ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2017. Том 24, № 2. С. 87–106

УДК 519.157.1 DOI: 10.17377/daio.2017.24.540

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ МИНИМАЛЬНОСТИ ПОКРЫТИЙ ЧЕРЕЗ ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ *)

И. П. Чухров

Институт автоматизации проектирования РАН,
ул. 2-я Брестская, 19/18, 123056 Москва, Россия
E-mail: chip@icad.org.ru

Аннотация. Для задачи о покрытии конечного множества предложен метод получения нижних оценок длины кратчайшего и сложности минимального покрытия, основанный на понятии независимого семейства множеств. Для задачи минимизации булевых функций построены функции и покрытия гранями множества их единичных вершин, для которых достижимы предложенные нижние оценки при пяти и более переменных. Основанные на независимых множествах нижние оценки оказываются недостижимы и не могут использоваться в качестве достаточных условий минимальности для таких функций. Библиогр. 11.

Ключевые слова: задача о покрытии множества, сложность, кратчайшее покрытие, минимальное покрытие, независимое множество, нижняя граница, условие минимальности.

Введение

Комбинаторная постановка взвешенной задачи о минимальном покрытии множества определяется конечным множеством элементов и семейством подмножеств этого множества, каждому из которых приписан вес. Требуется из этого семейства выбрать такие подмножества, которые содержат все элементы и имеют минимальный суммарный вес. Если все подмножества имеют единичные веса, то задача называется *невзвешенной,* или *задачей о кратчайшем покрытии множества.*

Формально понятия задачи о покрытии конечного множества определяются следующим образом.

Системой множеств называется пара $\langle X, Y\rangle$, где X — конечное множество элементов и $Y \subseteq 2^X \setminus \{\varnothing\}$ — семейство различных подмножеств множества X.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16–01–00593а).

Семейство множеств, которые содержат элемент x, обозначим через Y_x, т. е. $Y_x = \{y \in Y \mid x \in y\}$. Множество элементов X, которые содержатся в произвольном семействе множеств $S \subseteq Y$, обозначим через X_S, т. е. $X_S = \bigcup\limits_{y \in S} y$. Соответственно будем говорить, что семейство $S \subseteq Y$ *покрывает* множество элементов $X_S \subseteq X$.

Покрытием для системы множеств $\langle X, Y\rangle$ называется любое семейство $S \subseteq Y$, которое содержит все элементы X, т. е. $X_S = X$. Очевидно, что для существования покрытия должно выполняться условие $X_Y = X$, т. е. семейство Y должно содержать все элементы X.

Сложность произвольного семейства множеств $S \subseteq Y$ определяется неотрицательным аддитивным функционалом $C\colon Y \to \mathbb{R}^+$, который задаёт сложность множеств из Y, и соотношением $C(S) = \sum\limits_{y \in S} C(y)$, определяющим сложность семейства S. Аддитивность функционала сложности означает, что для любых непересекающихся семейств $S_1, S_2 \subset Y$ выполняется $C(S_1 \cup S_2) = C(S_1) + C(S_2)$.

Стандартная задача о покрытии $Z = \langle X, Y, C\rangle$ заключается в нахождении семейства $S \subseteq Y$, которое является покрытием X и имеет минимальную сложность $C(S)$. Такие семейства будем называть *минимальными покрытиями* и их сложность в задаче $Z = \langle X, Y, C\rangle$ обозначим через $C(X, Y)$, или $C(Z)$.

Если сложность любого множества из Y равна 1 и сложность любого семейства $S \subseteq Y$ равна его мощности, то функционал сложности называется *длиной* и обозначается через l. Семейства, которые являются покрытиями минимальной длины, будем называть *кратчайшими покрытиями.* Соответственно задача $Z = \langle X, Y, l\rangle$ называется *задачей о кратчайшем покрытии.*

Различные оптимизационные задачи для дискретных структур могут быть сформулированы как задачи о покрытии обобщённого вида. При этом может требоваться покрыть заданное множество элементов, а система множеств и функционал сложности удовлетворяют ограничениям, определяемым свойствами структур, например, графа, булева куба и др.

Будем рассматривать следующие обобщённые задачи о покрытии для системы множеств $\langle X, Y\rangle$.

1. Задача $Z_A = \langle A, X, Y, C\rangle$, где $A \subset X$, заключается в нахождении семейства множеств $S \subseteq Y$ минимальной сложности, которое покрывает множество A, т. е. $A = X_S$. Задача Z_A сводится к стандартной задаче $Z = \langle A, Y \cap 2^A, C\rangle$, при этом функционал сложности множеств из семейства $Y \cap 2^A \subseteq Y$ остаётся без изменения.

2. Задача $\widetilde{Z}_A = \langle A, X, Y, C\rangle$, где $A \subset X$, заключается в нахождении семейства $S \subseteq Y$ минимальной сложности, которое содержит A, т. е. $A \subseteq X_S$. Задача $\widetilde{Z}_A$ может быть сведена к стандартной задаче $Z = \langle A, Y_{\cap A}, \widetilde{C}\rangle$, где $Y_{\cap A} = \{y' \subseteq 2^A \mid \exists y \in Y : y' = y \cap A\}$, т. е. из каждого множества $y \in Y$ удаляются элементы, которые не принадлежат множеству A, и функционал $\widetilde{C} : Y_{\cap A} \to \mathbb{R}^+$ определяется соотношением $\widetilde{C}(y') = \min\limits_{y \in Y \,|\, y \cap A = y'} C(y)$. Таким образом, если множество $y' \in Y_{\cap A} \subseteq 2^A$ может быть получено при пересечении A с различными множествами из Y, то значение $\widetilde{C}(y')$ определяется как минимально возможная сложность таких множеств.

Очевидно, что $C(\widetilde{Z}_A) \leqslant C(Z_A)$ для любого множества $A \subset X$ и для одноэлементного множества выполняется $C(\widetilde{Z}_{\{a\}}) = \min\limits_{y \,|\, a \in y \in Y} C(y)$.

