ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2017. Том 24, № 1. С. 56–80

УДК 519.17 DOI: 10.17377/daio.2017.24.532

1-ТРЕУГОЛЬНЫЕ ГРАФЫ И СОВЕРШЕННЫЕ ОКРЕСТНОСТНЫЕ МНОЖЕСТВА *)

П. А. Иржавский[a], *Ю. А. Картынник*[b], *Ю. Л. Орлович*[c]

Белорусский гос. университет,
пр. Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь
E-mail: [a]irzhavski@bsu.by, [b]kartynnik@bsu.by, [c]orlovich@bsu.by

Аннотация. Граф называется 1-*треугольным*, если для любого максимального независимого множества I этого графа каждое ребро графа, оба конца которого не принадлежат I, содержится ровно в одном треугольнике с вершиной из множества I. Получена характеризация 1-треугольных графов, из которой следует полиномиальный алгоритм их распознавания. Установлена сложность вычисления в классе 1-треугольных графов ряда теоретико-графовых параметров, связанных с независимостью и доминированием. В частности, установлена NP-полнота задачи о наименьшем совершенном окрестностном множестве в классе всех графов. Библиогр. 20.

Ключевые слова: треугольный граф, рёберно-симплициальный граф, характеризация, совершенное окрестностное множество, NP-полнота.

Введение

Теоретико-графовые понятия и обозначения, не оговоренные специально, следуют [3]. Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных рёбер. *Замкнутым окружением* вершины v называется множество $N[v] = N(v) \cup \{v\}$, где $N(v)$ — окружение этой вершины. Для произвольного подмножества $X \subseteq V(G)$ вершин графа G положим $N(X) = \bigcup_{v \in X} N(v) \setminus X$ и $N[X] = N(X) \cup X$ — *окружение* и *замкнутое окружение* множества X соответственно. *Замкнутым собственным окружением* произвольного ребра $e = uv \in E(G)$ называется множество вершин $PN[e] = N[u] \cap N[v]$. Подграф графа G, порождённый множеством вершин $X \subseteq V(G)$, обозначается через $G(X)$. Положим $G - X = G(V(G) \setminus X)$. Граф G называется H-*свободным* для некоторого

*) Исследование выполнено частично при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф15МЛД–022).

графа H, если G не содержит порождённых подграфов, изоморфных H. Через $K_4 - e$ будем обозначать граф, получаемый удалением произвольного ребра e из полного графа K_4.

Термины «максимальное» и «минимальное» применительно к множествам с каким-либо свойством всюду далее употребляются в смысле включения множеств, а «наибольшее» и «наименьшее» — в смысле мощностей этих множеств.

Пусть C — клика графа G. Если для вершины v клики C выполнено равенство $N[v] = C$, то v называется *симплициальной вершиной* графа G, а C — его *симплициальной кликой.*

Множество D вершин графа G, если $N[D] = V(G)$, называется *доминирующим.* Доминирующее множество D графа G называется *минимальным*, если оно не содержит никакого другого доминирующего множества этого графа. Множество вершин графа называется *независимым доминирующим*, если оно является одновременно независимым и доминирующим. Доминирующее множество D графа G называется *окрестностным* [19], если для каждого ребра $uv \in E(G - D)$ в D найдётся вершина, смежная одновременно с обоими его концами u и v. Это эквивалентно тому, что $G = \bigcup\limits_{v \in D} G(N[v])$. Окрестностное множество D графа G называется *независимым окрестностным*, если оно является одновременно независимым и окрестностным, и *совершенным окрестностным*, если для любых двух различных вершин $u, v \in D$ подграфы, порождённые их замкнутыми окружениями $N[u]$ и $N[v]$, не имеют общих рёбер (в частности, каждое совершенное окрестностное множество независимо) [20].

Множество R вершин графа G называется *избыточным*, если удаление некоторой вершины v из R не изменяет его замкнутого окружения, т. е. $N[R] = N[R \setminus \{v\}]$, и *неизбыточным*, или *ирридантным*, в случае, если такой вершины не существует [7].

Для графа G помимо классических параметров — числа независимости $\alpha(G)$, числа доминирования $\gamma(G)$ и числа независимого доминирования $i(G)$ — будем рассматривать следующие параметры:

наибольшую из мощностей минимальных доминирующих множеств, называемую *верхним числом доминирования* $\Gamma(G)$,

наименьшую из мощностей (минимальных) окрестностных множеств, называемую *окрестностным числом* $\mathrm{nb}(G)$,

наибольшую из мощностей минимальных окрестностных множеств, называемую *верхним окрестностным числом* $\mathrm{NB}(G)$,

наименьшую из мощностей независимых окрестностных множеств,

называемую *независимым окрестностным числом* $n_i(G)$,

наибольшую из мощностей независимых окрестностных множеств, называемую *верхним независимым окрестностным числом* $N_i(G)$,

наименьшую из мощностей совершенных окрестностных множеств, называемую *совершенным окрестностным числом* $n_p(G)$,

наибольшую из мощностей совершенных окрестностных множеств, называемую *верхним совершенным окрестностным числом* $N_p(G)$,

наименьшую из мощностей максимальных ирридантных множеств, называемую *числом ирридантности* $\mathrm{ir}(G)$,

наибольшую из мощностей (максимальных) ирридантных множеств, называемую *верхним числом ирридантности* $\mathrm{IR}(G)$.

Для некоторых из этих параметров в общем случае справедливы соотношения

$$\gamma(G) \leqslant i(G) \leqslant \alpha(G) \leqslant \Gamma(G),$$

поскольку каждое максимальное независимое множество минимально доминирующее [1];

$$\mathrm{ir}(G) \leqslant \gamma(G) \leqslant \Gamma(G) \leqslant \mathrm{IR}(G),$$

так как каждое минимальное доминирующее множество максимально ирридантно [7];

$$\gamma(G) \leqslant \mathrm{nb}(G) \leqslant \mathrm{NB}(G),$$

поскольку каждое окрестностное множество доминирующее.

Во введении к [4] приведено ошибочное соотношение $\mathrm{NB}(G) \leqslant \Gamma(G)$ для произвольного графа G. Обозначим через H дерево, полученное из двух цепей P_3 путём соединения ребром их центральных вершин. Тогда $\Gamma(H) = 4 > 3 = \mathrm{NB}(H)$, а для простого цикла C_5 верно $\Gamma(C_5) = 2 < 3 = \mathrm{NB}(C_5)$, т. е. эти параметры могут отличаться друг от друга в обе стороны.

Независимое окрестностное множество найдётся не в любом графе (например, таких множеств не содержит простой цикл C_5), и параметры n_i и N_i могут быть не определены. В предположении, что в графе G существует хотя бы одно независимое окрестностное множество, имеем

$$\mathrm{nb}(G) \leqslant n_i(G) \leqslant N_i(G) \leqslant \mathrm{NB}(G),$$

поскольку каждое независимое окрестностное множество является минимальным окрестностным;

$$i(G) \leqslant n_i(G) \leqslant N_i(G) \leqslant \alpha(G),$$

так как независимые окрестностные множества являются максимальными независимыми.

Совершенное окрестностное множество найдётся не в каждом графе, содержащем независимые окрестностные множества. Например, квадрат простого цикла C_6 содержит независимые окрестностные множества вершин, но ни одно из них не является совершенным.

Если граф G содержит хотя бы одно совершенное окрестностное множество, то для него наряду с параметрами n_i и N_i также определены параметры n_p и N_p и $n_i(G) \leqslant n_p(G) \leqslant N_p(G) \leqslant N_i(G)$, поскольку каждое совершенное окрестностное множество является независимым окрестностным.

