ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2017. Том 24, № 2. С. 68–86

УДК 519.1+519.175 DOI: 10.17377/daio.2017.24.534

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЧИСЛА n-ВЕРШИННЫХ ГРАФОВ ЗАДАННОГО ДИАМЕТРА *)

Т. И. Федоряева[1,2]

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
[2]Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: tatiana.fedoryaeva@gmail.com

Аннотация. Доказано, что при фиксированном $k \geqslant 3$ асимптотически равномощны следующие классы помеченных n-вершинных графов: графы диаметра k, связные графы диаметра не менее k и графы (не обязательно связные), имеющие кратчайшую цепь длины не менее k. Получено асимптотически точное приближение числа таких n-вершинных графов, и найдена явная оценка погрешности при этом приближении. Тем самым улучшены оценки для асимптотического приближения числа n-вершинных графов фиксированного диаметра k, которое ранее получили Фюреди и Ким. Установлено, что почти все графы диаметра k имеют единственную пару диаметральных вершин, но почти все графы диаметра 2 имеют более одной пары таких вершин. Ил. 3, библиогр. 9.

Ключевые слова: граф, помеченный граф, кратчайшая цепь, диаметр графа, число графов, типичный граф.

Введение

В работе изучаются конечные помеченные обыкновенные графы. *Расстояние* $\rho_G(u,v)$ между вершинами $u, v \in V$ в связном графе $G = (V, E)$ определяется как длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины, при этом $d(G) = \max\limits_{u,v \in V} \rho_G(u,v)$ есть *диаметр* графа G. Распространим понятие метрики для несвязных графов. Полагаем $\rho_G(x,y) = \infty$, если в графе G не существует цепи, соединяющей вершины $x, y \in V$ (при этом считаем, что $\infty + \infty = \infty$, $n + \infty = \infty$ и $\infty > n$ для любого $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$). Очевидно, что диаметр $d(G)$ несвязного графа G равен ∞.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17–01–00949) и программы РАН (проект 0314–2015–0011).

Пусть $n, k \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{J}_{n,d=k}$, $\mathcal{J}_{n,d\geqslant k}$, $\mathcal{J}^*_{n,d\geqslant k}$, $\mathcal{J}^{**}_{n,d\geqslant k}$ — следующие классы помеченных n-вершинных графов соответственно: графы диаметра k; связные графы диаметра не менее k; графы (не обязательно связные), имеющие кратчайшую цепь длины не менее k; графы (не обязательно связные) диаметра не менее k. Обозначим через $g_{n,d=k}$, $g_{n,d\geqslant k}$, $g^*_{n,d\geqslant k}$, $g^{**}_{n,d\geqslant k}$ число графов соответствующих классов. Очевидно, что выполняются следующие включения:

$$\mathcal{J}_{n,d=k} \subseteq \mathcal{J}_{n,d\geqslant k} \subseteq \mathcal{J}^*_{n,d\geqslant k} \subseteq \mathcal{J}^{**}_{n,d\geqslant k}$$

и при расширении класса графов асимптотический порядок числа полученных графов может измениться. Известно, что почти все графы являются графами диаметра 2. Следовательно, число n-вершинных помеченных графов диаметра 2 асимптотически равно числу $2^{\binom{n}{2}}$ всех n-вершинных графов. Впервые этот результат был, по-видимому, получен в [7]. Тем самым при $k = 2$ все четыре класса графов $\mathcal{J}_{n,d=2}$, $\mathcal{J}_{n,d\geqslant 2}$, $\mathcal{J}^*_{n,d\geqslant 2}$, $\mathcal{J}^{**}_{n,d\geqslant 2}$ асимптотически равномощны. При $k \geqslant 3$ для числа графов диаметра k в [8] найдена асимптотическая формула

$$g_{n,d=k} = 2^{\binom{n}{2}}(6 \cdot 2^{-k} + o(1))^n \quad \text{при } n \to \infty.$$

Такая же формула установлена в [9] для числа $g_{n,d\geqslant k}$ связных графов, имеющих диаметр не менее k. В основе доказательства этой формулы лежит алгебраический подход, связанный с оценкой алгебраических выражений с k переменными и использующий значительный комбинаторный анализ для большого разнообразия рассматриваемых случаев. Однако указанная формула не даёт асимптотически точного значения числа графов рассмотренных в [8,9] классов $\mathcal{J}_{n,d=k}$, $\mathcal{J}_{n,d\geqslant k}$ и порядка погрешности для такого приближения (функция $f(n)$ *асимптотически равна* функции $g(n)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, или, эквивалентно, $f(n) = g(n)(1+r(n))$ для всех достаточно больших n, где *погрешность приближения* $r(n) = o(1)$ при $n \to \infty$).

В настоящей работе доказано, что при $k \geqslant 3$ число графов класса $\mathcal{J}^*_{n,d\geqslant k}$ асимптотически равно $2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}$, где

$$\xi_{n,k} = q_k (n)_{k-1} \left(\frac{3}{2^{k-1}}\right)^{n-k+1},$$

$$q_k = \frac{1}{2}(k-2)\, 2^{-\binom{k-1}{2}}, \quad (n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

Здесь $(n)_k$ равно числу упорядоченных размещений из n элементов по k, и, как обычно, полагаем $(n)_k = 0$ при $n < k$ и $(n)_0 = (0)_0 = 1$ [4]. Как следствие, из доказательства вытекает, что при $k \geqslant 3$ все три класса графов $\mathcal{J}_{n,d=k}$, $\mathcal{J}_{n,d\geqslant k}$, $\mathcal{J}^*_{n,d\geqslant k}$ асимптотически равномощны и асимптотика чисел $g_{n,d=k}$, $g_{n,d\geqslant k}$, $g^*_{n,d\geqslant k}$ есть $2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}$ (следствие 1). Заметим, что при расширении класса связных графов $\mathcal{J}_{n,d\geqslant k}$ до класса $\mathcal{J}^{**}_{n,d\geqslant k}$ (путём добавления всех несвязных графов) число $g^{**}_{n,d\geqslant k}$ полученных графов при $k = 3$ также будет асимптотически равно $2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}$ [2]. Однако для любого $k \geqslant 4$ происходит «скачок» порядка асимптотики: асимптотический порядок числа графов в каждом из классов $\mathcal{J}_{n,d=k}$, $\mathcal{J}_{n,d\geqslant k}$, $\mathcal{J}^*_{n,d\geqslant k}$ строго меньше порядка асимптотики числа графов класса $\mathcal{J}^{**}_{n,d\geqslant k}$ (такой эффект «скачка» между классами $\mathcal{J}_{n,d=k}$ и $\mathcal{J}^{**}_{n,d\geqslant k}$ также вытекает из [9]), при этом $g^{**}_{n,d\geqslant k}$ будет асимптотически равно числу всех помеченных n-вершинных несвязных графов.