Для задачи $\widetilde{Z}_A = \langle A, X, Y, C\rangle$ сложность минимального покрытия обозначим через $\widetilde{C}(A, X, Y)$, а длину кратчайшего — через $\tilde{l}(A, X, Y)$.

3. Задача $\widetilde{Z}_{A,B} = \langle A, B, X, Y, C\rangle$, где $A \subset X$, $B \subset X$ и $A \cap B = \varnothing$, заключается в нахождении семейства $S \subseteq Y$ минимальной сложности такого, для которого $A \subseteq X_S \subseteq A \cup B$. Задача $\widetilde{Z}_{A,B}$ может быть сведена сначала к задаче $\widetilde{Z}_A = \langle A, X, Y \cap 2^{A\cup B}, C\rangle$, а затем к стандартной задаче о покрытии.

Различные задачи о вершинных и рёберных покрытиях для графов могут быть сформулированы как стандартная задача о покрытии.

Задача минимизации булевых функций относительно аддитивной меры сложности $\mathcal{L}$ в геометрической интерпретации (см. [4]) является задачей о покрытии для системы множеств $\langle B^n, G^n\rangle$, где B^n — множество вершин, G^n — множество граней n-мерного единичного куба и сложность комплекса граней равна сумме сложностей этих граней. Задаче минимизации для всюду определённой булевой функции соответствует задача о покрытии вида $Z_A = \langle N_f, B^n, G^n, \mathcal{L}\rangle$, а задаче минимизации для частично определённой булевой функции — задача о покрытии вида $\widetilde{Z}_{A,B} = \langle N_f, N_{\widetilde{f}}, B^n, G^n, \mathcal{L}\rangle$, где $A = N_f$ и $B = N_{\widetilde{f}}$ — соответственно множества единичных и неопределённых вершин функции f в кубе B^n.

Замечание 1. Для стандартной задачи $Z = \langle X, Y, C\rangle$ обозначим через $Y_{C=0} = \{y \in Y \mid C(y) = 0\}$ множество множеств из семейства Y, которые имеют нулевую сложность. Если $Y_{C=0} \neq \varnothing$, то задача Z может быть сведена к задаче $\widetilde{Z}_A = \langle A, X, Y, C\rangle$, где $A = X \setminus X_{Y_{C=0}}$, т. е. к нахождению минимального покрытия элементов, которые не принадлежат множествам нулевой сложности. Тогда любое минимальное покрытие S для задачи $\widetilde{Z}_A$, объединённое с произвольным покрытием элементов $X_{Y_{C=0}} \setminus X_S$

только множествами нулевой сложности, будет минимальным покрытием для задачи Z_A и $C(Z) = C(\widetilde{Z}_A)$. Поэтому достаточно рассматривать задачи, в которых сложность любого множества больше нуля.

Сведе́ние дискретной оптимизационной задачи к стандартной задаче о покрытии обеспечивает возможность применения известных методов решения задачи. Однако игнорирование специфических свойств семейства множеств и функционала сложности может приводить к возрастанию вычислительной трудоёмкости поиска решения.

В обзорных статьях $[1, 3, 8]$ изложены различные алгоритмические вопросы и подходы к решению задачи о покрытии, которые характерны для многих трудных дискретных оптимизационных задач.

При точном решении задачи о покрытии основные усилия нацелены на сокращение вычислительной трудоёмкости поиска решения. Сначала выполняются преобразования, направленные на сокращение системы множеств, для которой решается задача о покрытии. Используемые при этом подходы основаны на таких известных понятиях, как связность, неприводимое покрытие, ядровые множества, доминирование для элементов и множеств, которые имеют приемлемую трудоёмкость проверки соответствующих свойств. В результате итеративных преобразований исходная задача сводится к задаче о покрытии для несокращаемой системы множеств, которая (система) называется *циклическим ядром* [8]. Точные алгоритмы построения минимальных покрытий для таких задач обычно используют переборные схемы и относятся к методам ветвей и границ. Возможность и эффективность выполнения перебора в значительной степени определяются применимостью достаточных условий минимальности, т. е. достижимостью нижних границ, используемых для оценки минимальной сложности покрытия.

Известны задачи о покрытии для специальных структур, решение которых представляет значительную трудность. Нахождение точных решений для некоторых тестовых примеров, которые содержатся в библиотеке OR-Library, ограничено определёнными размерностями. Даже при относительно небольшой размерности для таких тестовых примеров известны лишь минимальные из полученных решений, но не доказана их оптимальность. Предлагаемые подходы, основанные на интегрировании различных идей, позволяют сократить время вычисления и лишь улучшить известные решения $[6, 9–11]$. Численные эксперименты также показывают, что основные затраты приходятся на доказательство оптимальности решения [2]. В качестве достаточных условий минимальности обычно используются нижние границы, основанные на понятии незави-

симого множества элементов.

Независимая минимизация для компонент связности означает возможность построения минимального покрытия путём объединения минимальных покрытий для компонент связности.

Связным для системы множеств $\langle X, Y\rangle$ называется непустое подмножество элементов $\widetilde{X} \subseteq X$, если для любых $x_1, x_2 \in \widetilde{X}$ существует такая последовательность множеств $\{y_i\}_{i=1}^{s}$, что $x_1 \in y_1$, $x_2 \in y_s$ и $y_i \cap y_{i+1} \neq \varnothing$ для $i = 1, \ldots, s-1$, т. е. существует последовательность попарно пересекающихся множеств, в которой первое множество содержит элемент x_1, а последнее множество содержит элемент x_2.

Компонентой связности называется максимальное связное подмножество $\widetilde{X} \subseteq X$. Соответственно любое связное подмножество элементов либо содержится в $\widetilde{X}$, либо не пересекается с $\widetilde{X}$.

Понятие связности определяет возможность представления системы множеств $\langle X, Y\rangle$ в виде *объединения систем множеств* $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} \langle A, Y_A\rangle$ для семейства множеств $\mathcal{A} = \{A \mid A \subset X\}$ такого, что

$$X = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A, \quad Y = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} Y_A,$$

где $Y_A = Y \cap 2^A$ и различные множества $A \in \mathcal{A}$ не пересекаются. Отметим, что такое возможно только в случае, когда каждое множество из семейства $\mathcal{A}$ совпадает с одной или объединением нескольких компонент связности, поскольку элементы из одной компоненты связности не могут содержаться в различных множествах семейства $\mathcal{A}$.

