшие рассуждения для задач ЛШ и ЛШ$_{+2}$ полностью аналогичны, будем рассматривать только задачу ЛШ.

Множество всех циклических 1-гусениц бесконечно и счётно. Пронумеруем элементы этого множества и получим некоторую последовательность $G_1, G_2, \ldots$. Положим $\mathcal{X}_0$ равным $\mathcal{CC}$. Данный класс ЛШ-сложный [18]. Для любого $i > 0$ обозначим множество $\mathcal{X}_{i-1} \cap \mathrm{Free}(\{G_i\})$ через $\mathcal{X}_i$. Покажем, что для любого i класс $\mathcal{X}_i$ ЛШ-сложный. Действительно, множество $\mathcal{X}_{i-1} \setminus \mathcal{X}_i$ состоит из циклических 1-гусениц, для каждой из которых граф G_i является порождённым подграфом. Следовательно, у всех таких циклических 1-гусениц фиксирована длина несущего цикла. Ввиду этого и результата из [14] для любого i задача ЛШ полиномиально разрешима в множестве $\mathcal{X}_{i-1} \setminus \mathcal{X}_i$. Отсюда следует, что класс $\mathcal{X}_i$ является ЛШ-сложным при любом i. Ввиду справедливости этого факта и справедливости цепочки включений $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \ldots$ и равенства $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i = \mathcal{C}$ класс $\mathcal{C}$ является (ЛШ,$\mathbb{H}$)-предельным. Лемма 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
2. **Малышев Д. С.** Континуальные множества граничных классов графов для задач о раскраске // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 5. С. 41–51.
3. **Малышев Д. С.** О минимальных сложных классах графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 6. С. 43–51.
4. **Малышев Д. С.** Критические классы графов для задачи о рёберном списковом ранжировании // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 6. С. 59–76.
5. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Appl. Math. 2003. Vol. 132, No. 1–3. P. 17–26.
6. **Alekseev V. E., Boliac R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theor. Comput. Sci. 2007. Vol. 389, No. 1–2. P. 219–236.
7. **Alekseev V. E., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** Boundary classes of graphs for the dominating set problem // Discrete Math. 2004. Vol. 285, No. 1–3. P. 1–6.
8. **Arnborg S., Proskurowski A.** Linear time algorithms for NP-hard problems restricted to partial k-trees // Discrete Appl. Math. 1989. Vol. 23, No. 1. P. 11–24.
9. **Bodlaender H. L.** Dynamic programming on graphs with bounded treewidth // Automata, Languages and Programming. Proc. 15th Int. Colloq. (Tampere, Finland, July 11–15, 1988). Heidelberg: Springer-Verl., 1988. P. 105–118. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 317).
10. **Bodlaender H. L.** A partial k-arboretum of graphs with bounded treewidth // Theor. Comput. Sci. 1998. Vol. 209, No. 1–2. P. 1–45.
11. **Boliac R., Lozin V. V.** On the clique-width of graphs in hereditary classes // Algorithms and Computation. Proc. 13th Int. Symp. (Vancouver, Canada, Nov. 21–23, 2002), Heidelberg: Springer, 2002. P. 44–54. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 2518).

12. **Courcelle B., Makowsky J., Rotics U.** Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width // Theory Comput. Syst. 2000. Vol. 33, No. 2. P. 125–150.
13. **Dubey C., Feige U., Unger W.** Hardness results for approximating the bandwidth // J. Comput. Syst. Sci. 2011. Vol. 77, No. 1. P. 62–90.
14. **Fellows M., Lokshtanov D., Misra N., Rosamond F., Saurabh S.** Graph layout problems parameterized by vertex cover // Algorithms and Computation. Proc. 19th Int. Symp. (Gold Coast, Australia, Dec. 15–17, 2008), Heidelberg: Springer, 2008. P. 294–305. (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 5369).
15. **Gurski F., Wanke E.** Line graphs of bounded clique-width // Discrete Math. 2007. Vol. 307, No. 22. P. 2734–2754.
16. **Kobler D., Rotics D.** Edge dominating set and colorings on graphs with fixed clique-width // Discrete Appl. Math. 2003. Vol. 126, No. 2–3. P. 197–221.
17. **Miller Z.** The bandwidth of caterpillar graphs // Congr. Numerantium. 1981. Vol. 33. P. 235–252.
18. **Muradian D.** The bandwidth minimization problem for cyclic caterpillars with hair length 1 is NP-complete // Theor. Comput. Sci. 2003. Vol. 307, No. 3. P. 567–572.
19. **Robertson N., Seymour P.** Graph minors. V: Excluding a planar graph // J. Comb. Theory, Ser. B. 1986. Vol. 41, No. 1. P. 92–114.
20. **Robertson N., Seymour P.** Graph minors. XX: Wagner's conjecture // J. Comb. Theory, Ser. B. 2004. Vol. 92, No. 2. P. 325–357.
21. **Saxe J. B.** Dynamic-programming algorithms for recognizing small-bandwidth graphs in polynomial time // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1980. Vol. 1, No. 4. P. 363–369.

Малышев Дмитрий Сергеевич

Статья поступила
11 января 2016 г.