Полученные верхние и нижние оценки чисел $g_{n,d=k}$, $g_{n,d\geqslant k}$, $g^*_{n,d\geqslant k}$ справедливы для любых $n \in \mathbb{N}$ и $k \geqslant 3$, при таком асимптотическом приближении для погрешности приближения верна оценка $|r(n)| \leqslant c_k\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^n$, где $0 < \varepsilon < 1$ — произвольная наперёд выбранная ошибка и $c_k > 0$ — константа, не зависящая от n и указанная явно (теорема 3). Из этого результата также вытекает, что при $k \geqslant 3$ почти все графы диаметра k имеют единственную пару диаметральных вершин (следствие 3). В случае графов диаметра 2 это не так. Более того, такой n-вершинный граф единственный с точностью до изоморфизма, а именно $\overline{K}_2 + K_{n-2}$ (утверждение 2), поэтому почти все графы диаметра 2 имеют более одной пары диаметральных вершин (следствие 5).

После того, как настоящая статья была сдана в печать, автору стала известна работа [5], в связи с чем автор выражает признательность рецензенту за предоставленную информацию. Развивая алгебраический подход из [8] для оценки числа связных графов фиксированного диаметра, в [5, 6] при $k \geqslant 3$ найдена асимптотика числа $g_{n,d=k}$ графов диаметра k. Для верхних и нижних оценок числа $g_{n,d=k}$ оценка погрешности при асимптотическом приближении из [5, 6] имеет вид

$$-c\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} \leqslant r(n) = O\left(k^2(n-k-1)^4\left(\frac{11}{12}\right)^{n-k-1}\right),$$

где $c > 0$ — некоторая константа, не зависящая от $n-k-1$. Оценка справедлива при $n \to \infty$ для n и k таких, что $3 \leqslant k < n - c_1 \log n$, где $c_1 > 0$ — некоторая константа, не зависящая от n (т. е. для достаточно больших n). Заметим, что при $\varepsilon \in \left(0, \frac{2}{5}\right)$ найденное в теореме 3 асимпто-

тическое приближение числа $g_{n,d=k}$ оказывается точнее, чем в [5]. При этом сверху оценивается более широкий класс $\mathcal{J}^*_{n,d\geqslant k}$ (разд. 2), а снизу — более узкий класс $\mathcal{T}_{n,d=k}$ (разд. 3). Использованные при доказательстве теоремы 3 методы теории графов и метод математической индукции привели к достаточно простому доказательству вычисления асимптотики числа $g_{n,d=k}$.

Доказательство основного результата настоящей работы основывается главным образом на методах теории графов, в частности, использует технику расслоений графа, и проводится методом математической индукции, позволяющим свести подсчёт графов к числу графов меньшего порядка. В работе используются результаты из [2], где автором найдено асимптотически точное приближение числа графов диаметра 3 и построен класс типичных графов диаметра 3.

Для верхней оценки (теорема 1) в разд. 2 класс графов (не обязательно связных), имеющих кратчайшую цепь длины k между фиксированными вершинами, разбивается на три подкласса графов с заданными типами расслоений. В первом классе тип расслоений позволяет свести подсчёт к случаю графов (не обязательно связных), имеющих кратчайшую цепь длины 3, число графов этого класса не превосходит $2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}/\binom{n}{2}$. Тип расслоений графов каждого из оставшихся двух классов позволяет доказать, что доля таких графов асимптотически мала, и оценить остаточный член. Для нижней оценки (теорема 2) с помощью введённых в разд. 3 специальных графов диаметра 3 определяется подкласс класса графов диаметра k. Подсчёт построенных графов использует ранее найденную оценку мощности класса типичных графов диаметра 3 из [2].

В статье используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [1,3], а также стандартные понятия комбинаторного анализа [4]. Рассматриваются только конечные обыкновенные (без петель и кратных рёбер) графы $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Как обычно, через $\deg_G x$ обозначим степень вершины x графа G, $B_i^G(v) = \{u \in V \mid \rho_G(v, u) \leqslant i\}$ — шар радиуса i с центром в вершине $v \in V$ в метрическом пространстве графа G с метрикой пути ρ_G, K_n — полный n-вершинный граф. Будем писать $f(n) \lesssim g(n)$, если существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $f(n) \leqslant g(n)$ для всех $n \geqslant N$. Запись $f(n) \sim g(n)$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{J}_n$ — класс всех помеченных n-вершинных графов с фиксированным множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Для любых $k \in \mathbb{N}$

и $x, y \in V$ рассмотрим класс графов $\mathcal{J}_{n,k}(x,y) = \{G \in \mathcal{J}_n \mid \rho_G(x,y) = k\}$. Нетрудно заметить, что

$$\mathcal{J}_{n,d=k} \subseteq \mathcal{J}_{n,d\geqslant k} \subseteq \mathcal{J}^*_{n,d\geqslant k} = \bigcup_{x,y\in V,\, x\neq y} \mathcal{J}_{n,k}(x,y), \tag{1}$$

$\mathcal{J}^*_{n,d\geqslant k} = \varnothing$ при $n \leqslant k$, $\mathcal{J}_{n,d=k} \neq \varnothing$ при $n \geqslant k+1$ и в (1) все включения строгие при $n \geqslant k+2$.

В [2] при исследовании разнообразия шаров в графах автором рассмотрен класс $\mathcal{T}_n$ всех графов из $\mathcal{J}_{n,d=3}$, которые не содержат совпадающих шаров радиуса 1 и имеют единственную пару диаметральных вершин. С помощью этого класса были установлены нижние оценки числа $g_{n,d=3}$. Очевидно, что $\mathcal{T}_n$ есть объединение подклассов $\mathcal{T}_n(x,y)$ по всем $x, y \in V$, где $\mathcal{T}_n(x,y)$ — класс всех графов из $\mathcal{T}_n$, в которых x, y являются диаметральными вершинами. В настоящей работе будем использовать полученные в [2] оценки числа графов из $\mathcal{T}_n(x,y)$. Пусть x, y, u, v — различные элементы V и