Соответственно для любого семейства множеств $S \subseteq Y$ и аддитивного функционала сложности выполняется

$$S = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} S_A, \quad C(S) = \sum_{A\in\mathcal{A}} C(S_A),$$

где $S_A = S \cap 2^A \subseteq Y \cap 2^A$ для $A \in \mathcal{A}$. Поэтому семейство S является минимальным покрытием тогда и только тогда, когда для каждого множества $A \in \mathcal{A}$ семейство S_A является минимальным покрытием A, следовательно,

$$C(X, Y) = \sum_{A\in\mathcal{A}} C(A, Y \cap 2^A).$$

Необходимые условия минимальности покрытия основаны на следующих понятиях: неприводимое покрытие, ядровое множество и доминирование.

Для произвольного семейства $S \subseteq Y$ и множества $y \in S$ элементы из множества $X_S \setminus X_{S \setminus \{y\}}$, если оно непусто, называются *собственными* элементами множества y в семействе S и обозначаются через X_y^S.

Семейство S называется *неприводимым*, если для любого $y \in S$ имеет место $X_y^S \neq \varnothing$, т. е. каждое множество семейства содержит хотя бы один собственный элемент, которого нет в других множествах семейства.

Множество $y \in Y$ называется *ядровым*, если $X_y^Y = X \setminus X_{Y \setminus \{y\}} \neq \varnothing$, т. е. имеет собственный элемент, который не принадлежит другим множествам семейства Y. Для ядровых множеств введём следующие обозначения: Y_{ker} — семейство ядровых множеств, X_y^{ker} — собственные элементы ядрового множества $y \in Y_{\text{ker}}$, $X_{\text{ker}} = \bigcup\limits_{y \in Y_{\text{ker}}} X_y^{\text{ker}}$ — множество собственных элементов всех ядровых множеств, $X_{Y_{\text{ker}}}$ — множество элементов всех ядровых множеств.

Множество $y_1 \in Y$ *доминирует* множество $y_2 \in Y$, если $y_2 \subset y_1$ и $C(y_1) \leqslant C(y_2)$. Элемент $x_1 \in X$ *доминирует* элемент $x_2 \in X$, если любое множество $y \in Y$, которое содержит x_1, содержит и x_2, т. е. $Y_{x_2} \subseteq Y_{x_1}$.

Неприводимость покрытия является необходимым условием минимальности при условии строгой положительности функционала сложности. Если покрытие не является неприводимым, то последовательным удалением множеств, которые не имеют собственных элементов, можем получить некоторое неприводимое покрытие. Любое полученное таким образом неприводимое покрытие будет иметь меньшую сложность.

Ядровое множество входит в любое минимальное покрытие, так как его собственные элементы не содержатся в других множествах. При этом любой собственный элемент доминирует все остальные элементы ядрового множества. Семейство Y является единственным покрытием X тогда и только тогда, когда все множества из семейства Y являются ядровыми, т. е. $Y_{\text{ker}} = Y$.

При построении минимального покрытия могут быть исключены из рассмотрения все доминируемые множества, так как при замене доминируемого множества доминирующим сложность покрытия не увеличивается. Последовательно можно исключать из рассмотрения доминируемые элементы, поскольку в покрытии такие элементы будут содержаться в множествах, которые покрывают соответствующие доминирующие элементы. Так как элементы могут доминировать друг друга, после удаления некоторых доминируемых элементов один из таких элементов может перестать быть доминируемым.

Достаточными условиями минимальности покрытия являются достижимые нижние границы сложности.

Независимым множеством элементов для системы множеств $\langle X, Y \rangle$ называется непустое множество $Q \subset X$, если любое множество $y \in Y$ содержит не более одного элемента из множества Q. Мощность максимального по объёму независимого множества обозначим через $m(X, Y)$.

Если множество $Q \subset X$ является независимым для системы множеств $\langle X, Y \rangle$, то в любом семействе $S \subseteq Y$, покрывающем X, для каждого элемента $x \in Q$ есть хотя бы одно множество, которое содержит элемент x и не содержит ни одного элемента из множества $Q \setminus \{x\}$. Тем самым

$$l(S) = |S| \geqslant |Q|, \quad C(S) \geqslant \widetilde{C}(Q, X, Y) = \sum_{x \in Q} \widetilde{C}(\{x\}, X, Y),$$

где $\widetilde{C}(\{x\}, X, Y) = \min_{y \in Y_x} C(y)$ — минимальная сложность множества, содержащего элемент x. Следовательно, $l(X, Y) \geqslant m(X, Y)$ и мощность произвольного независимого множества является нижней границей для длины кратчайшего покрытия. Стало быть, значение $\widetilde{C}(Q, X, Y)$ является нижней границей для сложности минимального покрытия.

Вычисляемые так нижние границы длины или сложности покрытия при условии их достижимости, т. е. если для семейства $S \subseteq Y$ покрывающего X и независимого множества $Q \subset X$ выполняется

$$l(S) = |Q| \tag{1}$$

или

$$C(S) = \sum_{x \in Q} \widetilde{C}(\{x\}, X, Y), \tag{2}$$

являются достаточными условиями минимальности.

Равенство (1) означает, что покрытие S является кратчайшим, а Q — максимальное независимое множество и $l(X, Y) = m(X, Y)$. Тем самым выполнение (2) означает, что покрытие S минимально для сложности C.

Известно, что задача нахождения максимального независимого множества NP-трудна. В [7] показано, что использование жадного алгоритма с различными эвристиками для построения независимого множества, которое максимизирует нижнюю оценку сложности, даёт результаты низкого качества. Отметим, что для неприводимого покрытия на независимость можно проверить множество, которое содержит по одному собственному элементу из каждого множества покрытия. Построение такого независимого множества из собственных элементов означает, что неприводимое покрытие является кратчайшим и возможна проверка условия, достаточного для минимальности покрытия.