Указанные неравенства в предположении существования в графе G совершенных окрестностных множеств проиллюстрированы на следующей схеме:

$$\mathrm{ir}(G) \leqslant \gamma(G) \begin{array}{l} \leqslant i(G) \leqslant \\ \leqslant \mathrm{nb}(G) \leqslant \end{array} n_i(G) \leqslant n_p(G)$$

$$\leqslant N_p(G) \leqslant N_i(G) \begin{array}{l} \leqslant \alpha(G) \leqslant \Gamma(G) \leqslant \mathrm{IR}(G) \\ \leqslant \mathrm{NB}(G) \end{array} .$$

Граф G называется *общим графом разбиений*, если существует множество S произвольной природы, для которого выполнены следующие условия:

1) каждой вершине $v \in V(G)$ можно поставить в соответствие непустое подмножество S_v множества S так, что две вершины u и v смежны в графе G тогда и только тогда, когда $S_u \cap S_v \neq \varnothing$;
2) для каждого максимального независимого множества I графа G набор подмножеств $\{S_v \mid v \in I\}$ является разбиением множества S.

Общие графы разбиений изучались в связи с триангуляциями многоугольников на целочисленной решётке [12], а также в более общем контексте [11, 14, 15]. Обнаружено следующее необходимое «треугольное» условие принадлежности графа G классу общих графов разбиений [15,«условие T»; 11, теорема 2]: для каждого максимального независимого множества I графа G и каждого ребра $uv \in E(G - I)$ найдётся вершина $w \in I$, одновременно смежная с вершинами u и v (т. е. множество вершин $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе G). Это условие эквивалентно тому, что каждое максимальное независимое множество графа G является его независимым окрестностным множеством.

Ю. Л. Орлович и Е. И. Зверович [18] назвали *треугольными* графы, удовлетворяющие треугольному условию. Для класса треугольных гра-

фов была доказана NP-полнота распознавательных версий задач о наименьшем независимом доминирующем множестве [18] и наибольшем независимом множестве [17] (полиномиально эквивалентных нахождению $i(G)$ и $\alpha(G)$ соответственно). Более того, было доказано, что в предположении $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ для оптимизационной версии задачи о наименьшем независимом доминирующем множестве в классе треугольных графов не существует полиномиального $n^{1-\varepsilon}$-приближённого алгоритма для любого $\varepsilon > 0$, где n — порядок графа. Обнаруженная связь между максимальными независимыми и независимыми окрестностными множествами в классе треугольных графов позволила распространить эти результаты на задачи о наименьшем и наибольшем независимых окрестностных множествах (полиномиально эквивалентные нахождению $n_i(G)$ и $N_i(G)$ соответственно).

Борош, Гурвич и Миланич [8] приводят обширную иерархию классов графов, связанных с треугольными. В неё входит и класс CIS-*графов*, характеризующихся тем, что каждая максимальная клика в таком графе имеет непустое пересечение с каждым максимальным независимым множеством.

В [4] введён класс *доминантно-треугольных* графов (и класс *ирридантно-треугольных* графов) как графов, в которых каждое минимальное доминирующее (соответственно максимальное ирридантное) множество является окрестностным. Такие графы, очевидно, треугольные. Показано, что классы доминантно-треугольных и ирридантно-треугольных графов совпадают и характеризуются в точности «условием E» из [6], достаточным для принадлежности графа классу общих графов разбиений и заключающемся в том, что каждое ребро графа принадлежит подграфу, порождённому симплициальной кликой. Этим «рёберным» условием определяется класс *рёберно-симплициальных* графов, известный также как класс *графов верхних границ* [9]. Для этого класса графов существует алгоритм распознавания со сложностью $O(|V(G)|+|E(G)|)$, основанный на перечислении симплициальных клик [10].

В каждом доминантно-треугольном графе семейства всех максимальных ирридантных множеств, всех минимальных доминирующих множеств и всех минимальных окрестностных множеств совпадают. В силу этого для произвольного доминантно-треугольного графа G верны соотношения $\mathrm{ir}(G) = \gamma(G) = \mathrm{nb}(G)$; кроме того, $i(G) = n_i(G)$, как и для всех треугольных графов [5]. При этом доказано, что для некоторой фиксированной константы c в предположении $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ не существует полиномиального $c \ln n$-приближённого алгоритма для задачи о наименьшем

доминирующем множестве в классе доминантно-треугольных графов [4], где n — порядок графа. Также в классе доминантно-треугольных графов остаётся верным результат о неаппроксимируемости (с той же точностью до $n^{1-\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$) задачи о наименьшем независимом доминирующем множестве, полученный для треугольных графов, так как использованные в соответствующем доказательстве графы доминантно-треугольные. С другой стороны, для любого доминантно-треугольного графа G верны соотношения: $N_i(G) = \alpha(G)$, как и для всех треугольных графов [17]; $\alpha(G) = \Gamma(G) = \mathrm{IR}(G) = s(G)$, как для рёберно-симплициального графа, где $s(G)$ — число симплициальных клик графа G [10]; $\Gamma(G) = \mathrm{NB}(G)$ в силу совпадения семейств всех минимальных доминирующих множеств и всех минимальных окрестностных множеств графа G. Таким образом, для каждого доминантно-треугольного графа G параметры $N_i(G) = \alpha(G) = \mathrm{NB}(G) = \Gamma(G) = \mathrm{IR}(G)$ совпадают между собой и тривиально вычисляются как число $s(G)$ симплициальных клик этого графа [10]. Тем не менее, можно показать, что существуют доминантно-треугольные графы, не содержащие совершенных окрестностных множеств.

В настоящей работе вводится и характеризуется класс 1-треугольных графов, основанный на дополнительном ограничении о единственности треугольника в формулировке треугольного условия. Устанавливается, что класс 1-треугольных графов совпадает с классами (K_4-e)-свободных CIS-графов и $(K_4 - e)$-свободных треугольных графов. Получаемая затем структурная характеризация 1-треугольных графов влечёт полиномиальный алгоритм их распознавания и указывает на тесную связь класса 1-треугольных графов с классом доминантно-треугольных графов. А именно, каждый связный 1-треугольный граф принадлежит хотя бы одному из следующих семейств графов: полные двудольные $K_{m,n}$, декартовы произведения $K_m \times K_m$ двух полных графов одинакового порядка, (K_4-e)-свободные доминантно-треугольные. Далее класс 1-треугольных графов используется для доказательства NP-полноты распознавательной версии задачи о наименьшем совершенном окрестностном множестве, полиномиально эквивалентной вычислению параметра $n_p(G)$. Этот результат представляет интерес в классе всех графов.

1. Свойства $(K_4 - e)$-свободных графов

При характеризации 1-треугольных графов потребуются следующие утверждения о $(K_4 - e)$-свободных графах. Некоторые из них общеизвестны, но для полноты изложения приводятся с доказательствами.

Теорема 1. *Граф G является $(K_4 - e)$-свободным тогда и только тогда, когда любые две различные его максимальные клики имеют не более одной общей вершины.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — (K_4-e)-свободный граф. Предположим, что у двух различных максимальных клик $C_1, C_2 \subseteq V(G)$ есть по крайней мере две общие вершины u и v. В силу максимальности этих клик также найдутся вершины $x \in C_1 \setminus C_2$ и $y \in C_2 \setminus C_1$, для которых $xy \notin E(G)$, но тогда подграф $G(\{u, v, x, y\})$, порождённый этими четырьмя вершинами, изоморфен $K_4 - e$; противоречие.

