ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2017. Том 24, № 1. С. 21–30

УДК 519.8 DOI: 10.17377/daio.2017.24.542

О ПРЕДПИСАННОЙ (k, l)-РАСКРАСКЕ ИНЦИДЕНТОРОВ *)

Е. И. Васильева[2,a], *А. В. Пяткин*[1,2,b]

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
[2]Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: [a]ekaterinavasilyeva93@gmail.com, [b]artem@math.nsc.ru

Аннотация. Правильная раскраска инциденторов называется (k, l)-*раскраской*, если разность цветов конечного и начального инциденторов лежит между k и l. В предписанном варианте также требуется, чтобы цвет каждого инцидентора лежал в множестве допустимых цветов для данной дуги. Для того чтобы такая постановка имела смысл, считаем, что множество допустимых цветов каждой дуги представляет собой целочисленный интервал. Минимальная длина интервала, при которой предписанная (k, l)-раскраска инциденторов данного мультиграфа всегда существует, называется *предписанным* (k, l)-*хроматическим числом*. В статье доказываются оценки для предписанного (k, l)-хроматического числа мультиграфов степени 2 и 4. Библиогр. 13.

Ключевые слова: предписанная раскраска, инцидентор, (k, l)-раскраска.

Введение

Под *интервалом* будем понимать подмножество подряд идущих натуральных чисел. *Длина интервала* $[a, b]$ для целых $a \leqslant b$ равна $b - a + 1$. *Инцидентором* в ориентированном графе $G = (V, E)$ называется пара (u, e), состоящая из вершины u и инцидентной ей дуги e; удобно трактовать инцидентор как половину дуги e, примыкающую к вершине u. Таким образом, дуга $e = uv$ содержит два инцидентора (u, e) и (v, e), которые называются *начальным* и *конечным* соответственно. Будем говорить, что такие инциденторы *сопряжены* друг другу. Для инцидентора i через i' будем обозначать сопряжённый ему инцидентор. Два различных инцидентора, примыкающих к одной и той же вершине, называются

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 16–11–10041).

смежными. Раскраской некоторого множества инциденторов называется его отображение в множество цветов (целых положительных чисел). Часто удобно задавать раскраску инцидентов как раскраску дуги парой цветов: будем писать $f(e) = (a, b)$, если начальный инцидентор дуги e раскрашен цветом a, а конечный — цветом b. Раскраска инцидентов называется *правильной*, если все смежные инциденторы окрашены в разные цвета. Раскраска инцидентов является (k, l)-*раскраской*, если она правильна и разность цветов любых двух сопряжённых инцидентов лежит в интервале $[k, l]$. Минимальное число цветов, необходимое для (k, l)-раскраски инцидентов заданного графа, называется его *инцидентоторным* (k, l)-*хроматическим числом.*

Если для каждой дуги задано некоторое множество допустимых цветов и требуется, чтобы каждый инцидентор был окрашен допустимым цветом, то такая раскраска называется *предписанной.* Обычно под предписанным хроматическим числом понимается минимальная мощность множества допустимых цветов каждой дуги, гарантирующая существование раскраски. Однако в случае (k, l)-раскраски инцидентов (при $k > 0$) такая постановка бессмысленна, поскольку даже бесконечное множество допустимых цветов $\{1, l + 2, 2l + 3, \ldots\}$ не позволяет построить предписанную (k, l)-раскраску. Поэтому возникает необходимость дополнительного ограничения на множества допустимых цветов, исключающего такую ситуацию. Естественным ограничением такого рода видится требование, чтобы для каждой дуги допустимые цвета шли подряд, т. е. образовывали целочисленный интервал. Таким образом, далее под *предписанным инцидентоторным* (k, l)-*хроматическим числом* понимается такое минимальное t, что для любого назначения интервалов допустимых цветов длины не менее t для каждой дуги существует (k, l)-раскраска инцидентов в допустимые цвета. Будем обозначать это число через $\chi^{\text{list}}_{k,l}(G)$.