Для системы множеств $\langle X, Y\rangle$ мощность максимального независимого множества, которое содержится в подмножестве $A \subset X$, обозначим через $m(A, X, Y)$.

В случае нескольких связных компонент, образующих семейство $\mathcal{A}$, любое максимальное независимое множество есть объединение максимальных независимых множеств для компонент связности:

$$m(X,Y) = \sum_{A\in\mathcal{A}} m(A,X,Y), \quad \text{где } m(A,X,Y) = m(A, Y\cap 2^A).$$

Для некоторых задач о покрытии легко привести примеры системных множеств, когда выполняется $l(X, Y) > m(X, Y)$, т. е. нижние границы (1) и (2) оказываются недостижимыми и не могут быть использованы для обоснования минимальности покрытия.

Например, это имеет место в задаче рёберного покрытия вершин графа $Z = \langle X, Y, l\rangle$, в которой система множеств $\langle X, Y\rangle$ соответствует графу с множеством вершин $X = \{x_i, i = 1, \ldots, n\}$. При этом

1) если граф является циклом нечётной длины, т. е. множество рёбер равно

$$Y = \{\{x_j, x_{j+1}\},\ j = 1,\ldots,n-1\} \cup \{x_n, x_1\}$$

и $n = 2s + 1$, то $l(X, Y) = s + 1 > s = m(X, Y)$;

2) если граф является полным графом, т. е. множество рёбер равно

$$Y = \{y = \{x_i, x_j\},\ x_i, x_j \in X,\ i \neq j,\ i, j = 1,\ldots,n\}$$

при $n > 2$, то $l(X, Y) > 1 = m(X, Y)$.

С другой стороны, в задаче минимизации булевых функций такие примеры невозможны при трёх переменных. При отсутствии достаточных условий минимальности построение или поиск булевых функций четырёх и более переменных, для которых мощность максимального независимого множества единичных вершин меньше длины кратчайшего покрытия гранями единичных вершин функции, приводит к необходимости перебора функций, комплексов граней и подмножеств вершин для нахождения кратчайшего покрытия и максимального независимого множества вершин соответственно. Трудоёмкость перебора оказывается значительной и требует разработки обоснованных подходов сокращения множества просматриваемых объектов, которые могут удовлетворять определённым свойствам.

Поэтому если выполняется $l(X, Y) > m(X, Y)$ для системы множеств $\langle X, Y\rangle$, то возникает вопрос о возможности получить нижнюю оценку $l(X, Y)$, которая больше $m(X, Y)$. Такая оценка позволила бы определить новые достаточные условия минимальности для задачи о покрытии.

1. Описание конструкции

Методы получения нижних оценок длины и сложности минимальных покрытий основаны на обобщении понятия независимого множества элементов.

Для системы множеств $\langle X, Y \rangle$ и непустого семейства множеств $\mathcal{A} = \{A \mid A \subset X\}$ обозначим через $\mathcal{A}_y = \{A \in \mathcal{A} \mid y \cap A \neq \varnothing\}$ множество множеств из семейства $\mathcal{A}$, которые пересекаются с множеством $y \in Y$.

Определение 1. *Независимым семейством множеств* для системы множеств $\langle X, Y \rangle$ называется непустое семейство $\mathcal{A} = \{A \mid A \subset X\}$, если любое множество $y \in Y$ пересекается не более чем с одним множеством $A \in \mathcal{A}$, т. е. $\max\limits_{y \in Y} |\mathcal{A}_y| \leqslant 1$.

Отметим, что множества из независимого семейства $\mathcal{A}$ не могут пересекаться, так как общий элемент пересекающихся множеств должен содержаться в некотором множестве $y \in Y$ при $X_Y = X$, т. е. $|\mathcal{A}_y| > 1$. Независимое множество элементов является частным случаем семейства независимых множеств, в котором каждое множество состоит из одного элемента.

Примерами независимых семейств для системы множеств $\langle X, Y \rangle$ являются семейство множеств, соответствующих компонентам связности (так как любое множество из семейства Y содержит элементы из одной компоненты связности), а также семейство множеств $\{X_{\mathrm{ker}}, X \setminus X_{Y_{\mathrm{ker}}}\}$, состоящее из множества собственных элементов всех ядровых множеств и множества элементов, которые не содержатся в ядровых множествах.

Лемма 1. *Независимое семейство $\mathcal{A}$ для системы множеств $\langle X, Y \rangle$ содержит все элементы из множества X тогда и только тогда, когда каждое множество совпадает с одной или несколькими компонентами связности множества X.*

Для системы множеств $\langle X, Y \rangle$ и множества $A \subseteq X$ введём следующие обозначения: $Y_A = \{y \in Y \mid y \cap A \neq \varnothing\}$ — семейство множеств, которые пересекаются с множеством A; $\Delta_{X,Y,A} = \max\limits_{y \in Y_A} |y \cap A|$ — максимальное число элементов из множества A, которые содержатся в одном множестве семейства Y; $\Omega_{X,Y,A} = \min\limits_{x \in A} |Y_x| = \min\limits_{x \in A} |\{y \in Y_A \mid x \in y\}|$ — минимальное число множеств, которые содержат некоторый элемент из множества A; $\mathbb{Y}_{A,C} = \{y_i \in Y_A \mid C(y_i) \leqslant C(y_{i+1}),\ i = 1, \ldots, |Y_A| - 1\}$ — упорядоченный по возрастанию сложности набор множеств, которые пересекаются с множеством A; $\mathbb{Y}_{A,C}(l) = \{y_i \in \mathbb{Y}_{A,C},\ i = 1, \ldots, l\}$ — набор из первых l множеств упорядоченного набора множеств $\mathbb{Y}_{A,C}$ при $l = 1, \ldots, |Y_A|$.

Отметим, что $\Delta_{X,Y,A} = 1$ тогда и только тогда, когда множество $A \subset X$ является независимым для системы множеств $\langle X, Y\rangle$.