Достаточность. Пусть в графе G любые две различные максимальные клики имеют не более одной общей вершины. Предположим, что граф G не является (K_4-e)-свободным. Пусть порождённый подграф $G(\{u, v, x, y\})$ изоморфен $K_4 - e$, причём вершины x и y не смежны. Тогда множества вершин $\{u, v, x\}$ и $\{u, v, y\}$, порождающие в графе G треугольники, можно дополнить до двух различных максимальных клик, имеющих по крайней мере две общие вершины u и v; противоречие. Следовательно, граф G является $(K_4 - e)$-свободным. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть C — максимальная клика $(K_4 - e)$-свободного графа G. Тогда любая вершина $x \in V(G) \setminus C$ смежна не более чем с одной вершиной из C.*

Доказательство. Предположим противное, пусть для некоторой вершины $x \in V(G) \setminus C$ нашлись две различные смежные с ней вершины $u, v \in C$. Дополним множество вершин $\{u, v, x\}$ до максимальной клики C'. Тогда клики C и C' будут различны, поскольку x принадлежит только C'. С другой стороны, эти клики имеют по крайней мере две общие вершины u и v, что противоречит теореме 1. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Пусть C, C_1 и C_2 — попарно различные максимальные клики (K_4-e)-свободного графа G, и пусть $u \in C \cap C_1$, $v \in C \cap C_2$, $u \neq v$. Тогда клики C_1 и C_2 не пересекаются.*

Доказательство. Предположим, что у клик C_1 и C_2 имеется общая вершина x. Без ограничения общности можно считать, что $x \neq u$. Вершина x не может принадлежать клике C по теореме 1, иначе максимальные клики C и C_1 будут иметь по крайней мере две общие вершины u и x. Тогда вершина $x \in V(G) \setminus C$ смежна с двумя вершинами $u, v \in C$, что противоречит следствию 1. Следствие 2 доказано.

Следствие 3. *Пусть C, C_1 и C_2 — попарно различные максимальные клики (K_4-e)-свободного графа G, и пусть $u \in C \cap C_1$, $v \in C \cap C_2$,$u \neq v$.*

Тогда никакие две различные вершины $u', u'' \in C_1$ не смежны одновременно с одной и той же вершиной $v' \in C_2$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть две различные вершины $u', u'' \in C_1$ смежны с одной и той же вершиной $v' \in C_2$. В силу следствия 2 имеем $v' \notin C_1$. Тогда вершина $v' \in V(G) \setminus C_1$ смежна с двумя различными вершинами $u', u'' \in C_1$, что противоречит следствию 1. Следствие 3 доказано.

Теорема 2. *Граф G является $(K_4 - e)$-свободным тогда и только тогда, когда для каждого ребра $e \in E(G)$ его замкнутое собственное окружение $PN[e]$ является максимальной кликой.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что G — $(K_4 - e)$-свободный граф, но для некоторого ребра $e = uv \in E(G)$ в его замкнутом собственном окружении $PN[e]$ найдутся две несмежные вершины x и y. По определению замкнутого собственного окружения $PN[e] \subseteq N[u]$ и $PN[e] \subseteq N[v]$, поэтому обе вершины x и y отличны от u и v. Тогда $G(\{u, v, x, y\})$ — порождённый подграф, изоморфный $K_4 - e$; противоречие. Следовательно, $PN[e]$ — клика для каждого ребра $e \in E(G)$. Поскольку каждая вершина графа, смежная одновременно с u и v, принадлежит $PN[e]$, клика $PN[e]$ максимальная.

Достаточность. Предположим, что $PN[e]$ является максимальной кликой для любого ребра $e \in E(G)$, но граф G не $(K_4 - e)$-свободный. Пусть порождённый подграф $G(\{u, v, x, y\})$ изоморфен $K_4 - e$, причём вершины x и y не смежны. Тогда замкнутое собственное окружение $PN[uv]$ ребра uv содержит несмежные вершины x и y; противоречие с предположением, по которому $PN[uv]$ является кликой. Теорема 2 доказана.

2. Свойства 1-треугольных графов

Граф G назовём 1-*треугольным*, если для каждого максимального независимого множества I графа G и каждого ребра $uv \in E(G - I)$ найдётся единственная вершина $w \in I$, одновременно смежная с вершинами u и v (т. е. множество вершин $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе G). Иными словами, граф 1-треугольный, если и только если каждое его максимальное независимое множество является совершенным окрестностным. Каждый 1-треугольный граф, очевидно, является треугольным.

Теорема 3. *Для графа G следующие утверждения эквивалентны:*
(i) G — *1-треугольный граф;*

(ii) G — $(K_4 - e)$-*свободный треугольный граф*;

(iii) G — $(K_4 - e)$-*свободный* CIS-*граф.*

Доказательство. (i)⇒(ii) Пусть G — 1-треугольный граф. Тогда он треугольный. Требуется доказать, что в G нет порождённых подграфов, изоморфных $K_4 - e$. Пусть, напротив, порождённый подграф $G(\{u, v, x, y\})$ изоморфен $K_4 - e$, причём вершины x и y не смежны. Рассмотрим произвольное максимальное независимое множество I в графе G, содержащее вершины x и y. Тогда ребро $uv \in E(G - I)$ содержится по крайней мере в двух треугольниках $G(\{u, v, x\})$ и $G(\{u, v, y\})$, что противоречит свойству 1-треугольности графа G.

(ii)⇒(iii) Пусть G — $(K_4 - e)$-свободный треугольный граф. Покажем, что он является CIS-графом. Рассмотрим произвольную максимальную клику C этого графа. Если $|C| = 1$, то единственная вершина этой клики изолированная и потому принадлежит каждому максимальному независимому множеству графа G. Иначе найдётся ребро $uv \in E(G)$, для которого $u, v \in C$. По теореме 2 замкнутое собственное окружение $PN[uv]$ ребра uv будет максимальной кликой. Поскольку каждая клика, содержащая вершины u и v, является подмножеством $PN[uv]$, имеем $PN[uv] = C$. Треугольное свойство графа G эквивалентно тому, что каждое максимальное независимое множество I графа G пересекается с замкнутым собственным окружением $PN[e]$ каждого ребра $e \in E(G)$. В частности, каждое максимальное независимое множество I графа G пересекается с $PN[uv] = C$. Таким образом, каждая максимальная клика $C \subseteq V(G)$ пересекается с каждым максимальным независимым множеством $I \subseteq V(G)$, т. е. G является CIS-графом.

(iii)⇒(i) Пусть G — $(K_4 - e)$-свободный CIS-граф. Рассмотрим произвольное максимальное независимое множество $I \subseteq V(G)$ и любое ребро $e \in E(G)$. По теореме 2 замкнутое собственное окружение $PN[e]$ ребра e является максимальной кликой, поэтому в CIS-графе G максимальная клика $PN[e]$ и максимальное независимое множество I имеют ровно одну общую вершину, т. е. $|PN[e] \cap I| = 1$. В силу произвольности I и e это эквивалентно тому, что граф G 1-треугольный. Теорема 3 доказана.

Порождённая цепь $P_4 = (a, b, c, d)$ в графе G называется *плохой* P_4, если в этом графе существует максимальное независимое множество I, содержащее вершины a и d и не содержащее ни одной вершины, смежной с обеими вершинами b и c одновременно [16].

В дальнейшем будем опираться на следующую характеризацию треугольных графов, в которой нетрудно убедиться непосредственно.

Теорема 4 [16]. *Граф G является треугольным тогда и только тогда, когда он не содержит плохих P_4.*

Следствие 4. *Полный двудольный граф $K_{m,n}$ является 1-треугольным при $m, n \geqslant 1$.*

Доказательство. Граф $K_{m,n}$ $(K_4 - e)$-свободный, поскольку не содержит треугольников. Кроме того, он не содержит порождённых цепей P_4 и тем самым является треугольным по теореме 4. Значит, по теореме 3 он 1-треугольный. Следствие 4 доказано.