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n(x,y) &= \bigl\{G \in \mathcal{J}_n \mid B_1^G(x) \cap B_1^G(y) = \varnothing\bigr\}, \quad a_n = |\mathcal{A}_n(x,y)|,\\
\mathcal{B}_n(x,y,u,v) &= \bigl\{G \in \mathcal{J}_n \mid B_1^G(x) \cap B_1^G(y) = \varnothing \text{ и } B_1^G(u) \cap B_1^G(v) = \varnothing\bigr\},\\
\mathcal{C}_n(x,y,u) &= \bigl\{G \in \mathcal{J}_n \mid B_1^G(x) \cap B_1^G(y) = \varnothing \text{ и } B_1^G(x) \cap B_1^G(u) = \varnothing\bigr\},\\
\mathcal{D}_n &= \bigl\{G \in \mathcal{J}_n \mid \exists v_1, v_2 \in V\colon B_1^G(v_1) = B_1^G(v_2) \text{ и } v_1 \neq v_2\bigr\},\\
\mathcal{B}_n(x,y) &= \bigcup_{\substack{u,v\in V\setminus\{x,y\},\\ u\neq v}} \mathcal{B}_n(x,y,u,v), \quad \mathcal{C}_n(x,y) = \bigcup_{u\in V\setminus\{x,y\}} \mathcal{C}_n(x,y,u).
\end{aligned}$$

Лемма 1 [2]. *Пусть x, y, u, v — различные вершины из V. Тогда*

1) $a_n = 2^{\binom{n}{2}} \frac{8}{9} \bigl(\frac{3}{4}\bigr)^n$;

2) $|\mathcal{B}_n(x,y,u,v)| = a_n O(1) \bigl(\frac{3}{4}\bigr)^n$;

3) $|\mathcal{C}_n(x,y,u)| = a_n O(1) \bigl(\frac{5}{6}\bigr)^n$;

4) $|\mathcal{D}_n| = a_n O(n^2) \bigl(\frac{2}{3}\bigr)^n$.

Лемма 2 [2]. *Пусть x, y — различные вершины из V, $n \geqslant 3$ и $c > 0$, $0 < \varepsilon < 1$ — произвольные константы, не зависящие от n. Тогда*

1) $\mathcal{T}_n(x,y) = \mathcal{A}_n(x,y) \setminus (\mathcal{B}_n(x,y) \cup \mathcal{C}_n(x,y) \cup \mathcal{C}_n(y,x) \cup \mathcal{D}_n)$;

2) $|\mathcal{T}_n(x,y)| \gtrsim a_n\bigl(1 - c\,\bigl(\frac{5+\varepsilon}{6}\bigr)^{n-2}\bigr)$.

В дальнейшем будем использовать следующие комбинаторные тождества для биномиальных коэффициентов:

$$\binom{n}{2} + \binom{m}{2} = \binom{n+m}{2} - nm, \tag{2}$$

$$\binom{n-m}{2} = \binom{n}{2} - nm + \frac{m(m+1)}{2}. \tag{3}$$

2. Верхняя оценка

Пусть $x \in V$, $k \in \mathbb{N}$ и для некоторой вершины y графа G имеем $\rho_G(x,y) = k$. Полагаем $V_i = \{v \in V \mid \rho_G(x,v) = i\}$, $i = 0,1,\ldots,k-1$, и $V_k = \{v \in V \mid \rho_G(x,v) \geqslant k\}$. Последовательность множеств $(V_0,\ldots,V_k)$ будем называть *x-типом графа G длины* $k+1$ (рис. 1). Отметим, что равенство $\rho_G(x,u) = k$, вообще говоря, не выполняется для произвольной вершины $u \in V_k$, в частности, в графе G вершина u может быть вообще не соединена цепью с x. В общем случае равенство $\rho_G(x,u) = k$

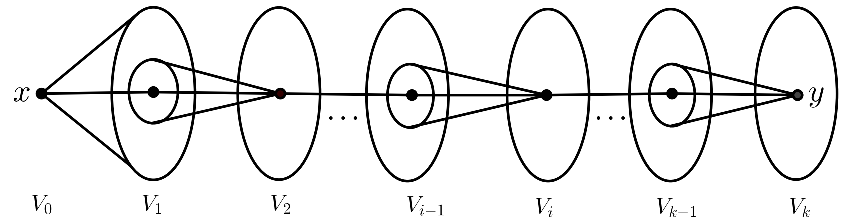

Рис. 1. x-тип $(V_0,V_1,\ldots,V_k)$

справедливо тогда и только тогда, когда u соединена ребром с некоторой вершиной из множества V_{k-1}.

Непосредственно из определения x-типа нетрудно доказать

Утверждение 1 (об x-типе)**.** *Пусть $x \in V$ и $V_i \subseteq V$, $i = 0,1,\ldots,k$. Тогда последовательность $(V_0,V_1,\ldots,V_k)$ является x-типом графа G тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *$V_0 = \{x\}$, $V_1,\ldots,V_k$ — разбиение множества V;*

2) *каждая вершина из множества V_i при $0 < i < k$ смежна с некоторой вершиной множества V_{i-1};*

3) *существует ребро, соединяющее вершину из множества V_{k-1} с вершиной из множества V_k;*

4) *для всякого ребра графа G существует такое i, что $0 < i \leqslant k$ и либо оба его конца принадлежат V_i, либо один из них принадлежит множеству V_i, а другой — множеству V_{i-1}.*

Таким образом, последовательность $(V_0, V_1, \dots, V_k)$ образует «расслоение» графа. Нас будут интересовать специальные расслоения, а утверждение 1 будет использоваться для подсчёта помеченных n-вершинных графов с таким заданным расслоением. Исследуем три подкласса класса графов $\mathcal{J}_{n,k}(x,y)$ при $x, y \in V$ и $x \neq y$. Пусть $\Phi_{n,k} = |\mathcal{J}_{n,k}(x,y)|$. Заметим, что число $\Phi_{n,k}$ не зависит от выбора различных вершин $x, y \in V$.

Рассмотрим подкласс $\mathcal{J}_{n,k,1}(x,y)$ всех графов из $\mathcal{J}_{n,k}(x,y)$, имеющих x-тип $(V_0, V_1, \dots, V_k)$ такой, что для некоторого $i \leqslant k-3$ выполняются следующие соотношения: $|V_j| = 1$ при $j \notin \{i+1, i+2, i+3\}$ и либо $|V_{i+3}| = 1$, либо $i = k-3$. Оценим число графов класса $\mathcal{J}_{n,k,1}(x,y)$. Пусть $\Phi_{n,k,1} = |\mathcal{J}_{n,k,1}(x,y)|$.