Целую часть и верхнюю целую часть числа x будем обозначать через $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ соответственно.

Лемма 2. *Если $\mathcal{A}$ является независимым семейством для системы множеств $\langle X, Y\rangle$, то для любого аддитивного функционала сложности C выполняется неравенство $C(X,Y) \geqslant \sum\limits_{A\in\mathcal{A}} \widetilde{C}(A,X,Y)$, где $\widetilde{C}(A,X,Y)$ — сложность минимального покрытия для задачи $\widetilde{Z}_A = \langle A, X, Y, C\rangle$.*

Лемма 3. *Для задачи $\widetilde{Z}_A = \langle A, X, Y, C\rangle$ справедливы следующие оценки длины и сложности:*

$$\tilde{l}(A,X,Y) \geqslant \tilde{l}_{X,Y,A} = \lceil |A|/\Delta_{X,Y,A} \rceil,$$
$$\widetilde{C}(A,X,Y) \geqslant \widetilde{C}_{X,Y,A} = \sum_{y\in\mathbb{Y}_{A,C}(\tilde{l}_{X,Y,A})} C(y),$$

где $\widetilde{C}_{X,Y,A}$ — сложность $\tilde{l}_{X,Y,A}$ множеств из Y, которые пересекаются с множеством A и имеют меньшую сложность.

Лемма 4. *Для системы множеств $\langle X, Y\rangle$ и множества $A \subseteq X$ справедлива оценка мощности независимого множества:*

$$m(A,X,Y) \leqslant \lfloor |Y_A|/\Omega_{X,Y,A} \rfloor.$$

Если $A = X$, то оценки лемм 3 и 4 имеют вид

$$l(X,Y) \geqslant l_{X,Y} = \lceil |X|/\Delta_{X,Y} \rceil, \quad m(X,Y) \leqslant \lfloor |Y|/\Omega_{X,Y} \rfloor,$$
$$C(X,Y) \geqslant C_{X,Y} = \sum_{y\in\mathbb{Y}_{X,C}(l_{X,Y})} C(y),$$

где $\Delta_{X,Y} = \Delta_{X,Y,X} = \max\limits_{y\in Y} |y|$, $\Omega_{X,Y} = \Omega_{X,Y,X} = \min\limits_{x\in X} |Y_x|$ — минимальное число множеств, которым принадлежит некоторый элемент, $C_{X,Y}$ — сложность $l_{X,Y}$ множеств из Y, которые имеют меньшую сложность.

Лемма 5. *Если $\widehat{Y}_{\mathrm{ker}}$ — произвольное непустое подмножество семейства ядровых множеств Y_{ker} для системы множеств $\langle X, Y\rangle$, $X^* = X \setminus X_{\widehat{Y}_{\mathrm{ker}}}$ и $Y^* = (Y \setminus \widehat{Y}_{\mathrm{ker}})_{\cap X^*}$, то*

1) $C(X,Y) = C(\widehat{Y}_{\mathrm{ker}}) + C(X^*, Y^*)$ и любое минимальное покрытие есть объединение минимального покрытия для задачи $\widetilde{Z}(X^*, X, Y \setminus \widehat{Y}_{\mathrm{ker}})$ и ядровых множеств из $\widehat{Y}_{\mathrm{ker}}$;

2) $m(X, Y) = |\widehat{Y}_{\text{ker}}| + m(X^*, Y^*)$ *и максимальным независимым множеством является объединение максимального независимого множества для системы множеств* $\langle X^*, Y^* \rangle$ *и множества, которое содержит по одному собственному элементу для каждого ядрового множества из* $\widehat{Y}_{\text{ker}}$.

Отметим, что в максимальном независимом множестве число собственных элементов ядровых множеств может быть меньше чем $|Y_{\text{ker}}|$. Например, для системы множеств $\langle X, Y \rangle$, в которой $X = \{x_1, \dots, x_6\}$ и $Y = \{\{x_1, x_4\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_6\}, \{x_4, x_5\}, \{x_4, x_6\}\}$, имеем множество ядровых множеств $Y_{\text{ker}} = \{\{x_1, x_4\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_6\}\}$, множество собственных элементов ядровых множеств $X_{\text{ker}} = \{x_1, x_2, x_3\}$, а $X^* = X \setminus X_{Y_{\text{ker}}}$ и Y^* — пустые множества.

В этом случае максимальными независимыми множествами являются $\{x_1, x_2, x_3\}$, которое совпадает с X_{ker}, а также $\{x_1, x_5, x_6\}$ и $\{x_2, x_3, x_4\}$, которые соответственно содержат один и два собственных элемента ядровых множеств.

2. Основные результаты

Если независимое семейство $\mathcal{A}$ для системы множеств $\langle X, Y \rangle$ содержит множества A, для которых либо $|A| = 1$, либо $\Delta_{X,Y,A} = 1$, т. е. которые являются независимыми множествами элементов, то объединение всех таких множеств будет независимым множеством элементов в силу независимости семейства множеств $\mathcal{A}$.

Поэтому произвольное независимое семейство множеств может быть представлено в виде $\{Q\} \cup \mathcal{A}$, где Q — независимое множество элементов, возможно пустое, и в независимом семействе множеств $\mathcal{A}$ нет независимых множеств элементов, т. е. $|A| \geqslant 2$ и $\Delta_{X,Y,A} \geqslant 2$ для любого $A \in \mathcal{A}$. Отметим, что $\mathcal{A} = \varnothing$, если Q является максимальным независимым множеством элементов.

Непосредственно из лемм 2 и 3 вытекают нижние оценки длины кратчайшего и сложности минимального покрытий.