Теорема 5. *Если связный 1-треугольный граф G содержит двухвершинную максимальную клику, не являющуюся симплициальной, то G — полный двудольный граф с долями мощности не менее 2.*

Доказательство. Предположим, что вершины x и y образуют двухвершинную максимальную клику в графе G, не являющуюся симплициальной. Рассмотрим множества вершин $X = N(y)$ и $Y = N(x)$ (таким образом, $x \in X$ и $y \in Y$). Эти множества не пересекаются в силу максимальности клики $\{x, y\}$. Каждое из них содержит не менее двух вершин, иначе клика $\{x, y\}$ была бы симплициальной.

Докажем, что каждая вершина множества X смежна с каждой вершиной множества Y. Это нужно доказать только для произвольных вершин $x' \in X$ и $y' \in Y$, отличных от x и y соответственно. Предположим, что вершины x' и y' не смежны. Рассмотрим произвольное максимальное независимое множество I графа G, содержащее x' и y'. Множество I обладает тем свойством, что в нём нет вершины, которая вместе с x и y порождает треугольник в графе G. Тогда порождённая цепь (x', y, x, y') является плохой P_4, что противоречит теореме 4.

Докажем далее, что X и Y — независимые множества вершин в графе G. Без ограничения общности проведём доказательство лишь для множества X. Допустим, что вершины $x', x'' \in X$ смежны. В Y выберем вершину y и отличную от неё вершину y'. Тогда y и y' будут несмежны (иначе $y' \in Y \cap N(y) = Y \cap X$, что невозможно). В результате получим изоморфный $K_4 - e$ порождённый подграф $G(\{x', x'', y, y'\})$, что противоречит свойству 1-треугольности графа G по теореме 3.

Наконец, предположим, что в графе G найдётся вершина z, не принадлежащая множеству $X \cup Y$. В силу связности графа G без ограничения общности можно считать, что z смежна с некоторой вершиной $x^* \in X$. При этом вершина z не смежна с вершиной x, так как $z \notin Y = N(x)$. Тогда порождённая цепь (z, x^*, y, x) является плохой P_4. Действительно, предположим, что в произвольном максимальном неза-

висимом множестве I графа G, содержащем вершины x и z, нашлась вершина $w \in I$, смежная одновременно с x^* и y. Тогда вершины $x^* \in X$ и $w \in N(y) = X$ смежны, что противоречит независимости множества X. Наличие указанной плохой P_4 противоречит свойству 1-треугольности графа G.

Таким образом, G является полным двудольным графом с долями $X = N(y)$ и $Y = N(x)$, при этом $|X| \geqslant 2$ и $|Y| \geqslant 2$. Теорема 5 доказана.

Отметим, что все полные двудольные графы вида $K_{1,n}$ рёберно-симплициальны.

Теорема 6 [16, теорема 7]. *Пусть* $G \cong K_{n_1} \times K_{n_2} \times \cdots \times K_{n_k}$, $k \geqslant 2$, $n_i \geqslant 2$. *Граф* G *является треугольным тогда и только тогда, когда* $k = 2$ *и* $n_1 = n_2$, *т. е.* $G \cong K_m \times K_m$ *для некоторого целого числа* $m \geqslant 2$.

Следствие 5. *Граф* $K_m \times K_m$ *для любого целого числа* $m \geqslant 1$ *является* 1-*треугольным.*

Доказательство. Случай $m = 1$ тривиален. Для случая $m \geqslant 2$ граф $G = K_m \times K_m$ треугольный по теореме 6. Как нетрудно видеть, замкнутое собственное окружение каждого ребра графа G является максимальной кликой, поэтому граф G является $(K_4 - e)$-свободным по теореме 2. Но тогда $(K_4 - e)$-свободный треугольный граф G по теореме 3 является 1-треугольным. Следствие 5 доказано.

Отметим, что декартово произведение $K_m \times K_m$ двух полных графов порядка m изоморфно рёберному графу $L(K_{m,m})$ от m-регулярного полного двудольного графа $K_{m,m}$.

3. Характеризация 1-треугольных графов

Напомним, что граф является рёберно-симплициальным, если каждое его ребро принадлежит подграфу, порождённому некоторой симплициальной кликой. Напомним также, что класс рёберно-симплициальных графов совпадает с классом доминантно-треугольных (и ирридантно-треугольных) графов.

Теорема 7 (характеризация 1-треугольных графов). *Для связного графа* G *следующие утверждения эквивалентны*:

(i) G — 1-*треугольный граф*;

(ii) *выполняется по крайней мере одно из следующих условий*:

(a) G — *полный двудольный граф*;

(б) G — *декартово произведение* $K_m \times K_m$ *двух полных графов равных порядков для некоторого натурального числа* m;

(в) G — $(K_4 - e)$-*свободный рёберно-симплициальный граф.*

Доказательство. (ii)⇒(i) Покажем, что каждое из трёх условий утверждения (ii) влечёт свойство 1-треугольности для графа G.

(а) Если G — полный двудольный граф, то он 1-треугольный по следствию 4.

(б) Если граф G изоморфен $K_m \times K_m$, то он 1-треугольный по следствию 5.

(в) Если граф G рёберно-симплициальный, то он доминантно-треугольный и поэтому треугольный [4,6]. В силу того, что G — $(K_4 - e)$-свободный граф, он по теореме 3 1-треугольный.

(i)⇒(ii). Непосредственная проверка показывает, что все связные графы порядка меньше четырёх являются 1-треугольными и рёберно-симплициальными. Пусть G — связный 1-треугольный граф порядка $|G| \geqslant 4$. Предположим, что G — не рёберно-симплициальный граф, иначе выполнено условие (в) утверждения (ii).

Тогда в графе G существует несимплициальная максимальная клика C, т. е. обладающая тем свойством, что каждая её вершина принадлежит по крайней мере двум максимальным кликам этого графа. Обозначим $k = |C|$. Если $k = 2$, то по теореме 5 граф G полный двудольный, следовательно, выполнено условие (а) утверждения (ii). Поэтому далее будем считать, что $k \geqslant 3$. Для каждой вершины v клики C зафиксируем клику C_v — произвольную из максимальных клик, отличных от C и содержащих v ($C \cap C_v = \{v\}$ согласно теореме 1). Для удобства дальнейших рассуждений введём обозначение $C'_v = C_v \setminus \{v\}$. Тогда $C'_v \cap C = \varnothing$ для всех $v \in C$.

Напомним, что 1-треугольный граф G является $(K_4 - e)$-свободным CIS-графом согласно теореме 3. По теореме 1 любые две его максимальные клики имеют не более одной общей вершины. По следствию 2 клики C_u и C_v не пересекаются для любых различных вершин $u, v \in C$. Это позволяет корректно ввести обозначение $r(v') = v$ для всех вершин v' каждой клики C_v, $v \in C$. По следствию 3 для любых двух различных клик C_u и C_v, $u, v \in C$, никакие две различные вершины $u', u'' \in C_u$ не смежны одновременно с одной и той же вершиной $v' \in C_v$.

В процессе доказательства теоремы все вспомогательные утверждения будут формулироваться в текущих предположениях: G — 1-треугольный граф, C — несимплициальная максимальная клика мощности $k \geqslant 3$ в этом графе; для каждой вершины v клики C зафиксиро-

вана другая содержащая эту вершину максимальная клика C_v, причём $C \cap C_v = \{v\}$ (клики C_v, $v \in C$, попарно не пересекаются); введены обозначения $C'_v = C_v \setminus \{v\}$ и $r(v') = v$ для всех $v' \in C_v$.