Лемма 3. *Пусть $k \geqslant 3$. Тогда для любого $n \geqslant 2$ справедливо*

$$\Phi_{n,k,1} \leqslant \frac{2^{\binom{n}{2}}}{\binom{n}{2}}\, \xi_{n,k}.$$

Доказательство. Поскольку $\mathcal{J}_{n,k}(x,y) = \varnothing$ при $n \leqslant k$, без ограничения общности считаем, что $n \geqslant k+1$. Для подсчёта числа графов класса $\mathcal{J}_{n,k,1}(x,y)$ обратимся к его определению. Пусть $G \in \mathcal{J}_{n,k,1}(x,y)$ имеет x-тип $(V_0, V_1, \dots, V_k)$. Для выбора i есть $k-2$ вариантов. Пусть $V_j = \{v_j\}$ при $j \notin \{i+1, i+2, i+3\}$ и $v_{i+3} \in V_{i+3}$, причём $v_{i+3} = y$ при $i = k-3$. Для выбора вершин $v_0, \dots, v_i, v_{i+3}, \dots, v_k$, за исключением вершин x и y, имеется $(n-2)_{k-3}$ способов. В силу утверждения 1 граф

$$G \setminus \bigcup_{s \notin [i, i+3]} V_s \in \mathcal{J}_{n-k+3,3}(v_i, v_{i+3})$$

имеет v_i-тип $(V_i, V_{i+1}, V_{i+2}, V_{i+3})$. По лемме 1 имеем $\Phi_{n,3} \leqslant 2^{\binom{n}{2}} \frac{8}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Таким образом, используя тождества (2) и (3), получаем

$$\begin{aligned}
\Phi_{n,k,1} &\leqslant (k-2)(n-2)_{k-3}\Phi_{n-k+3,3} \leqslant (k-2)(n-2)_{k-3}\, 2^{\binom{n-k+3}{2}} \frac{8}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k+3} \\
&= (k-2)(n-2)_{k-3}\, 2^{\binom{n}{2} - \binom{k-1}{2} - (n-k+1)(k-3)} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k+1} \\
&= \frac{2^{\binom{n}{2}}}{\binom{n}{2}} (n)_{k-1}\, q_k \left(\frac{3}{2^{k-1}}\right)^{n-k+1} = \frac{2^{\binom{n}{2}}}{\binom{n}{2}}\, \xi_{n,k}.
\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Рассмотрим класс $\mathcal{J}_{n,k,2}(x,y)$ графов из $\mathcal{J}_{n,k}(x,y)$, имеющих x-тип $(V_0, V_1, \dots, V_k)$ такой, что $|V_i| \geqslant 2$ и $|V_j| \geqslant 2$ для некоторых $i \leqslant k-3$

и $j \geqslant i+3$. Оценим число графов класса $\mathcal{J}_{n,k,2}(x,y)$, для чего положим $\Phi_{n,k,2} = |\mathcal{J}_{n,k,2}(x,y)|$.

Лемма 4. *Пусть $k \geqslant 3$. Тогда для любого $n \geqslant 4$ справедливо*

$$\Phi_{n,k,2} \leqslant 2\binom{n-2}{2}3^{n-2}\,\Phi_{n-2,k}.$$

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{J}_{n,k,2}(x,y)$ имеет x-тип $(V_0,\ldots,V_k)$. Тогда в графе G существует кратчайшая цепь P длины k, соединяющая вершины x и y. В силу утверждения 1 найдутся вершины $u \in V_i \setminus P$ и $v \in V_j \setminus P$, при этом $\rho_{G\setminus\{u,v\}}(x,y) = \rho_G(x,y) = k$. Следовательно, $G\setminus\{u,v\} \in \mathcal{J}_{n-2,k}(x,y)$. Кроме того, $B_1^G(u) \cap B_1^G(v) = \varnothing$, так как $j \geqslant i+3$.

Нетрудно понять, что все такие графы G содержатся среди графов, построенных следующим образом:

1) выбираем различные элементы $u, v \in V \setminus \{x,y\}$, имеется $(n-2)_2$ возможностей;

2) выбираем l вершин из множества $V \setminus \{u,v\}$ и каждую из них соединяем ребром с вершиной u, $0 \leqslant l \leqslant n-2$;

3) выбираем m вершин из оставшихся $n-2-l$ вершин и каждую из них соединяем ребром с вершиной v, $0 \leqslant m \leqslant n-2-l$;

4) на множестве $V \setminus \{u,v\}$ определяем произвольный граф из класса $\mathcal{J}_{n-2,k}(x,y)$.

Таким образом, используя формулу бинома Ньютона, заключаем

$$\Phi_{n,k,2} \leqslant (n-2)_2\,\Phi_{n-2,k}\sum_{l=0}^{n-2}\binom{n-2}{l}\sum_{m=0}^{n-2-l}\binom{n-2-l}{m} = 2\binom{n-2}{2}3^{n-2}\,\Phi_{n-2,k}.$$

Лемма 4 доказана.

Рассмотрим класс $\mathcal{J}_{n,k,3}(x,y)$ всех графов из $\mathcal{J}_{n,k}(x,y)$, имеющих x-тип $(V_0,V_1,\ldots,V_k)$ такой, что для некоторого $i \leqslant k-4$ имеем $|V_{i+1}| \geqslant 2$, $|V_{i+3}| \geqslant 2$ и $|V_j| = 1$ при $j \notin \{i+1,i+2,i+3\}$. Пусть $\Phi_{n,k,3} = |\mathcal{J}_{n,k,3}(x,y)|$. Для оценки числа $\Phi_{n,k,3}$ нам потребуются леммы 5 и 6.

Лемма 5. *Пусть $n+m-s \geqslant s \geqslant m \geqslant 0$. Тогда*

$$\sum_{i=s}^{n+m-s}\binom{n}{i}2^{(n-i)(m-i)} \leqslant (n+m-2s+1)\binom{n}{s}2^{(n-s)(m-s)}.$$

Доказательство. Введём последовательности $\alpha_i = \binom{n}{i} 2^{(n-i)(m-i)}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, и $\beta_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}}$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Для $0 < l < n$ непосредственно устанавливается, что

$$\frac{\beta_{l+1}}{\beta_l} = \frac{2l}{l+1} \cdot \frac{2(n-l)}{n-l+1} \geqslant 1,$$

т. е. β_j — неубывающая последовательность. Тем самым для некоторого $t^* \in \mathbb{Z}$ последовательность α_i не возрастает при $0 \leqslant i \leqslant t^*$ и не убывает при $t^* < i \leqslant n$. Следовательно, для некоторого t такого, что $s \leqslant t \leqslant n+m-s$, последовательность α_i не возрастает при $s \leqslant i \leqslant t$ и не убывает при $t < i \leqslant n+m-s$. Кроме того, из свойств биномиальных коэффициентов [4] и условия на m получаем

$$\binom{n}{s} = \binom{n}{n-s} \geqslant \binom{n}{n+m-s},$$

поэтому $\alpha_s \geqslant \alpha_{n+m-s}$. Таким образом,

$$\sum_{i=s}^{n+m-s} \alpha_i = \sum_{s \leqslant i \leqslant t} \alpha_i + \sum_{t < i \leqslant n+m-s} \alpha_i$$
$$\leqslant \sum_{s \leqslant i \leqslant t} \alpha_s + \sum_{t < i \leqslant n+m-s} \alpha_{n+m-s} \leqslant \sum_{i=s}^{n+m-s} \alpha_s = (n+m-2s+1)\alpha_s.$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6 (случай $k=4$). *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо*

$$\Phi_{n,4,3} \leqslant 2^{\binom{n}{2}+1}(n-3)^4 \left(\frac{5}{16}\right)^{n-3}.$$