Теорема 1. *Пусть Q — независимое множество элементов для системы множеств $\langle X, Y \rangle$, а в семействе $\mathcal{A} = \{A \mid A \subset X\}$ независимые множества элементов отсутствуют. Если $\{Q\} \cup \mathcal{A}$ является независимым семейством для $\langle X, Y \rangle$, то для аддитивного функционала сложности имеют место оценки*

$$l(X, Y) \geqslant |Q| + \sum_{A \in \mathcal{A}} \lceil |A| / \Delta_{X,Y,A} \rceil, \tag{3}$$

$$C(X,Y) \geqslant \sum_{x\in Q} \widetilde{C}_{X,Y,\{x\}} + \sum_{A\in\mathcal{A}} \widetilde{C}_{X,Y,A}. \qquad (4)$$

Здесь $\widetilde{C}_{X,Y,A} = \sum\limits_{y\in\mathbb{Y}_{A,C}(\tilde{l}_{X,Y,A})} C(y)$, *где* $A \in \mathcal{A}$ *и* $\tilde{l}_{X,Y,A} = \lceil |A|/\Delta_{X,Y,A}\rceil$, $\widetilde{C}_{X,Y,\{x\}} = \min\limits_{y\in Y_x} C(y)$.

Замечание 2. Так как любые различные множества A_i и A_j из независимого семейства $\mathcal{A}$ не могут одновременно пересекаться с одним множеством $y \in Y$, при выполнении $\Delta_{X,Y,A_i} = \Delta_{X,Y,A_j} = \Delta$ также выполняется $|y\cap(A_i\cup A_j)| \leqslant \Delta$ для любого $y \in Y$. Следовательно, $\Delta_{X,Y,A_i\cup A_j} = \Delta$. Однако при объединении двух таких множеств в одно множество независимого семейства $\mathcal{A}$ значения оценок (3) и (4) теоремы 1 могут ухудшиться в случае выполнения неравенства

$$\lceil |A_i|/\Delta\rceil + \lceil |A_j|/\Delta\rceil > \lceil (|A_i| + |A_j|)/\Delta\rceil,$$

если $|A_j| + |A_j|$ кратно Δ, а $|A_i|$ и $|A_j|$ не кратны Δ.

Оценки (3) и (4) теоремы 1 при их достижимости являются достаточными условиями минимальности покрытия и используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2. *Для задачи минимизации всюду определённых булевых функций* $Z_A = \langle N_f, B^n, G^n, \mathcal{L}\rangle$ *относительно аддитивного функционала сложности*

1) *при* $n \leqslant 3$ *для всех функций длина кратчайшего покрытия совпадает с мощностью максимального независимого множества;*

2) *при* $n \geqslant 5$ *существуют функции, для которых длина кратчайшего покрытия больше мощности максимального независимого множества.*

Замечание 3. Для $n = 4$ используемые в теореме 2 доказательства не применимы. При этом трудоёмкость перебора оказывается значительной и требует разработки специальных подходов для его выполнения.

Основанные на семействах независимых множеств достаточные условия минимальности предоставляют возможность для конструктивного построения и изучения сложных для минимизации булевых функций, к которым применимы такие условия. В [5] изучалось множество булевых функций, которые состоят из одной связной компоненты и имеют минимальные покрытия, не являющиеся кратчайшими. Для таких функций недостижимы нижние границы сложности, основанные на понятии независимого множества вершин, и доказательство минимальности покрытий является неконструктивным. Таким образом, возникает вопрос

о подходах, которые возможны для построения семейства независимых множеств и доказательства минимальности покрытия, если не удаётся применить нижние границы, основанные на независимом множестве.

3. Доказательства

Доказательство леммы 1. Так как по условию семейство независимых множеств $\mathcal{A}$ содержит все элементы из множества X, достаточно доказать, что элементы из одной компоненты связности K содержатся в одном множестве $A \in \mathcal{A}$.

Предположим противное, т. е. $x_1, x_2 \in K \subseteq X$, $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ и $A_1 \neq A_2$. Поскольку элементы x_1 и x_2 принадлежат одной компоненте связности K, существуют элементы $x_{j_1}, \ldots, x_{j_s} \in K$ и множества $y_1, \ldots, y_{s+1} \in Y$ такие, что $x_1, x_{j_1} \in y_1$, $x_{j_{i-1}}, x_{j_i} \in y_i$ для $i = 1, \ldots, s$ и $x_{j_s}, x_2 \in y_{s+1}$. В силу принадлежности всех элементов множествам из семейства $\mathcal{A}$ либо $x_{j_i} \in A_1$ для $i = 1, \ldots, s$, либо есть элемент x_{j_i} с минимальным индексом, который не принадлежит множеству A_1, а предшествующие элементы ему принадлежат.

В первом случае $x_{j_s} \in A_1$ и $x_2 \in A_2 \neq A_1$ для $x_{j_s}, x_2 \in y_{s+1}$. Во втором случае либо $x_1 \in A_1$ и $x_{j_1} \in A \neq A_1$ для $x_{j_1}, x_1 \in y_1$, либо $x_{j_{i-1}} \in A_1$ и $x_{j_i} \in A \neq A_1$ для $x_{j_{i-1}}, x_{j_i} \in y_i$ при некотором $2 \leqslant i \leqslant s$. В обоих случаях получаем противоречие независимости множеств в семействе $\mathcal{A}$. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Для системы множеств $\langle X, Y \rangle$ и семейства $\mathcal{A} \subset 2^X$ через $Y^0_{\mathcal{A}}$ обозначим семейство множеств из Y, которые не пересекаются ни с одним множеством семейства $\mathcal{A}$. Для произвольного независимого семейства $\mathcal{A}$ семейство множеств Y однозначно представляется в виде объединения попарно не пересекающихся множеств

$$Y = Y^0_{\mathcal{A}} \cup \bigcup_{A \in \mathcal{A}} Y_A,$$

где Y_A — семейство множеств из Y, которые пересекаются ровно с одним множеством A из независимого семейства множеств $\mathcal{A}$.

Тем самым любое семейство множеств $S \subseteq Y$ однозначно представляется в виде

$$S = S^0_{\mathcal{A}} \cup \bigcup_{A \in \mathcal{A}} S_A,$$

где $S^0_{\mathcal{A}} \subseteq Y^0_{\mathcal{A}}$ и $S_A \subseteq Y_A$ для $A \in \mathcal{A}$. При этом если семейство S является покрытием X, то для каждого $A \in \mathcal{A}$ выполняется $A \subseteq X_{S_A}$, т. е. множество элементов A содержится в семействе S_A и, следовательно, $C(S_A) \geqslant \widetilde{C}(A, X, Y)$.