Лемма 1. *Пусть задано независимое множество* $I_0 \subseteq \bigcup\limits_{v\in C} C'_v$, *содержащее по одной вершине некоторых из клик* C'_v, $v \in C$ *(возможно пустое). Обозначим* $Z(I_0) = C \setminus \{r(v') \mid v' \in I_0\}$. *Тогда множество* $Z(I_0)$ *непусто, а для любой вершины* $z \in Z(I_0)$ *существует независимое множество* $\mathcal{I}(I_0, z)$, *включающее* I_0 *и содержащее по одной вершине из каждой клики* C'_x, $x \in Z(I_0) \setminus \{z\}$. *Более того, существует такая биекция* $f_{\mathcal{I}} \colon C'_z \to \mathcal{I}(I_0, z)$, *для которой две произвольные вершины* $z' \in C'_z$ *и* $w \in \mathcal{I}(I_0, z)$ *смежны в графе* G *тогда и только тогда, когда* $f_{\mathcal{I}}(z') = w$. *Другими словами, подграф графа* G, *порождённый множеством рёбер* $\{z'w \mid z' \in C'_z,\ w \in \mathcal{I}(I_0, z)\}$, *является совершенным паросочетанием.*

Доказательство. Если $Z(I_0) = \varnothing$, то I_0 содержит по одной вершине из каждой клики C'_v, $v \in C$. Тогда после дополнения I_0 до максимального независимого множества I' приходим к противоречию с теоремой 3, поскольку клика C не имеет общих вершин с I', что невозможно в CIS-графе G.

Таким образом, $Z(I_0) \neq \varnothing$. Введём обозначение $\mathbf{C}' = \{C'_v \mid v \in Z(I_0)\}$. Занумеруем элементы множества $\mathbf{C}'$ натуральными числами от 1 до $|\mathbf{C}'|$ в произвольном порядке так, чтобы клика C'_z имела наибольший номер. Будем строить независимое множество I, начиная с множества вершин I_0 и последовательно, пока это возможно, добавляя в него по одной вершине x', не смежной с ранее выбранными вершинами, из каждой клики $C'_x \in \mathbf{C}'$ в порядке возрастания номеров клик.

Если бы, действуя по указанной схеме, удалось включить в множество I по одной вершине из каждой клики $C'_x \in \mathbf{C}'$, то после дополнения I до максимального независимого множества I' снова получили бы противоречие с теоремой 3.

Стало быть, описанный процесс построения множества I останавливается на некоторой клике $C'_x \in \mathbf{C}'$ по той причине, что каждая вершина из C'_x смежна с некоторой вершиной из I. Введём отображение $f \colon C'_x \to I$, которое ставит в соответствие каждой вершине $x' \in C'_x$ некоторую смежную с ней вершину $f(x') \in I$. Отображение f инъективно, так как наличие двух различных вершин $x', x'' \in C'_x$, одновременно смежных с $f(x') = f(x'') \in V(G) \setminus C_x$, противоречит следствию 1. Обозначим через I^* образ множества C'_x при отображении f. Тогда сужение $f \colon C'_x \to I^*$ будет биекцией.

Предположим, что имеется клика C'_y, $y \in Z(I_0)$, отличная от C'_x, для которой $I^* \cap C'_y = \varnothing$. Тогда вершина y не смежна ни с одной вершиной из I^* по следствию 1. Дополнив множество $I^* \cup \{y\}$ до максимального независимого множества I', получим $I' \cap C_x = \varnothing$, что в CIS-графе G невозможно.

Из этого следует, что процесс построения множества I не мог остановиться раньше, чем на клике C'_z с наибольшим номером, поэтому $x = z$. Также из этого следует, что $I \setminus I^* = \varnothing$, а значит, $f\colon C'_z \to I$ — требуемая биекция. Таким образом, можно положить $\mathcal{I}(I_0, z) = I$ и $f_{\mathcal{I}} = f$. Лемма 1 доказана.

Следствие 6. *Для любой вершины $v \in C$ выполняется соотношение*

$$|C_v| = |C'_v| + 1 = |C| = k.$$

Доказательство. Построим по лемме 1 независимое множество $I = \mathcal{I}(\varnothing, v)$. Из существования биекции $f_{\mathcal{I}}$ между C'_v и множеством I, содержащим ровно по одной вершине каждой из остальных клик C_u, $u \neq v$, следует, что

$$|C'_v| = |I| = |C \setminus \{v\}| = |C| - 1 = k - 1.$$

Следствие 6 доказано.

Следствие 7. *Каждая вершина из любой клики C_x смежна ровно с одной вершиной из каждой другой клики C_y.*

Доказательство. Любая вершина $x' \in C_x$ не может быть смежна с двумя различными вершинами клики C_y по следствию 3. Поэтому достаточно показать, что каждая вершина $x' \in C_x$ смежна хотя бы с одной вершиной клики C_y. Это верно для вершины x, которая смежна с вершиной $y \in C_y$. Рассмотрим произвольную вершину $x' \in C'_x$. Построим согласно лемме 1 независимое множество $\mathcal{I}(\{x'\}, y)$. Это множество будет содержать вершину x', с которой будет смежна вершина $y' = f_{\mathcal{I}}^{-1}(x') \in C'_y \subseteq C_y$. Следствие 7 доказано.

Следствие 8. *Пусть x, y, z — произвольные попарно различные вершины клики C. Тогда любые две вершины $y' \in C'_y$ и $z' \in C'_z$, одновременно смежные с вершиной $x' \in C'_x$, смежны между собой.*

Доказательство. Предположим, напротив, что вершины y' и z' несмежны. По лемме 1 построим независимое множество $I = \mathcal{I}(\{y', z'\}, x)$. Тогда вершина x' будет смежна по меньшей мере с двумя вершинами $y', z' \in I$; противоречие с утверждением леммы 1. Следствие 8 доказано.

Обозначим порождённый подграф $G\big(\bigcup_{v\in C} C_v\big)$ через H и полностью опишем его структуру. Для этого пронумеруем вершины клики C произвольным образом натуральными числами от 1 до k. Пусть $\alpha(v)$ — номер вершины v в клике C согласно этой нумерации. Для всех вершин v' каждой клики C'_v, $v \in C$, положим $\alpha(v') = \alpha(v)$. Зафиксируем произвольную клику C_v, $v \in C$, и также пронумеруем её вершины натуральными числами от 1 до k (независимо от номера вершины v в клике C). Пусть $\beta(v')$ — номер вершины v' в клике C_v согласно этой нумерации. Для каждой вершины $u' \in C_u$, $u \neq v$, положим $\beta(u') = \beta(v')$, где v' — единственная вершина из клики C_v, смежная с u' по следствию 7. Тогда вершины с одинаковым значением α образуют клики C_v, $v \in C$, по определению значений α, а вершины с одинаковым значением β, отличные от вершин клики C, образуют клики по следствию 8. Между вершинами порождённого подграфа H нет других рёбер по следствию 7.

Таким образом, две вершины u и v графа H смежны тогда и только тогда, когда $\alpha(u) = \alpha(v)$ или $\beta(u) = \beta(v)$, поэтому $H \cong K_k \times K_k$.