Задача раскраски инцидентов впервые сформулирована в [7] как удобная модель для задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи. В [5] предложена концепция (k, l)-раскраски, которая далее изучалась в [2–4, 8–11]. Предписанная k-раскраска (т. е. правильная раскраска в предписанные цвета, в которой разность цветов конечного и начального инцидентов не меньше k) впервые рассмотрена В. Г. Визингом в [1], где доказано, что для графа степени Δ достаточно $\Delta + k$ цветов, если Δ чётно, и $\Delta + k + 1$, если Δ нечётно. Там же высказана гипотеза, что для любого графа достаточно $\Delta + k$ цветов. Для случая $\Delta = 3$ эта гипотеза доказана в [12]. Задача о предписанной (k, l)-раскраске ранее не рассматривалась. Наиболее полный обзор результатов по раскраскам инциденторов можно найти в [6].

В работе доказываются оценки для предписанного (k, l)-хроматического числа мультиграфов степени 2 и 4.

1. Предварительные результаты

Сначала докажем ряд общих оценок для $\chi_{k,l}^{\text{list}}(G)$.

Теорема 1. *Для любого мультиграфа степени* Δ *выполняется соотношение* $\chi_{k,k}^{\text{list}}(G) \leqslant k + 2\Delta - 1$.

Доказательство. Заметим, что если для дуги e задан интервал допустимых цветов $[a, a + k + 2\Delta - 2]$, то её инциденторы можно раскрасить $2\Delta - 1$ способами вида $f(e) = (a + i, a + i + k)$, где $i = 0, \dots, 2\Delta - 2$. При этом к каждому из концов дуги примыкает не более чем по $\Delta - 1$ инциденторов. Поэтому хотя бы один из $2\Delta - 1$ способов раскраски инциденторов дуги не будет нарушать правильности. Поскольку данное утверждение верно для любой дуги, искомая раскраска легко строится «жадным» алгоритмом. Теорема 1 доказана.

В случае $\Delta = 2$ эта оценка может быть улучшена при $l > 0$. Отметим, что $(0, 0)$-раскраска инциденторов совпадает с рёберной раскраской и для неё оценка из теоремы 2 очевидно не выполняется.

Теорема 2. *Для любого* $l > 0$ *и* $k \leqslant l$ *предписанное* (k, l)*-хроматическое число мультиграфа степени* 2 *равно* $k + 2$.

Доказательство. Пусть G — мультиграф степени 2. Можно считать, что он однородный. Сначала рассмотрим случай $k > 0$. Тогда можно считать, что $l = k$. Для каждой дуги задано множество допустимых цветов, которое имеет вид $[a, a + k + 1]$ для некоторого a. Как и в теореме 1, есть два способа раскрасить инциденторы такой дуги e: либо $f(e) = (a, a + k)$, либо $f(e) = (a + 1, a + k + 1)$. Назовём *существенными* цвета a и $a + 1$ для начального инцидентора дуги e и цвета $a + k$ и $a + k + 1$ для конечного инцидентора дуги e. Ясно, что выбор цвета для одного инцидентора дуги однозначно определяет цвет другого инцидентора.

Рассмотрим компоненту связности (цикл) графа G. Если найдётся вершина, у которой множества существенных цветов примыкающих инциденторов различаются, то будем считать такую вершину первой вершиной цикла, а инцидентную вершине дугу — первой дугой цикла. Окрашиваем инцидентор первой дуги, примыкающий к первой вершине, так, чтобы оба существенных цвета смежного с ней инцидентора последней дуги оставались свободны. После этого раскрашиваем другой инцидентор первой дуги и, двигаясь по циклу, раскрашиваем последовательно инциденторы в существенные цвета. Первый встретившийся инцидентор каждой дуги смежен только с одним окрашенным инцидентором, поэтому его можно раскрасить в существенный цвет, после чего докрасить сопряжённый инцидентор. Так как оба существенных цвета последнего инцидентора свободны, можно раскрасить последний инцидентор, получив в результате правильную (k, k)-раскраску инциденторов.