Тогда в силу аддитивности и неотрицательности функционала сложности C для любого покрытия, в том числе и для минимального покрытия S, сложность которого есть $C(X,Y)$, выполняется

$$C(X,Y) = C(S) = C\Big(S^0_{\mathcal{A}} \cup \bigcup_{A\in\mathcal{A}} S_A\Big)$$
$$= C(S^0_{\mathcal{A}}) + \sum_{A\in\mathcal{A}} C(S_A) \geqslant \sum_{A\in\mathcal{A}} C(S_A) \geqslant \sum_{A\in\mathcal{A}} \widetilde{C}(A,X,Y).$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Для любого семейства множеств $S \subseteq Y_A$ при $|S| < |A|/\Delta_{X,Y,A}$ имеем

$$\sum_{y\in S} |y\cap A| \leqslant |S| \cdot \max_{y\in Y_A} |y\cap A| = |S|\cdot \Delta_{X,Y,A} < |A|$$

и семейство S не может содержать все элементы из множества A. Тогда $|S| \geqslant |A|/\Delta_{X,Y,A}$ для любого семейства S, содержащего множество A, следовательно, $\tilde{l}(A,X,Y) \geqslant \lceil |A|/\Delta_{X,Y,A}\rceil$.

Нижняя оценка $\widetilde{C}(A,X,Y) \geqslant \widetilde{C}_{X,Y,A}$ означает, что любое семейство множеств S, которое содержит все элементы из множества A, не может состоять меньше чем из $\tilde{l}_{X,Y,A}$ множеств и иметь сложность меньше сложности $\tilde{l}_{X,Y,A}$ множеств из Y, которые пересекаются с множеством A и имеют наименьшую сложность. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Для любого множества $Q \subseteq A$ при $|Q| > |Y_A|/\Omega_{X,Y,A}$ справедливо

$$\sum_{x\in Q} |Y_x| \geqslant |Q| \cdot \min_{x\in A} |Y_x| = |Q|\cdot \Omega_{X,Y,A} > |Y_A|$$

и множество Q не может быть независимым, так как не менее двух элементов из множества Q содержится в некотором множестве семейства Y_A. Тогда $|Q| \leqslant |Y_A|/\Omega_{X,Y,A}$ для любого независимого множества $Q \subseteq A$, значит, $m(A,X,Y) \leqslant \lfloor |Y_A|/\Omega_{X,Y,A}\rfloor$. Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. 1) Множество всех собственных элементов ядровых множеств из $\widehat{Y}_{\mathrm{ker}}$ обозначим через $\widehat{X}_{\mathrm{ker}}$. Из леммы 2 вытекает нижняя оценка сложности минимального покрытия

$$C(X,Y) \geqslant \widetilde{C}(\widehat{X}_{\mathrm{ker}}, X, Y) + \widetilde{C}(X\setminus X_{\widehat{Y}_{\mathrm{ker}}}, X, Y\setminus \widehat{Y}_{\mathrm{ker}}),$$

так как множества $\widehat{X}_{\mathrm{ker}}$ и $X\setminus X_{\widehat{Y}_{\mathrm{ker}}}$ образуют независимое семейство для системы множеств $\langle X, Y\rangle$ и $\widehat{Y}_{\mathrm{ker}}$ не содержит элементов из $X\setminus X_{\widehat{Y}_{\mathrm{ker}}}$.

Легко видеть, что $\widetilde{C}(\widehat{X}_{\text{ker}}, X, Y) = C(\widehat{Y}_{\text{ker}})$ и семейство ядровых множеств $\widehat{Y}_{\text{ker}}$ является единственным покрытием множества $\widehat{X}_{\text{ker}}$. При этом элементы из множества $X_{\widehat{Y}_{\text{ker}}} \setminus \widehat{X}_{\text{ker}}$ содержатся в ядровых множествах, т. е. доминируются собственными элементами ядровых множеств $\widehat{Y}_{\text{ker}}$, и

$$X = \widehat{X}_{\text{ker}} \cup (X_{\widehat{Y}_{\text{ker}}} \setminus \widehat{X}_{\text{ker}}) \cup (X \setminus X_{\widehat{Y}_{\text{ker}}}).$$

Тогда любое семейство множеств S, полученное объединением $\widehat{Y}_{\text{ker}}$ с любым минимальным покрытием задачи $\widetilde{Z}(X \setminus X_{\widehat{Y}_{\text{ker}}}, X, Y \setminus \widehat{Y}_{\text{ker}}, C)$, будет покрытием множества X и сложность такого покрытия S совпадает с нижней оценкой $C(X, Y)$. Следовательно, семейство S является минимальным покрытием для системы множеств $\langle X, Y \rangle$.

Если семейство S является минимальным покрытием для системы множеств $\langle X, Y \rangle$, то $\widehat{Y}_{\text{ker}} \subseteq S$, семейство $S_1 = S \setminus \widehat{Y}_{\text{ker}}$ является покрытием множества $X \setminus X_{\widehat{Y}_{\text{ker}}}$ и $C(X, Y) = C(S) = C(\widehat{Y}_{\text{ker}}) + C(S_1)$. Предположение, что семейство S_1 не является минимальным покрытием для задачи $\widetilde{Z}(X \setminus X_{\widehat{Y}_{\text{ker}}}, X, Y \setminus \widehat{Y}_{\text{ker}}, C)$, означает существование покрытия S_2 меньшей сложности. Тогда семейство $\widehat{Y}_{\text{ker}} \cup S_2$ будет покрытием для системы множеств $\langle X, Y \rangle$ и

$$C(\widehat{Y}_{\text{ker}} \cup S_2) = C(\widehat{Y}_{\text{ker}}) + C(S_2) < C(\widehat{Y}_{\text{ker}}) + C(S_1) = C(S),$$

что противоречит допущению о минимальной сложности покрытия S.