Далее будем обозначать через $v_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$, ту единственную вершину x графа H, для которой $\alpha(x) = i$ и $\beta(x) = j$. Введём обозначения для клик: $R_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots, v_{i,k}\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и $Q_j = \{v_{1,j}, v_{2,j}, \ldots, v_{k,j}\}$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

Каждая клика R_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, является максимальной в графе G по построению (она совпадает с максимальной кликой C_v для той вершины $v \in C$, для которой $\alpha(v) = i$). Покажем, что каждая клика Q_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, также максимальна в графе G. Без ограничения общности предположим, напротив, что клика Q_1 не максимальна, т. е. найдётся вершина $s \in V(G) \setminus V(H)$, для которой $Q_1 \subseteq N(s)$. По следствию 1 для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ вершина s не может быть смежна ни с одной из вершин $v_{i,j}$, $2 \leqslant j \leqslant k$, поскольку она уже смежна с другой вершиной $v_{i,1}$ максимальной клики R_i. Тогда произвольное максимальное независимое множество, содержащее независимое множество $\{s, v_{2,2}, v_{3,3}, \ldots, v_{k,k}\}$, не будет пересекаться с максимальной кликой R_1, что в CIS-графе G невозможно.

Осталось показать, что $G = H$, т. е. что в графе G нет вершин, не принадлежащих порождённому подграфу H. Предположим, что в G имеется вершина $t \notin V(H)$. В силу связности графа G без ограничения общности можно считать, что вершина t смежна в графе G хотя бы с одной вершиной подграфа H. По следствию 1 вершина t не может быть смежна одновременно с двумя вершинами u и v, принадлежащими одной максимальной клике R_i или Q_j, $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Ввиду этого без огра-

ничения общности будем считать, что $N(t) \cap V(H) = \{v_{1,1}, v_{2,2}, \ldots, v_{r,r}\}$ для некоторого $r \leqslant k$ (этого можно добиться перестановкой номеров внутри α- и/или β-нумерации вершин, что эквивалентно перенумерации клик R_i или Q_j). Тогда произвольное максимальное независимое множество, содержащее независимое множество $\{t, v_{2,k}, v_{3,2}, v_{4,3}, \ldots, v_{k,k-1}\}$ (напомним, что $k \geqslant 3$), не будет пересекаться с максимальной кликой R_1, что невозможно в CIS-графе G.

Таким образом, $G = H \cong K_m \times K_m$ при $m = k$ и выполнено условие (б) утверждения (ii). Теорема 7 доказана.

4. Вычислительная сложность задач в классе 1-треугольных графов

Терминология теории вычислительной сложности далее следует [2].

Так как каждое независимое окрестностное множество в произвольном 1-треугольном графе является и совершенным окрестностным, имеем $n_i(G) = n_p(G)$ и $N_i(G) = N_p(G)$ для каждого 1-треугольного графа G.

Согласно характеризации 1-треугольные графы, не являющиеся полными двудольными или декартовыми произведениями вида $K_m \times K_m$, рёберно-симплициальны или, что то же самое, доминантно-треугольны. Это значит, что в классе 1-треугольных графов параметры N_i, N_p, α, Γ, IR, NB совпадают (они равны мощности большей из долей для полных двудольных графов; для графов вида $K_m \times K_m$ все эти параметры равны m; для доминантно-треугольных графов они совпадают с числом симплициальных клик [4, 10]) и могут быть вычислены за полиномиальное время путём проверки частных случаев (а) и (б) утверждения (ii) теоремы 7 и дальнейшего перечисления симплициальных клик.

С другой стороны, для каждого 1-треугольного графа G справедливы равенства $\mathrm{ir}(G) = \gamma(G) = \mathrm{nb}(G)$ и $i(G) = n_i(G)$, справедливые для всех доминантно-треугольных графов [4] (для полных двудольных графов они равны мощности меньшей из долей; для графов вида $K_m \times K_m$ все эти параметры равны m).

Ниже будет показано, что несмотря на указанные совпадения параметров задачи вычисления как значения $i(G) = n_i(G) = n_p(G)$, так и значения $\mathrm{ir}(G) = \gamma(G) = \mathrm{nb}(G)$ NP-трудны в классе 1-треугольных графов.

Введём для произвольного графа G операцию $\mathrm{Tri}(G)$, которая заключается в добавлении для каждого ребра $uv \in E(G)$ новой вершины x_{uv} и рёбер ux_{uv}, vx_{uv}.

Рассмотрим произвольный граф G. Для произвольного независимого множества I этого графа через M_I обозначим множество рёбер между

вершинами множества I и вершинами множества $V(G) \setminus I$. Обозначим через $\mathrm{st}(G)$ наибольшее значение разности $|M_I| - |I|$ по всем независимым множествам I графа G.

Лемма 2. *Для произвольного графа G без изолированных вершин верно равенство*

$$\mathrm{st}(G) = |E(G)| - i(\mathrm{Tri}(G)).$$

Доказательство. Пусть I — независимое множество графа G такое, что $\mathrm{st}(G) = |M_I| - |I|$. Без ограничения общности можно считать, что I является максимальным независимым, поскольку если множество $I' = I \cup \{v\}$ независимо для некоторой вершины $v \notin I$, то

$$|M_{I'}| - |I'| = |M_I| + \deg v - (|I| + 1) \geqslant |M_I| - |I|$$

в силу того, что $\deg v \geqslant 1$. Тогда множество вершин $I \cup \{x_{uv} \mid uv \in E(G) \setminus M_I\}$ независимое доминирующее в графе $H = \mathrm{Tri}(G)$ и имеет мощность $|I| + |E(G)| - |M_I| = |E(G)| - \mathrm{st}(G)$, откуда $i(H) \leqslant |E(G)| - \mathrm{st}(G)$.

Пусть D — независимое доминирующее множество графа H, для которого $|D| = i(H)$. Множество вершин $S = D \cap V(G)$ будет независимым множеством графа G. Для каждого ребра $uv \in E(G)$ имеем $x_{uv} \in D \setminus S$ тогда и только тогда, когда $uv \notin M_S$. Поэтому $|M_S| = |E(G)| - |D \setminus S| = |E(G)| - |D| + |S|$. Следовательно,

$$\mathrm{st}(G) \geqslant |M_S| - |S| = |E(G)| - i(H).$$

Лемма 2 доказана.

Пусть G — произвольный кубический (т. е. 3-регулярный) граф без треугольников. Тогда граф $\mathrm{Tri}(G)$, очевидно, треугольный, так как каждое его максимальное независимое множество содержит одну вершину из каждого треугольника $\{u, v, x_{uv}\}$, соответствующего ребру $uv \in E(G)$. Граф $\mathrm{Tri}(G)$ по построению также $(K_4 - e)$-свободный, поэтому $\mathrm{Tri}(G)$ — 1-треугольный граф по теореме 3. Отметим, что $\mathrm{Tri}(G)$ не содержит порождённых подграфов, изоморфных $K_{1,4}$, а каждая вершина этого графа имеет степень 2 или 6.

Введём следующую задачу распознавания.

Независимый разрез. Даны граф G и целое число k. Верно ли, что $\mathrm{st}(G) \geqslant k$?

Покажем, что к этой задаче в классе кубических графов без треугольников сводится следующая классическая задача.

Независимое множество. Даны граф G и целое число k. Верно ли, что $\alpha(G) \geqslant k$?

Теорема 8 [13, теорема 3]. *Задача* Независимое множество NP-*полна в классе кубических графов без треугольников.*

Следствие 9. *Задача* Независимый разрез NP-*полна в классе кубических графов без треугольников.*

Доказательство. Указанная задача, очевидно, принадлежит классу NP. С другой стороны, для кубического графа G верно $\mathrm{st}(G) = 2\alpha(G)$, так как $|M_I| = 3|I|$, $|M_I| - |I| = 2|I|$ для каждого независимого множества I этого графа. Таким образом, NP-полная в классе кубических графов без треугольников задача Независимое множество полиномиально сводится к задаче Независимый разрез в этом же классе графов. Следствие 9 доказано.