Допустим, что при каждой вершине v существенные цвета обоих примыкающих к ней инциденторов совпадают. Обозначим через $a(v)$ меньший из существенных цветов инциденторов, примыкающих к вершине v. Покажем, что цикл имеет чётную длину. Выберем произвольное направление обхода цикла $v_1, \ldots, v_n$. Нетрудно заметить, что если i-я дуга имеет вид $v_i v_{i+1}$ (т. е. сонаправлена с обходом), то $a(v_{i+1}) = a(v_i) + k$, а если она имеет вид $v_{i+1} v_i$, то $a(v_{i+1}) = a(v_i) - k$. Поскольку $a(v_{n+1}) = a(v_1)$ и $k \geqslant 1$, число дуг цикла, сонаправленных с обходом, совпадает с числом противоположно направленных дуг, т. е. цикл чётный. Двигаясь по циклу, раскрасим попеременно инциденторы дуг в меньшие и бóльшие существенные цвета и получим правильную (k, k)-раскраску инциденторов.

Осталось показать, что $\chi_{0,1}^{\text{list}}(G) = 2$. Воспользуемся упомянутой выше теоремой Визинга [1], согласно которой для любого предписания мощности 2 существует предписанная 0-раскраска графа G. Поскольку в рассматриваемом случае множество допустимых цветов каждой дуги есть $\{a, a+1\}$ для некоторого a, предписанная 0-раскраска автоматически является $(0, 1)$-раскраской. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Нетрудно убедиться, что теорема 2 останется верной, если условие, что список допустимых цветов является интервалом, заменить требованием, чтобы у каждой дуги было два способа раскраски (условие использовалось лишь для обоснования выполнения данного требования). При этом существенными для каждого инцидентора будут цвета, используемые для таких способов раскраски.

Заметим, что с помощью теоремы Визинга [1] можно доказать и общую оценку на предписанное (k, l)-хроматическое число.

Теорема 3. *Для любого мультиграфа чётной степени Δ выполняется соотношение $\chi_{k,k+\Delta-1}^{\text{list}}(G) \leqslant k + \Delta$.*

Доказательство. По теореме Визинга [1] $\chi_k^{\text{list}}(G) \leqslant k + \Delta$. Так как модуль разности любых двух цветов интервала $[a, a + k + \Delta - 1]$ не превосходит $k+\Delta-1$, при таком назначении любая k-раскраска является $(k, k+\Delta-1)$-раскраской, откуда следует требуемое соотношение. Теорема 3 доказана.

Заметим, что для графов нечётной степени Δ из теоремы 3 вытекает оценка
$$\chi^{\rm list}_{k,k+\Delta}(G) \leqslant k+\Delta+1.$$

Теоремы 1 и 3 можно обобщить в следующую гипотезу.

Гипотеза 1. *Для любого мультиграфа степени Δ выполняется соотношение $\chi^{\rm list}_{k,l}(G) \leqslant 2k+2\Delta-l-1$.*

В разд. 2 эта гипотеза доказана для мультиграфов степени 4.

2. Случай мультиграфов степени 4

Из теорем 1 и 3 следует, что для любого мультиграфа G степени 4 имеем $\chi^{\rm list}_{k,k}(G) \leqslant k+7$ и $\chi^{\rm list}_{k,k+3}(G) \leqslant k+4$. Для доказательства гипотезы 1 достаточно показать, что $\chi^{\rm list}_{k,k+2}(G) \leqslant k+5$ и $\chi^{\rm list}_{k,k+1}(G) \leqslant k+6$. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