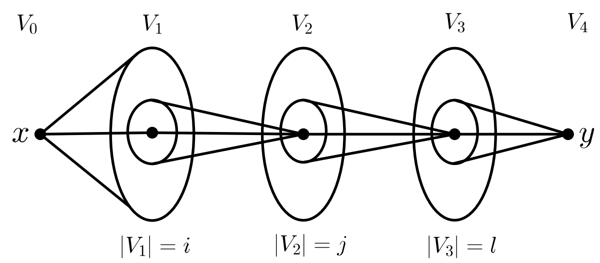

Рис. 2. x-тип $(V_0, V_1, V_2, V_3, V_4)$

Доказательство. Считаем, что $n \geqslant 7$, иначе $\Phi_{n,4,3} = 0$ и доказывать нечего. Пусть $G \in \mathcal{J}_{n,\,4,\,3}(x,y)$ имеет x-тип $(V_0,\dots,V_4)$. Обозначим $i = |V_1|$, $j = |V_2|$, $l = |V_3|$ (рис. 2). Тогда $V_0 = \{x\}$, $V_4 = \{y\}$, $i \geqslant 2$, $j \geqslant 1$, $l \geqslant 2$ и $i + j + l = n - 2$. В силу утверждения 1 графы указанного типа можно построить следующим образом:

1) выбираем j вершин множества V_2 из $V \setminus \{x,y\}$, $1 \leqslant j \leqslant n-6$;

2) выбираем i вершин множества V_1 из оставшихся $n-2-j$ вершин, $2 \leqslant i \leqslant n-2-j-2$; тогда $l = n-2-i-j$ и $V_3 = V \setminus (\{x,y\} \cup V_1 \cup V_2)$;

3) каждую вершину из V_s соединяем рёбрами с вершинами из некоторого непустого подмножества множества V_{s-1}, $s = 2,3,4$;

4) на V_s определяем произвольный граф, $s = 1,2,3$;

5) вершину x соединяем рёбрами с каждой вершиной из V_1.

Таким образом, учитывая (2), имеем

$$\Phi_{n,4,3} = \sum_{j=1}^{n-6} \binom{n-2}{j} \sum_{i=2}^{n-4-j} \binom{n-2-j}{i} 2^{\binom{i}{2}} 2^{\binom{j}{2}} 2^{\binom{l}{2}} (2^i - 1)^j (2^j - 1)^l (2^l - 1)$$
$$\leqslant 2^{\binom{n-2}{2}} \sum_{j=1}^{n-6} \binom{n-2}{j} \sum_{i=2}^{n-4-j} \binom{n-2-j}{i} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)^j 2^{l(1-i)}.$$

Далее, используя лемму 5 и формулу бинома Ньютона, получаем

$$2^{-\binom{n-2}{2}}\,\Phi_{n,\,4,\,3} \leqslant \sum_{j=1}^{n-6} \binom{n-2}{j} \binom{n-2-j}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^j 2^{-(n-2-j-2)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-7} \binom{n-2}{j} \sum_{i=3}^{n-4-j} \binom{n-2-j}{i} 2^{(n-2-j-i)(1-i)} \leqslant (n-3)^2 \cdot 2 \left(\frac{5}{4}\right)^{n-2}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-7} \binom{n-2}{j} (n-6-j) \binom{n-2-j}{3} 2^{-2(n-2-j-3)} \leqslant 2^4 (n-3)^4 \left(\frac{5}{4}\right)^{n-3}.$$

Таким образом, в силу тождества (3) заключаем, что

$$\Phi_{n,\,4,\,3} \leqslant 2^{\binom{n-2}{2}}\, 2^4 (n-3)^4 \left(\frac{5}{4}\right)^{n-3} = 2^{\binom{n}{2}+1} (n-3)^4 \left(\frac{5}{16}\right)^{n-3}.$$

Лемма 6 доказана.

Оценим число графов класса $\mathcal{J}_{n,k,3}(x,y)$.

Лемма 7. *Пусть $k \geqslant 3$. Тогда для любого $n \geqslant 2$ справедливо*

$$\Phi_{n,k,3} \leqslant \frac{2^{\binom{n}{2}}}{\binom{n}{2}}\, 16\, \xi_{n,k} |n-k+1|^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k+1}.$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем $n \geqslant k+1$. Пусть $G \in \mathcal{J}_{n,k,3}(x,y)$, $(V_0,\dots,V_k)$ — x-тип графа G и $V_j = \{v_j\}$ при $j \notin \{i+1, i+2, i+3\}$. Для выбора этих вершин v_j, за исключением вершин x и y, имеется $(n-2)_{k-4}$ возможностей, а для выбора i имеем $k-3$ значений. В силу утверждения 1 граф

$$G \setminus \bigcup_{s \notin [i,i+4]} V_s \in \mathcal{J}_{n-k+4,4}(v_i, v_{i+4})$$

имеет v_i-тип $(V_i, V_{i+1}, V_{i+2}, V_{i+3}, V_{i+4})$. Таким образом, учитывая (2), (3) и лемму 6, получаем

$$\begin{aligned}\Phi_{n,k,3} &\leqslant (k-3)(n-2)_{k-4}\, 2^{\binom{n-k+4}{2}+1} (n-k+1)^4 \left(\frac{5}{16}\right)^{n-k+1}\\ &\leqslant (k-3)(n-2)_{k-3} (n-k+1)^3\, 2^{\binom{n}{2}-\binom{k-1}{2}+4} \left(\frac{5}{2^k}\right)^{n-k+1}\\ &= \frac{2^{\binom{n}{2}}}{\binom{n}{2}} (n)_{k-1}\, q_k \left(\frac{3}{2^{k-1}}\right)^{n-k+1} \frac{k-3}{k-2} (n-k+1)^3\, 2^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k+1}\\ &\leqslant \frac{2^{\binom{n}{2}}}{\binom{n}{2}}\, 16\, \xi_{n,k} (n-k+1)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k+1}.\end{aligned}$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть $x, y \in V$. Тогда*

$$\mathcal{J}_{n,k}(x,y) = \mathcal{J}_{n,k,1}(x,y) \cup \mathcal{J}_{n,k,2}(x,y) \cup \mathcal{J}_{n,k,3}(x,y).$$