Введём следующие задачи распознавания.

Независимое доминирующее множество. Даны граф G и целое число k. Верно ли, что $i(G) \leqslant k$?

Независимое окрестностное множество. Даны граф G и целое число k. Верно ли, что в графе G существует независимое окрестностное множество мощности не более k?

Совершенное окрестностное множество. Даны граф G и целое число k. Верно ли, что в графе G существует совершенное окрестностное множество мощности не более k?

Отметим, что ввиду вышеуказанных соотношений между соответствующими параметрами эти задачи эквивалентны в классе 1-треугольных графов.

Теорема 9. *Задачи* Независимое доминирующее множество, Независимое окрестностное множество *и* Совершенное окрестностное множество NP-*полны в классе* 1-*треугольных графов* (*в частности, в классе* $K_{1,4}$-*свободных* 1-*треугольных графов со степенями вершин не более* 6).

Доказательство. Все задачи, указанные в условии теоремы, очевидно, принадлежат классу NP. Пусть G — кубический граф без треугольников. Тогда $H = \mathrm{Tri}(G)$ является $K_{1,4}$-свободным графом с максимальной степенью 6. Поскольку H — 1-треугольный граф, имеем

$$n_i(H) = n_p(H) = i(H),$$

а $i(H) = |E(G)| - \mathrm{st}(G)$ по лемме 2. Это значит, что NP-полная в классе кубических графов без треугольников задача Независимый разрез полиномиально сводится в классе 1-треугольных графов к каждой из задач, указанных в условии теоремы. Теорема 9 доказана.

Следующие распознавательные задачи также эквивалентны в классе 1-треугольных графов.

Ирридантное множество. Даны граф G и целое число k. Верно ли, что $\mathrm{ir}(G) \leqslant k$?

Доминирующее множество. Даны граф G и целое число k. Верно ли, что $\gamma(G) \leqslant k$?

Окрестностное множество. Даны граф G и целое число k. Верно ли, что $\mathrm{nb}(G) \leqslant k$?

Множество S вершин графа G называется *вершинным покрытием*, если каждое ребро графа G инцидентно по крайней мере одной вершине из множества S. Наименьшая из мощностей вершинных покрытий графа G обозначается через $\beta(G)$. Для каждого графа G справедливо классическое соотношение $\alpha(G) + \beta(G) = |G|$ (см., например, [3]).

Для установления NP-полноты трёх перечисленных задач в классе 1-треугольных графов будем использовать следующее утверждение.

Лемма 3. *Для произвольного графа G без изолированных вершин верно соотношение*

$$\gamma(\mathrm{Tri}(G)) = \beta(G) = |G| - \alpha(G).$$

Доказательство. Пусть D — доминирующее множество графа $H = \mathrm{Tri}(G)$ такое, что $|D| = \gamma(H)$. Тогда $D \cap \{u, v, x_{uv}\} \neq \varnothing$ для каждого ребра uv графа G, так как иначе $x_{uv} \notin N[D]$ в графе H. Построим множество D', заменив в D каждую вершину вида x_{uv} вершиной u. Множество D' также будет доминирующим мощности не больше $|D|$. При этом оно будет вершинным покрытием графа G (если бы D' не содержало концевые вершины некоторого ребра $uv \in E(G)$, это означало бы, что $D \cap \{u, v, x_{uv}\} = \varnothing$). Отсюда $\beta(G) \leqslant \gamma(H)$.

Обратно, поскольку каждое вершинное покрытие графа G без изолированных вершин является доминирующим множеством в графе H, имеем $\beta(G) \geqslant \gamma(H)$.

Таким образом, $\gamma(H) = \beta(G)$, поэтому утверждение леммы следует из соотношения $\alpha(G) + \beta(G) = |G|$. Лемма 3 доказана.

Теорема 10. *Задачи* Ирридантное множество, Доминирующее множество *и* Окрестностное множество NP-*полны в классе* 1-*треугольных*

графов (*в частности, в классе* $K_{1,4}$-*свободных* 1-*треугольных графов со степенями вершин не более* 6).

Доказательство. Все задачи, указанные в условии теоремы, очевидно, принадлежат классу NP. Пусть G — кубический граф без треугольников. Тогда граф $H = \mathrm{Tri}(G)$ является $K_{1,4}$-свободным графом с максимальной степенью 6. Поскольку H — 1-треугольный граф, по лемме 3 имеем

$$\mathrm{ir}(H) = \mathrm{nb}(H) = \gamma(H), \quad \gamma(H) = |G| - \alpha(G).$$

Это значит, что NP-полная в классе кубических графов без треугольников задача Независимое множество [13] полиномиально сводится в классе 1-треугольных графов к каждой из задач, указанных в условии теоремы. Теорема 10 доказана.

Заключение

В настоящей работе введён и охарактеризован класс 1-треугольных графов. Полученная характеризация влечёт простой полиномиальный алгоритм их распознавания. Установлены результаты о вычислительной сложности для параметров ir, γ, nb, i, n_i, n_p в этом классе графов. Тем самым впервые доказана NP-полнота задачи Совершенное окрестностное множество в классе всех графов, а также в классе графов, содержащих совершенные окрестностные множества.

Представляет интерес вопрос о сложности аппроксимации указанных параметров в классе 1-треугольных графов. Отметим, что техника дублирования вершин, использованная с целью установления неаппроксимируемости ряда параметров в классе треугольных графов в [5, 18], не представляется применимой к 1-треугольным графам (по крайней мере, непосредственно), поскольку класс ($K_4 - e$)-свободных графов не замкнут относительно операции дублирования вершин.

Кроме того, по аналогии с классом 1-треугольных графов можно ввести классы k-треугольных графов для $k \geqslant 1$. А именно, граф G назовём *k-треугольным*, если для каждого максимального независимого множества I графа G и каждого ребра $uv \in E(G - I)$ число вершин $w \in I$, одновременно смежных с вершинами u и v (т. е. для которых множество вершин $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе G), лежит в пределах от 1 до k включительно. Задача характеризации таких графов для $k > 1$ является открытой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Берж К.** Теория графов и ее применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 320 с.
2. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
3. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.
4. **Картынник Ю. А., Орлович Ю. Л.** Доминантно-треугольные графы и графы верхних границ // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 16–25.
5. **Орлович Ю. Л., Гордон В. С., Блажевич Я., Зверович И. Э., Финке Г.** Независимые доминирующие и окрестностные множества в треугольных графах // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 1. С. 39–44.
6. **Anbeek C., DeTemple D., McAvaney K. L., Robertson J. M.** When are chordal graphs also partition graphs? // Australas. J. Comb. 1997. Vol. 16. P. 285–293.
7. **Bollobaś B., Cockayne E. J.** Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance // J. Graph Theory. 1979. Vol. 3, No. 3. P. 241–249.
8. **Boros E., Gurvich V., Milanič M.** On equistable, split, CIS, and related classes of graphs // ArXiv e-prints (arXiv:1505.05683). 2015.
9. **Cheston G. A., Hare E. O., Hedetniemi S. T., Laskar R. C.** Simplicial graphs // Congr. Numerantium. 1988. Vol. 67. P. 105–113.
10. **Cheston G. A., Jap T. S.** A survey of the algorithmic properties of simplicial, upper bound and middle graphs // J. Graph Algorithms Appl. 2006. Vol. 10, No. 2. P. 159–190.
11. **DeTemple D., Harary F., Robertson J. M.** Partition graphs // Soochow J. Math. 1987. Vol. 13, No. 2. P. 121–129.
12. **DeTemple D., Robertson J. M.** Graphs associated with triangulations of lattice polygons // J. Austr. Math. Soc., Ser. A. 1989. Vol. 47, No. 3. P. 391–398.
13. **Guruswami V., Rangan C. P., Chang M. S., Chang G. J., Wong C. K.** The vertex-disjoint triangles problem // Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. Proc. 24th Int. Workshop (Smolenice Castle, Slovak Rep., June 18–20, 1998). Heidelberg: Springer, 1998. P. 26–37. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 1517).
14. **Kloks T., Lee C.-M., Liu J., Müller H.** On the recognition of general partition graphs // Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. Proc. 29th Int. Workshop (Elspeet, The Netherlands, June 19–21, 2003), Heidelberg: Springer, 2003. P. 273–283. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 2880).