Можно считать, что G — однородный мультиграф степени 4. Сначала введём некоторые обозначения. По теореме Петерсена любой однородный мультиграф степени 4 можно разбить на два 2-фактора. Обозначим эти 2-факторы мультиграфа G через F_1 и F_2. Все инциденторы каждого из 2-факторов разобьём на чётные и нечётные так, чтобы каждая дуга содержала по одному чётному и нечётному инцидентору и к каждой вершине примыкало по одному чётному и нечётному инцидентору каждого 2-фактора. Пусть v — произвольная вершина G. К ней примыкают четыре инцидентора. Обозначим их через $i_1(v), i_2(v), i_3(v), i_4(v)$ так, чтобы $i_1(v), i_2(v) \in F_1,\ i_3(v), i_4(v) \in F_2$, причём $i_1(v), i_3(v)$ нечётные, а $i_2(v), i_4(v)$ чётные. Нетрудно видеть, что если инцидентор $i=(u,e)$ дуги $e=uv$ нечётный, то $i=i_1(u),\ i'=(v,e)=i_2(v)$, если $uv \in F_1$, и $i=i_3(u),\ i'=i_4(v)$, если $uv \in F_2$.

Теорема 4. *Для любого мультиграфа G степени 4 выполняется соотношение $\chi^{\rm list}_{k,k+2}(G) \leqslant k+5$.*

Доказательство. Пусть для дуги e задан интервал допустимых цветов $[a, a+k+4]$. Назовём *существенными* цвета $a,\ a+1$ и $a+2$ для начального инцидентора дуги e и цвета $a+k+2,\ a+k+3$ и $a+k+4$ для конечного инцидентора дуги e. Заметим, что если инцидентор i раскрашен в существенный цвет, то для сопряжённого ему инцидентора i' есть три допустимых варианта раскраски (удовлетворяющих условию на разность цветов). Кроме того, цвета $a+2$ и $a+k+2$ будем называть *средними* для начального и конечного инциденторов дуги e соответственно. Для инцидентора i обозначим через $s(i)$ его средний цвет, а через $M(i)$ — множество его существенных цветов. Для каждой вершины v положим $M'(i_1(v)) = M(i_1(v)) \setminus \{s(i_4(v))\}$. Ясно, что $M'(i_1(v))$ содержит хотя бы два цвета. Назовём один из них *основным*, а второй — *запасным*. Раскраска инциденторов осуществляется в четыре шага.

Шаг 1. Все нечётные инциденторы 2-фактора F_1 красим в основной цвет.

Шаг 2. Рассмотрим дугу $e = uv \in F_2$ с интервалом допустимых цветов $[c, c+k+4]$, и пусть i — её нечётный инцидентор. Без ограничения общности i начальный, т. е. $i = i_3(u)$. Обозначим через a и b цвета инциденторов $i_1(u)$ и $i_1(v)$ соответственно. Тогда по определению $M'(i_1(v))$ имеем $b \neq c+k+2$. Рассмотрим два случая.

(i) Если $b \notin \{c+k, c+k+1\}$, то красим i в цвет c. При этом если $a = c$, то перекрашиваем инцидентор $i_1(u)$ в запасной цвет.

(ii) Если $b \notin \{c+k+3, c+k+4\}$, то красим i в цвет $c+2$. При этом если $a = c+2$, то перекрашиваем инцидентор $i_1(u)$ в запасной цвет.

Шаг 3. Все чётные инциденторы 2-фактора F_1 красим в допустимые цвета. Для каждого инцидентора $i_2(v)$ такой цвет найдётся, поскольку сопряжённый ему инцидентор раскрашен в существенный цвет, а к вершине v примыкают только два раскрашенных инцидентора.

Шаг 4. Покажем, что после шагов 1–3 для каждого неокрашенного инцидентора $i = i_4(u)$ найдётся допустимый цвет. Действительно, на шаге 1 инцидентор $i_1(u)$ раскрашен в цвет $b \neq s(i)$. На шаге 2 инцидентор i' красится так, что для инцидентора i найдётся три допустимых цвета, ни один из которых не совпадает с b. Кроме того, на шаге 2 красится инцидентор $i_3(u)$; при этом либо цвет инцидентора $i_1(u)$ не изменяется, либо он сменяется запасным, но тогда $i_3(u)$ красится в цвет b. В любом случае после шага 2 для инцидентора $i_4(u)$ остаётся как минимум два допустимых цвета. Ясно, что после шага 3 не более одного из них будет занято для раскраски инцидентора $i_2(u)$. Таким образом, можно раскрасить все чётные инциденторы 2-фактора F_2 в допустимые цвета. Теорема 4 доказана.