Доказательство. Поскольку $\mathcal{J}_{n,k}(x,y) = \varnothing$ при $n \leqslant k$ и простая цепь длины k с концами x, y принадлежит классу $\mathcal{J}_{k+1,k,1}(x,y)$, будем считать, что $n \geqslant k+2$. Пусть $G \in \mathcal{J}_{n,k}(x,y)$ и $(V_0, V_1, \dots, V_k)$ — x-тип графа G. Тогда существует $i \geqslant 0$ такое, что $|V_{i+1}| \geqslant 2$. Выберем i наименьшим. Если $i \geqslant k-3$, то $G \in \mathcal{J}_{n,k,1}(x,y)$. Пусть $i < k-3$. Тогда $k \geqslant 4$. Можно считать, что $|V_j| = 1$ для всех $j \geqslant i+4$, иначе $G \in \mathcal{J}_{n,k,2}(x,y)$. Получаем следующую альтернативу: если $|V_{i+3}| \geqslant 2$, то $G \in \mathcal{J}_{n,k,3}(x,y)$; если $|V_{i+3}| = 1$, то $G \in \mathcal{J}_{n,k,1}(x,y)$.

Обратное включение очевидно. Лемма 8 доказана.

Теорема 1 (верхняя оценка)**.** *Пусть $k \geqslant 3$ и $0 < \varepsilon < 1$. Тогда существует такая константа $c_k > 0$, не зависящая от n, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$g_{n,d=k} \leqslant g_{n,d\geqslant k} \leqslant g^*_{n,d\geqslant k} \leqslant 2^{\binom{n}{2}} \xi_{n,k}(1 + \varepsilon_{n,k}),$$

где $\varepsilon_{n,k} = c_k \left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^n$.

Доказательство. В силу (1) и равенства $g^*_{n,d\geqslant k} = 0$ при $n = 1$ достаточно показать, что для некоторой константы $c_k > 0$ неравенство

$$\Phi_{n,k} \leqslant \frac{2^{\binom{n}{2}}}{\binom{n}{2}} \xi_{n,k}(1 + \varepsilon_{n,k}) \tag{4}$$

справедливо для любого $n \geqslant 2$. Рассмотрим такую константу $N \geqslant 2$, не зависящую от n, что неравенство

$$4^k n^3 \left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant \left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^n \tag{5}$$

выполняется для всех $n > N$. Полагаем $c_k = q_k^{-1} \left(\frac{3}{2^{k-1}}\right)^{2-N}$. Заметим, что $c_k > 1$, поскольку $N \geqslant 2$ и $0 < q_k < \frac{k-2}{2}\, 2^{\frac{-(k-2)^2}{2}} < 1$.

Индукцией по n докажем справедливость (4) при $n \geqslant 2$. Если $n \leqslant k$, то $\Phi_{n,k} = 0$ и доказывать нечего, поэтому далее считаем $n \geqslant k + 1$.

Базис индукции: пусть $n \leqslant N$. Используя лемму 1, получаем

$$\Phi_{n,k} \leqslant a_n \leqslant 2^{\binom{n}{2}} q_k \left(\frac{3}{2^{k-1}}\right)^{n-k+1} c_k \left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^n \leqslant \frac{2^{\binom{n}{2}}}{\binom{n}{2}} \xi_{n,k}(1 + \varepsilon_{n,k}),$$

т. е. неравенство (4) выполняется.

Пусть $n > N$. Используя лемму 4, индукционное предположение и тождество (3), получаем

$$\Phi_{n,k,2} \leqslant 2^{\binom{n}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \xi_{n-2,k}\,(1 + \varepsilon_{n-2,k}).$$

Из определения $\xi_{n,k}$ нетрудно получить рекуррентное соотношение

$$\xi_{n-1,k} = \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{2^{k-1}}{3}\, \xi_{n,k}.$$

Тем самым с учётом неравенства $c_k > 1$ имеем

$$\Phi_{n,k,2} \leqslant 2^{\binom{n}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \frac{(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)} \cdot \frac{4^{k-1}}{9}\, \xi_{n,k}\,(1+\varepsilon_{n-2,k})$$
$$\leqslant \frac{2^{\binom{n}{2}}}{\binom{n}{2}}\, \xi_{n,k}\, 4^{k-3}(n-k+1)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} c_k.$$

Далее, в силу неравенства $\left(\frac{6}{5}\right)^{k-1} \leqslant \frac{1}{2} \cdot 4^{k-2}$, лемм 3, 7, 8 и соотношения (5) заключаем

$$\Phi_{n,k} = \Phi_{n,k,1} + \Phi_{n,k,2} + \Phi_{n,k,3}$$
$$\leqslant \frac{2^{\binom{n}{2}}}{\binom{n}{2}}\, \xi_{n,k} \left(1 + 4^k n^3 \left(\frac{5}{6}\right)^n c_k\right) \leqslant \frac{2^{\binom{n}{2}}}{\binom{n}{2}}\, \xi_{n,k}(1+\varepsilon_{n,k}).$$

Таким образом, справедливо неравенство (4). Теорема 1 доказана.

3. Нижняя оценка

Пусть $\mathcal{T}_n^*(x,y)$ — класс всех таких графов из $\mathcal{T}_n(x,y)$, в которых вершины x и y не являются висячими. Заметим, что $\mathcal{T}_n^*(x,y) = \varnothing$ при $n < 6$ и $\mathcal{T}_n^*(x,y) \neq \varnothing$ при $n \geqslant 6$, $x \neq y$. Простейший пример графа класса $\mathcal{T}_n^*(x,y)$ изображён на рис. 3. Оценим число графов класса $\mathcal{T}_n^*(x,y)$.

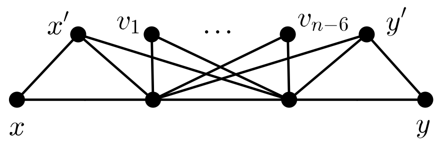

Рис. 3. Граф класса $\mathcal{T}_n^*(x,y)$

Лемма 9. *Пусть $x, y \in V$, $x \neq y$ и $c > 0$, $0 < \varepsilon < 1$ — произвольные константы, не зависящие от n. Тогда*

$$|\mathcal{T}_n^*(x,y)| \gtrsim a_n \left(1 - c\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-2}\right).$$

Доказательство. Очевидно, что число помеченных n-вершинных графов, имеющих фиксированную висячую вершину, равно $(n-1)\, 2^{\binom{n-1}{2}}$.