15. **McAvaney K., Robertson J., DeTemple D.** A characterization and hereditary properties for partition graphs // Discrete Math. 1993. Vol. 113, No. 1. P. 131–142.
16. **Miklavič Š., Milanič M.** Equistable graphs, general partition graphs, triangle graphs, and graph products // Discrete Appl. Math. 2011. Vol. 159, No. 11. P. 1148–1159.
17. **Orlovich Yu. L., Błażewicz J., Dolgui A., Finke G., Gordon V.** On the complexity of the independent set problem in triangle graphs // Discrete Math. 2011. Vol. 311, No. 16. P. 1670–1680.
18. **Orlovich Yu. L., Zverovich I. E.** Independent domination in triangle graphs // Electron. Notes Discrete Math. 2007. Vol. 28. P. 341–348.
19. **Sampathkumar E., Neeralagi P. S.** The neighbourhood number of a graph // Indian J. Pure Appl. Math. 1985. Vol. 16. P. 126–132.
20. **Sampathkumar E., Neeralagi P. S.** Independent, perfect and connected neighbourhood numbers of a graph // J. Comb. Inf. Syst. Sci. 1994. Vol. 19, No. 3–4. P. 139–145.

Иржавский Павел Александрович,
Картынник Юрий Анатольевич,
Орлович Юрий Леонидович

Статья поступила
16 марта 2016 г.

Исправленный вариант —
27 июня 2016 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2017. Volume 24, No. 1. P. 56–80

UDC 519.17 DOI: 10.17377/daio.2017.24.532

1-TRIANGLE GRAPHS AND PERFECT NEIGHBORHOOD SETS

P. A. Irzhavskii[a], *Yu. A. Kartynnik*[b], *Yu. L. Orlovich*[c]
Belarusian State University,
4 Nezavisimosti Ave., 220030 Minsk, Belarus
E-mail: [a]irzhavski@bsu.by, [b]kartynnik@bsu.by, [c]orlovich@bsu.by

Abstract. A graph is called a 1-*triangle* if, for its every maximal independent set I, every edge of this graph with both endvertices not belonging to I is contained exactly in one triangle with a vertex of I. We obtain a characterization of 1-triangle graphs which implies a polynomial time recognition algorithm. Computational complexity is established within the class of 1-triangle graphs for a range of graph-theoretical parameters related to independence and domination. In particular, NP-completeness is established for the minimum perfect neighborhood set problem in the class of all graphs. Bibliogr. 20.

Keywords: triangle graph, edge-simplicial graph, characterization, perfect neighborhood set, NP-completeness.

REFERENCES

1. **C. Bergé,** *Théorie des graphes et ses applications,* Dunod, Paris, 1958 [French]. Translated under the title *Teoriya grafov i eyo primeneniya,* Izd. Inostr. Lit., Moscow, 1962 [Russian].
2. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness,* Freeman, San Francisco, 1979 [Russian]. Translated under the title *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi,* Mir, Moscow, 1982.
3. **V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. I. Sarvanov,** and **R. I. Tyshkevich,** *Lektsii po teorii grafov,* Nauka, Moscow, 1990 [Russian]. Translated under the title *Lectures on Graph Theory,* B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994.
4. **Yu. A. Kartynnik** and **Yu. L. Orlovich,** Domination triangle graphs and upper bound graphs, *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi,* **58**, No. 1, 16–25, 2014 [Russian].
5. **Yu. L. Orlovich, V. S. Gordon, J. Błażewicz, I. E. Zverovich,** and **G. Finke,** Independent dominating and neighborhood sets in triangular graphs, *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi,* **53**, No. 1, 39–44, 2009 [Russian].

6. **C. Anbeek, D. DeTemple, K. McAvaney,** and **J. M. Robertson,** When are chordal graphs also partition graphs?, *Australas. J. Comb.,* **16**, 285–293, 1997.
7. **B. Bollobás** and **E. J. Cockayne,** Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance, *J. Graph Theory,* **3**, No. 3, 241–249, 1979.
8. **E. Boros, V. Gurvich,** and **M. Milanič,** On equistable, split, CIS, and related classes of graphs, 2015 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1505.05683).
9. **G. A. Cheston, E. O. Hare, S. T. Hedetniemi** and **R. C. Laskar,** Simplicial graphs, *Congr. Numerantium,* **67**, 105–113, 1988.
10. **G. A. Cheston** and **T. S. Jap,** A survey of the algorithmic properties of simplicial, upper bound and middle graphs, *J. Graph Algorithms Appl.,* **10**, No. 2, 159–190, 2006.
11. **D. DeTemple, F. Harary,** and **J. M. Robertson,** Partition graphs, *Soochow J. Math.,* **13**, No. 2, 121–129, 1987.
12. **D. DeTemple** and **J. M. Robertson,** Graphs associated with triangulations of lattice polygons, *J. Aust. Math. Soc., Ser. A,* **47**, No. 3, 391–398, 1989.
13. **V. Guruswami, C. P. Rangan, M. S. Chang, G. J. Chang,** and **C. K. Wong,** The vertex-disjoint triangles problem, in *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science* (Proc. 24th Int. Workshop, Smolenice Castle, Slovak Republic, June 18–20, 1998), pp. 26–37, Springer, Heidelberg, 1998 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 1517).
14. **T. Kloks, C.-M. Lee, J. Liu,** and **H. Müller,** On the recognition of general partition graphs, in *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science* (Proc. 29th Int. Workshop, Elspeet, The Netherlands, June 19–21, 2003), pp. 273–283, Springer, Heidelberg, 2003 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 2880).
15. **K. McAvaney, J. M. Robertson,** and **D. DeTemple,** A characterization and hereditary properties for partition graphs, *Discrete Math.,* **113**, 131–142, 1993.
16. **Š. Miklavič** and **M. Milanič,** Equistable graphs, general partition graphs, triangle graphs, and graph products, *Discrete Appl. Math.,* **159**, No. 11, 1148–1159, 2011.
17. **Yu. L. Orlovich, J. Błażewicz, A. Dolgui, G. Finke,** and **V. S. Gordon,** On the complexity of the independent set problem in triangle graphs, *Discrete Math.,* **311**, No. 16, 1670–1680, 2011.
18. **Yu. L. Orlovich** and **I. E. Zverovich,** Independent domination in triangle graphs, *Electron. Notes Discrete Math.,* **28**, 341–348, 2007.
19. **E. Sampathkumar** and **P. S. Neeralagi,** The neighbourhood number of a graph, *Indian J. Pure Appl. Math.,* **16**, 126–132, 1985.

20. **E. Sampathkumar** and **P. S. Neeralagi,** Independent, perfect and connected neighbourhood numbers of a graph, *J. Comb. Inf. Syst. Sci.,* **19**, No. 3–4, 139–145, 1994.

Pavel A. Irzhavskii,
Yury A. Kartynnik,
Yury L. Orlovich

Received
16 March 2016

Revised
27 June 2016