Для получения второй оценки $\chi^{\text{list}}_{k,k+1}(G) \leqslant k+6$ докажем более сильное утверждение, из которого она следует.

Теорема 5. *Для любого мультиграфа G степени 4 выполняется соотношение $\chi^{\text{list}}_{k,k}(G) \leqslant k+6$.*

Доказательство. Пусть для дуги e задан интервал допустимых цветов $[a, a+k+5]$. Тогда для (k,k)-раскраски её инциденторов можно использовать один из шести вариантов вида $(a+j, a+k+j)$, $j = 0, 1, \ldots, 5$.

Сначала рассмотрим случай $k = 0$. Поскольку $(0,0)$-раскраска инциденторов совпадает с рёберной раскраской, из предписанной версии теоремы Шеннона [13] следует, что для существования предписанной раскраски мультиграфа степени Δ достаточно предписания мощности $\lfloor 3\Delta/2 \rfloor$. Так как степень мультиграфа G равна 4 и каждой дуге предписано 6 цветов, искомая $(0,0)$-раскраска инциденторов в предписанные цвета существует.

Пусть $k > 0$. Как сказано выше, мультиграф G можно разбить на два 2-фактора F_1 и F_2. Построим (k,k)-раскраску инциденторов фактора F_1 в предписанные цвета. В каждой вершине мультиграфа будет использовано 2 цвета. Значит, из шести возможных вариантов раскраски инциденторов каждой дуги 2-фактора F_2 по меньшей мере два останутся допустимыми. Цвета, входящие в такие варианты, будем называть существенными. Из замечания после теоремы 2 вытекает возможность (k,k)-раскраски инциденторов 2-фактора F_2 в допустимые цвета. Теорема 5 доказана.

Замечание 2. Рассуждения из теоремы 5 можно обобщить на случай произвольного чётного Δ. Тем самым оценку в теореме 1 для чётных Δ можно усилить до $\chi^{\text{list}}_{k,k}(G) \leqslant k + 2\Delta - 2$.

Отметим, что авторам не известно ни одного примера мультиграфа G с $\chi^{\text{list}}_{k,l}(G) > \chi_{k,l}(G)$.

Авторы благодарны рецензенту за улучшение доказательства теоремы 2 и усиление теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Раскраска инциденторов мультиграфа в предписанные цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 1. С. 32–39.
2. **Визинг В. Г.** Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа в задачах раскраски инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 27–41.
3. **Визинг В. Г.** Жёсткая раскраска инциденторов в неориентированных мультиграфах // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, № 3. С. 48–53.
4. **Визинг В. Г.** О (p,q)-раскраске инциденторов неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, № 4. С. 23–39.

5. **Визинг В. Г., Мельников Л. С., Пяткин А. В.** О (k, l)-раскраске инцидентов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 29–37.
6. **Визинг В. Г., Пяткин А. В.** Раскраска инцидентов мультиграфа // Topics in graph theory (R. I. Tyshkevich, ed.). 2013. С. 197–209.
7. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.
8. **Пяткин А. В.** (k, l)-Раскраска инцидентов кубических мультиграфов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 49–53.
9. **Пяткин А. В.** Некоторые верхние оценки для инцидентного (k, l)-хроматического числа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 2. С. 66–78.
10. **Пяткин А. В.** Верхние и нижние оценки для инцидентного (k, l)-хроматического числа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, № 1. С. 93–102.
11. **Пяткин А. В.** Об $(1, 1)$-раскраске инцидентов мультиграфов степени 4 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, № 3. С. 59–62.
12. **Пяткин А. В.** О предписанной раскраске инцидентов в мультиграфе степени 3 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2007. Т. 14, № 3. С. 80–89.
13. **Borodin O. V., Kostochka A. V., Woodall D. R.** List edge and list total colorings of multigraphs // J. Comb. Theory, Ser. B. 1997. V. 71, No. 2. P. 184–204.