Следовательно, используя леммы 1 и 2, получаем

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{T}_n^*(x,y)| \geqslant |\mathcal{T}_n(x,y)| - 2(n-1)\,2^{\binom{n-1}{2}} \\
\gtrsim a_n\left(1 - \frac{c}{2}\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-2}\right) - \frac{9}{2}a_n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n \\
\gtrsim a_n\left(1 - c\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-2}\right).
\end{aligned}
$$

Лемма 9 доказана.

Теперь при $k \geqslant 3$ определим подкласс класса графов $\mathcal{J}_{n,d=k}$ следующим образом. Пусть $u = (u_1, \ldots, u_{k-1})$ — произвольная упорядоченная последовательность различных вершин из V. Для выбора такой последовательности имеется $(n)_{k-1}$ возможностей. Зафиксируем произвольную пару соседних элементов u_s и u_{s+1}, это можно сделать $k-2$ способами. На множестве $V \setminus \{u_1, \ldots, u_{s-1}, u_{s+2}, \ldots, u_{k-1}\}$ из $n-k+3$ вершин определим произвольный граф T из класса $\mathcal{T}^*_{n-k+3}(u_s, u_{s+1})$. Наконец, соединим рёбрами вершины u_i, u_{i+1} при $i \neq s$ и $1 \leqslant i < k-1$. Полученный граф обозначим через $G(u,s,T)$. Очевидно, что $G(u,s,T) \in \mathcal{J}_{n,d=k}$ и u_1, u_{k-1} — диаметральные вершины в $G(u,s,T)$. Класс всех полученных таким образом графов обозначим через $\mathcal{T}_{n,d=k}$. Заметим, что

$$
\mathcal{T}_{n,d=k} \neq \varnothing \Leftrightarrow \mathcal{T}^*_{n-k+3}(x,y) \neq \varnothing \Leftrightarrow n \geqslant k+3.
$$

Подсчитаем число графов в классе $\mathcal{T}_{n,d=k}$. Поскольку графы из класса $\mathcal{T}^*_{n-k+3}(u_s, u_{s+1})$ имеют единственную пару диаметральных вершин, таким же свойством обладают все графы из $\mathcal{T}_{n,d=k}$. Более того, часть диаметральной цепи графа $G(u,s,T)$ от заданной диаметральной вершины до первой встречающейся вершины v из T можно однозначно восстановить, зная рёбра графа $G(u,s,T)$, поскольку $\deg_T v \geqslant 2$. Следовательно, вышеописанный способ построения графов класса $\mathcal{T}_{n,d=k}$ может привести к повтору помеченного графа $G(u,s,T)$ только в случае построения графа $G(u',s',T')$, где u' — последовательность u, записанная в обратном порядке, $s' = k-1-s$ и T' — «перевёрнутый» граф T. Заметим, что в случае использования класса $\mathcal{T}_n(x,y)$ вместо $\mathcal{T}_n^*(x,y)$ это свойство не выполняется и возникают дополнительные повторы графов (именно поэтому был рассмотрен класс $\mathcal{T}_n^*(x,y)$). Таким образом, справедливо соотношение

$$
|\mathcal{T}_{n,d=k}| = \frac{1}{2}(k-2)(n)_{k-1}|\mathcal{T}^*_{n-k+3}(x,y)|, \quad \text{где } x \neq y \text{ и } n \geqslant 2.
$$

По лемме 9 существует такое $N > 0$, не зависящее от n и k, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|\mathcal{T}_n^*(x,y)| \geqslant a_n\bigl(1 - \bigl(\frac{5+\varepsilon}{6}\bigr)^{n-2}\bigr)$. Полагаем $c = \bigl(\frac{6}{5+\varepsilon}\bigr)^{N-1}$. Теперь, учитывая лемму 1 и тождества (2), (3), для любого $n > N + k - 3$ получаем

$$|\mathcal{T}_{n,d=k}| \geqslant \frac{1}{2}(k-2)(n)_{k-1}\, 2^{\binom{n-k+3}{2}} \frac{8}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k+3}\left(1 - \left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-k+1}\right)$$
$$= 2^{\binom{n}{2}} q_k (n)_{k-1}\, 2^{-(n-k+1)(k-3)}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k+1}\left(1 - \left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-k+1}\right)$$
$$\geqslant 2^{\binom{n}{2}} \xi_{n,k}\left(1 - c\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-k+1}\right).$$

Пусть теперь $n \leqslant N + k - 3$. Тогда $c\,\bigl(\frac{5+\varepsilon}{6}\bigr)^{n-k+1} > 1$. Следовательно, $|\mathcal{T}_{n,d=k}| \geqslant 2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}\bigl(1 - c\,\bigl(\frac{5+\varepsilon}{6}\bigr)^{n-k+1}\bigr)$. Тем самым доказана

Теорема 2 (нижняя оценка)**.** *Пусть $k \geqslant 3$ и $0 < \varepsilon < 1$. Тогда существует такая константа $c > 0$, не зависящая от n и k, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$g^*_{n,d\geqslant k} \geqslant g_{n,d\geqslant k} \geqslant g_{n,d=k} \geqslant |\mathcal{T}_{n,d=k}| \geqslant 2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}\left(1 - c\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-k+1}\right).$$

Замечание 1. Доказательство нижней оценки числа $|\mathcal{T}_n(x,y)|$ в лемме 2 и доказательство теоремы 2 показывают, что

$$|\mathcal{T}_{n,d=k}| \gtrsim 2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}\left(1 - cn\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k+1}\right)$$

для подходящей константы $c > 0$, не зависящей от n и k.

4. Число графов

Теорема 3. *Пусть $k \geqslant 3$ и $0 < \varepsilon < 1$. Тогда существует такая константа $c_k > 0$, не зависящая от n, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}(1 - \varepsilon_{n,k}) \leqslant |\mathcal{T}_{n,d=k}| \leqslant g_{n,d=k} \leqslant g_{n,d\geqslant k} \leqslant g^*_{n,d\geqslant k} \leqslant 2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}(1 + \varepsilon_{n,k}),$$

где $\xi_{n,k} = q_k (n)_{k-1}\bigl(\frac{3}{2^{k-1}}\bigr)^{n-k+1}$, $q_k = \frac{1}{2}(k-2)\, 2^{-\binom{k-1}{2}}$ *и* $\varepsilon_{n,k} = c_k\bigl(\frac{5+\varepsilon}{6}\bigr)^n = o(1)$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть c_k^1 — константа из теоремы 1 для верхней оценки числа $g^*_{n,d\geqslant k}$. Положим $c_k^2 = c\left(\frac{6}{5+\varepsilon}\right)^{k-1}$, где c — константа из теоремы 2 для нижней оценки числа $|\mathcal{T}_{n,d=k}|$. Тогда $c_k = \max\left(c_k^1, c_k^2\right)$ — требуемая константа. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Константа c_k приведена явно в доказательствах теорем 1 и 2.