Исправленный вариант —
29 апреля 2016 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2017. Volume 24, No. 1. P. 81–96

UDC 519.17 DOI: 10.17377/daio.2017.24.523

CRITICAL ELEMENTS IN COMBINATORIALLY CLOSED FAMILIES OF GRAPH CLASSES

D. S. Malyshev[1,2]

[1]National Research University Higher School of Economics,
25/12 Bolshaya Pecherskaya St., 603155 Nizhny Novgorod, Russia
[2]Lobachevsky State University,
23 Gagarin Ave., 603950 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: dmalishev@hse.ru, dsmalyshev@rambler.ru

Abstract. The notions of boundary and minimal hard classes of graphs, united by the term "critical classes," are useful tools for analysis of computational complexity of graph problems in the family of hereditary graph classes. In this family, boundary classes are known for several graph problems. In the paper, we consider critical graph classes in the families of strongly hereditary and minor closed graph classes. Prior to our study, there was the only one example of a graph problem for which boundary classes were completely described in the family of strongly hereditary classes. Moreover, no boundary classes were known for any graph problem in the family of minor closed classes. In this article, we present several complete descriptions of boundary classes for these two families and some classical graph problems. For the problem of 2-additive approximation of graph bandwidth, we find a boundary class in the family of minor closed classes. Critical classes are not known for this problem in the other two families of graph classes. Bibliogr. 21.

Keywords: computational complexity, hereditary class, critical class, efficient algorithm.

REFERENCES

1. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness,* Freeman, San Francisco, 1979. Translated under the title *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi,* Mir, Moscow, 1982 [Russian].
2. **D. S. Malyshev,** Continuum sets of boundary graph classes for the colorability problems, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **16**, No. 5, 41–51, 2009 [Russian].
3. **D. S. Malyshev,** On minimal hard classes of graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **16**, No. 6, 43–51, 2009 [Russian].

4. **D. S. Malyshev,** Classes of graphs critical for the edge list-ranking problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **20**, No. 6, 59–76, 2013 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **8**, No. 2, 245–255, 2014.
5. **V. E. Alekseev,** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem, *Discrete Appl. Math.,* **132**, No. 1–3, 17–26, 2003.
6. **V. E. Alekseev, R. Boliac, D. V. Korobitsyn,** and **V. V. Lozin,** NP-hard graph problems and boundary classes of graphs, *Theor. Comput. Sci.,* **389**, No. 1–2, 219–236, 2007.
7. **V. E. Alekseev, D. V. Korobitsyn,** and **V. V. Lozin,** Boundary classes of graphs for the dominating set problem, *Discrete Math.,* **285**, No. 1–3, 1–6, 2004.
8. **S. Arnborg** and **A. Proskurowski,** Linear time algorithms for NP-hard problems restricted to partial k-trees, *Discrete Appl. Math.,* **23**, No. 1, 11–24, 1989.
9. **H. L. Bodlaender,** Dynamic programming on graphs with bounded treewidth, in *Automata, Languages and Programming* (Proc. 15th Int. Colloq., Tampere, Finland, July 11–15, 1988), pp. 105–118, Springer-Verlag, Heidelberg, 1988 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 317).
10. **H. L. Bodlaender,** A partial k-arboretum of graphs with bounded treewidth, *Theor. Comput. Sci.,* **209**, No. 1–2, 1–45, 1998.
11. **R. Boliac** and **V. V. Lozin,** On the clique-width of graphs in hereditary classes, in *Algorithms and Computation* (Proc. 13th Int. Symp., Vancouver, Canada, Nov. 21–23, 2002), pp. 44–54, Springer, Heidelberg, 2002 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 2518).
12. **B. Courcelle, J. Makowsky,** and **U. Rotics,** Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width, *Theory Comput. Syst.,* **33**, No. 2, 125–150, 2000.
13. **C. Dubey, U. Feige,** and **W. Unger,** Hardness results for approximating the bandwidth, *J. Comput. Syst. Sci.,* **77**, No. 1, 62–90, 2011.
14. **M. R. Fellows, D. Lokshtanov, N. Misra, F. A. Rosamond,** and **S. Saurabh,** Graph layout problems parameterized by vertex cover, in *Algorithms and Computation* (Proc. 19th Int. Symp., Gold Coast, Australia, Dec. 15–17, 2008), pp. 294–305, Springer, Heidelberg, 2008 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 5369).
15. **F. Gurski** and **E. Wanke,** Line graphs of bounded clique-width, *Discrete Math.,* **307**, No. 22, 2734–2754, 2007.
16. **D. Kobler** and **D. Rotics,** Edge dominating set and colorings on graphs with fixed clique-width, *Discrete Appl. Math.,* **126**, No. 2–3, 197–221, 2003.
17. **Z. Miller,** The bandwidth of caterpillar graphs, *Congr. Numerantium,* **33**, 235–252, 1981.

18. D. Muradian, The bandwidth minimization problem for cyclic caterpillars with hair length 1 is NP-complete, *Theor. Comput. Sci.,* **307**, No. 3, 567–572, 2003.

19. N. Robertson and **P. Seymour,** Graph minors V: Excluding a planar graph, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **41**, No. 1, 92–114, 1986.

20. N. Robertson and **P. Seymour,** Graph minors XX: Wagner's conjecture, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **92**, No. 2, 325–357, 2004.

21. J. B. Saxe, Dynamic-programming algorithms for recognizing small-bandwidth graphs in polynomial time, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods,* **1**, No. 4, 363–369, 1980.

Dmitry S. Malyshev

Received
11 January 2016

Revised
29 April 2016