Васильева Екатерина Ильинична,
Пяткин Артём Валерьевич

Статья поступила
24 мая 2016 г.

Исправленный вариант —
6 июня 2016 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2017. Volume 24, No. 1. P. 21–30

UDC 519.8 DOI: 10.17377/daio.2017.24.542

ON LIST INCIDENTOR (k, l)-COLORINGS

E. I. Vasilyeva[2,a], *A. V. Pyatkin*[1,2,b]
[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
[2]Novosibirsk State University,
2 Pirogov St., 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: [a]ekaterinavasilyeva93@gmail.com, [b]artem@math.nsc.ru

Abstract. A proper incidentor coloring is called *a (k, l)-coloring* if the difference between the colors of the final and initial incidentors ranges between k and l. In the list variant, the extra restriction is added: The color of each incidentor must belong to the set of admissible colors of the arc. In order to make this restriction reasonable we assume that the set of admissible colors for each arc is an integer interval. The minimum length of the interval that guarantees the existence of a list incidentor (k, l)-coloring is called a *list incidentor (k, l)-chromatic number*. Some bounds for the list incidentor (k, l)-chromatic number are proved for multigraphs of degree 2 and 4. Bibliogr. 13.

Keywords: list coloring, incidentor, (k, l)-coloring.

REFERENCES

1. V. G. Vizing, Incidentor coloring of multigraphs in prescribed colors, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **7**, No. 1, 32–39, 2000 [Russian].

2. V. G. Vizing, A bipartite interpretation of a directed multigraph in problems of the coloring of incidentors, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **9**, No. 1, 27–41, 2002 [Russian].

3. V. G. Vizing, Strict coloring of incidentors in undirected multigraphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **12**, No. 3, 48–53, 2005 [Russian].

4. V. G. Vizing, On the (p, q)-coloring of incidentors of an undirected multigraph, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **12**, No. 4, 23–39, 2005 [Russian].

5. V. G. Vizing, L. S. Mel'nikov, and **A. V. Pyatkin,** On the (k, l)-coloring of incidentors, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **7**, No. 4, 29–37, 2000 [Russian].

6. V. G. Vizing and **A. V. Pyatkin,** Incidentor coloring of multigraphs, in R. I. Tyshkevich, ed., *Topics in Graph Theory*, pp. 197–209, Urbana, USA, 2013 [Russian]. Available at http://www.math.uiuc.edu/~kostochk/. Accessed Mar. 3, 2015.

7. **A. V. Pyatkin,** Some problems for optimizing the routing of messages in a local communication network, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **2**, No. 4, 74–79, 1995 [Russian]. Translated in A. D. Korshunov, ed., *Operations Research and Discrete Analysis,* pp. 227–232, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997 (Math. Appl., Vol. 391).

8. **A. V. Pyatkin,** (k, l)-Coloring of incidentors of cubic multigraphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **9**, No. 1, 49–53, 2002 [Russian].

9. **A. V. Pyatkin,** Some upper bounds for the incidentor (k, l)-chromatic number, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **10**, No. 2, 66–78, 2003 [Russian].

10. **A. V. Pyatkin,** Upper and lower bounds for the incidentor (k, l)-chromatic number, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **11**, No. 1, 93–102, 2004 [Russian].

11. **A. V. Pyatkin,** On $(1, 1)$-coloring of incidentors of multigraphs of degree 4, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **11**, No. 3, 59–62, 2004 [Russian].

12. **A. V. Pyatkin,** On list incidentor coloring of a multigraph of degree 3, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **14**, No. 3, 80–89, 2007 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **2**, No. 4, 560-565, 2008.

13. **O. V. Borodin, A. V. Kostochka,** and **D. R. Woodall,** List edge and list total colorings of multigraphs, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **71**, No. 2, 184–204, 1997.

Ekaterina I. Vasilyeva,
Artem V. Pyatkin

Received
24 May 2016

Revised
6 June 2016