Отметим, что при $k = 3$ верхняя оценка в теореме 3 имеет вид $2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}$, поскольку $\Phi_{n,k,2} = \Phi_{n,k,3} = 0$ (см. также [2]). В связи с этим представляет интерес вопрос о справедливости такой оценки в общем случае для произвольного $k \geqslant 3$.

Теорема 3 показывает, что при $k \geqslant 3$ асимптотически равномощны классы графов $\mathcal{J}_{n,d=k}$, $\mathcal{J}_{n,d\geqslant k}$ и $\mathcal{J}^*_{n,d\geqslant k}$.

Следствие 1. *Пусть $k \geqslant 3$. Тогда при $n \to \infty$ справедливы асимптотические равенства $g_{n,d=k} \sim g_{n,d\geqslant k} \sim g^*_{n,d\geqslant k} \sim 2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}$.*

Заметим, что асимптотическое равенство $g_{n,d=k} \sim g_{n,d\geqslant k}$ также можно получить из асимптотической формулы для $g_{n,d=k}$, найденной в [8].

Теорема 3 также показывает, что при $k \geqslant 3$ класс $\mathcal{T}_{d=k} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_{n,d=k}$ является классом типичных графов диаметра k [2].

Следствие 2. *Пусть $k \geqslant 3$. Тогда почти все графы диаметра k принадлежат классу $\mathcal{T}_{d=k}$.*

Следствие 3. *Пусть $k \geqslant 3$. Тогда почти все графы диаметра k имеют единственную пару диаметральных вершин.*

В связи со следствием 3 примечательно, что класс n-вершинных графов диаметра 2 с единственной парой диаметральных вершин состоит с точностью до изоморфизма из единственного графа (хотя почти все графы имеют диаметр 2).

Утверждение 2. *Пусть G — n-вершинный граф диаметра 2, имеющий единственную пару диаметральных вершин. Тогда $n \geqslant 3$ и G изоморфен графу $\overline{K}_2 + K_{n-2}$.*

Доказательство. Пусть x и y — диаметральные вершины графа $G = (V, E)$. Тогда $xy \notin E$ и каждая из вершин x и y смежна со всеми вершинами из $V \setminus \{x, y\}$. Кроме того, для любых различных вершин $z_1, z_2 \in V \setminus \{x, y\}$ имеем $z_1 z_2 \in E$ (иначе z_1 и z_2 — диаметральные вершины). Следовательно, $G \setminus \{x, y\} \cong K_{n-2}$. Теперь очевидно, что $G \cong \overline{K}_2 + K_{n-2}$. Утверждение 2 доказано.

Следствие 4. *Число n-вершинных помеченных графов диаметра 2 с единственной парой диаметральных вершин равно $\binom{n}{2}$.*

Следствие 5. *Почти все графы диаметра 2 имеют более одной пары диаметральных вершин.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.
2. **Федоряева Т. И.** Вектор разнообразия шаров типичного графа малого диаметра // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 6. С. 43–54.
3. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
4. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.
5. **Füredi Z., Kim Y.** The number of graphs of given diameter // arXiv:1204.4580v [math.CO]. 2012. P. 13.
6. **Kim Y.** Problems in extremal combinatorics: Thes. … doct. philosophy (mathematics). Univ. Illinois — Urbana-Champaign, 2011.
7. **Moon J. W., Moser L.** Almost all (0,1) matrices are primitive // Stud. Sci. Math. Hung. 1966. Vol. 1. P. 153–156.
8. **Tomescu I.** An asymptotic formula for the number of graphs having small diameter // Discrete Math. 1996. Vol. 156, No. 1–3. P. 219–228.
9. **Tomescu I.** Almost all graphs and h-hypergraphs have small diameter // Australas. J. Comb. 2005. Vol. 31. P. 313–323.

Федоряева Татьяна Ивановна

Статья поступила
29 марта 2016 г.

Исправленный вариант —
4 июля 2016 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2017. Volume 24, No. 2. P. 68–86

UDC 519.1+519.175 DOI: 10.17377/daio.2017.24.534

ASYMPTOTIC APPROXIMATION FOR THE NUMBER OF n-VERTEX GRAPHS OF GIVEN DIAMETER

T. I. Fedoryaeva[1,2]

[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
[2]Novosibirsk State University,
2 Pirogov St., 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: tatiana.fedoryaeva@gmail.com

Abstract. We prove that, for fixed $k \geqslant 3$, the following classes of labeled n-vertex graphs are asymptotically equicardinal: graphs of diameter k, connected graphs of diameter at least k, and (not necessarily connected) graphs with a shortest path of length at least k. An asymptotically exact approximation of the number of such n-vertex graphs is obtained, and an explicit error estimate in the approximation is found. Thus, the estimates are improved for the asymptotic approximation of the number of n-vertex graphs of fixed diameter k earlier obtained by Füredi and Kim. It is shown that almost all graphs of diameter k have a unique pair of diametrical vertices but almost all graphs of diameter 2 have more than one pair of such vertices. Illustr. 3, bibliogr. 9.

Keywords: graph, labeled graph, shortest path, graph diameter, number of graphs, ordinary graph.

REFERENCES

1. **V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. I. Sarvanov,** and **R. I. Tyshkevich,** *Lektsii po teorii grafov,* Nauka, Moscow, 1990 [Russian]. Translated under the title *Lectures on Graph Theory,* B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994.
2. **T. I. Fedoryaeva,** The diversity vector of balls of a typical graph of small diameter, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **22**, No. 6, 43–54, 2015 [Russian].
3. **F. Harary,** *Graph Theory,* Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 1969. Translated under the title *Teoriya grafov,* Mir, Moscow, 1973 [Russian].
4. **S. V. Yablonskii,** *Vvedenie v diskretnuyu matematiku* (Introduction to Discrete Mathematics), Nauka, Moscow, 1986 [Russian].
5. **Z. Füredi** and **Y. Kim,** The number of graphs of given diameter, 2012 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1204.4580).

6. **Y. Kim,** Problems in extremal combinatorics, *Ph. D. Thesis,* Univ. Ill. Urbana-Champaign, Urbana, Champaign, 2011.
7. **J. W. Moon** and **L. Moser,** Almost all (0,1) matrices are primitive, *Stud. Sci. Math. Hung.,* **1**, 153–156, 1966.
8. **I. Tomescu,** An asymptotic formula for the number of graphs having small diameter, *Discrete Math.,* **156**, No. 1–3, 219–228, 1996.
9. **I. Tomescu,** Almost all graphs and h-hypergraphs have small diameter, *Australas. J. Comb.,* **31**, 313–323, 2005.

Tatiana I. Fedoryaeva

Received
29 March 2016
Revised
4 July 2016