2) Пусть Q — максимальное независимое множество. Если существует элемент $x \in Q$, который содержится в некотором ядровом множестве $y \in \widehat{Y}_{\text{ker}}$ и не является собственным для этого ядрового множества, т. е. $x \in X_{\{y\}} \setminus X_y^{\text{ker}}$, то любой собственный элемент из X_y^{ker} не принадлежит множеству Q. Поэтому при замене элемента x произвольным собственным элементом из X_y^{ker} множество Q останется максимальным независимым.

Если ни один элемент некоторого ядрового множества $y \in \widehat{Y}_{\text{ker}}$ не принадлежит Q, то независимое множество не может быть максимальным, так как при включении в множество Q одного произвольного собственного элемента из X_y^{ker} множество останется независимым.

Таким образом получаем, что произвольное максимальное независимое множество Q может быть преобразовано в максимальное независимое множество Q_1, которое представляется в виде $Q_1 = Q_{\text{ker}} \cup Q_2$, где $Q_{\text{ker}} \subseteq \widehat{X}_{\text{ker}}$ является независимым множеством и содержит по одному собственному элементу для каждого ядрового множества из $\widehat{Y}_{\text{ker}}$, а $Q_2 \subseteq X^* = X \setminus X_{\widehat{Y}_{\text{ker}}}$ является независимым множеством и не содержит элементов из ядровых множеств.

Если Q_2 не является максимальным независимым множеством для системы $\langle X^*, Y^* \rangle$, то при замене на максимальное независимое множество Q_3 получим множество $Q_{\text{ker}} \cup Q_3$, которое, в силу независимости семейства $\{\widehat{X}_{\text{ker}}, X \setminus X_{\widehat{Y}_{\text{ker}}}\}$, является независимым для системы множеств $\langle X, Y \rangle$ и имеет бóльшую мощность, чем множество Q. Это противоречит максимальности независимого множества Q. Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 2. В единичном кубе B^n для любой функции $f \not\equiv 1$ максимальные грани размерности 0 и $n-1$ являются ядровыми для множества N_f. При этом 0-мерные максимальные грани являются одноэлементными компонентами связности и после их удаления соотношение между длиной кратчайшего покрытия и мощностью максимального независимого множества для оставшейся части не изменяется. Если $f \equiv 1$, то единственная максимальная грань совпадает с единичным кубом B^n и является ядровой.

1) В единичном кубе B^2 все максимальные грани функции могут иметь размерность 0 или 1 и являются ядровыми. По лемме 5 длина кратчайшего покрытия и мощность максимального независимого множества равны числу ядровых граней.

В единичном кубе B^3 рассмотрим два случая в зависимости от наличия максимальной грани размерности 2 для множества N_f.

Если есть максимальная грань размерности 2, то такая грань является ядровой. По лемме 5 задача сводится к системе множеств $\langle X^*, Y^* \rangle$ в единичном кубе B^2, для которого длина кратчайшего покрытия и мощность максимального независимого множества равны.

Если все максимальные грани имеют размерность 0 или 1, то связная компонента либо состоит из одномерных максимальных граней, либо является изолированной вершиной, которая не влияет на соотношение между длиной кратчайшего покрытия и мощностью максимального независимого множества.

Связная компонента, которая состоит из одномерных максимальных граней, либо является циклом из 6 граней, либо не содержит циклов. В силу лемм 3–5 в обоих случаях получим равенство длины кратчайшего покрытия и мощности максимального независимого множества.

2) В единичном кубе B^n при $n \geqslant 5$ определим функцию f, для которой множество N_f содержит ядровые грани и максимальные грани, образующие цикл нечётной длины:

$$N_f = \{\widetilde{\alpha}^0, \widetilde{\beta}^{n-1}, \widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}^1, \widetilde{\delta}^2\} \cup \{\widetilde{\alpha}^i\}_{i=1}^{n-2} \cup \{\widetilde{\beta}^i\}_{i=1}^{n-2},$$

где $\widetilde{\alpha}^0 = (0, \ldots, 0, 0)$ и $\widetilde{\beta}^{n-1} = (1, \ldots, 1, 0)$ — минимальная и максимальная вершины грани $B_n^{n,0}$; $\widetilde{\gamma} = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$ — вершина из 1-го слоя грани $B_n^{n,0}$; $\widetilde{\delta}^1 = (1, 0, \ldots, 0, 1)$ и $\widetilde{\delta}^2 = (0, 1, \ldots, 0, 1)$ — две вершины из 1-го слоя грани $B_n^{n,1}$; $\widetilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{n-1}^i, 0)$ — вершина из i-го слоя грани $B_n^{n,0}$ для $i = 1, \ldots, n-2$, где $\alpha_s^i = 1$ при $s = 1, \ldots, i$ и $\alpha_s^i = 0$ при $s = i+1, \ldots, n-1$; $\widetilde{\beta}^i = (\beta_1^i, \ldots, \beta_{n-1}^i, 0)$ — вершина из i-го слоя грани $B_n^{n,0}$ для $i = 1, \ldots, n-2$, где $\beta_s^i = 1$ при $s = n-i, \ldots, n-1$ и $\beta_s^i = 0$ при $s = 1, \ldots, n-1-i$.

Максимальными гранями функции f являются грань $\{\widetilde{\alpha}^0, \widetilde{\alpha}^1, \widetilde{\alpha}^2, \widetilde{\gamma}\}$ размерности 2, одномерные ядровые грани $\{\widetilde{\alpha}^1, \widetilde{\delta}^1\}$ и $\{\widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}^2\}$ с собственными вершинами $\widetilde{\delta}^1$ и $\widetilde{\delta}^2$ соответственно, одномерные грани $\{\widetilde{\alpha}^i, \widetilde{\alpha}^{i+1}\}$ для $i = 2, \ldots, n-3$ и $\{\widetilde{\alpha}^{n-2}, \widetilde{\beta}^{n-1}\}$, а также одномерные грани $\{\widetilde{\beta}^i, \widetilde{\beta}^{i+1}\}$ для $i = 1, \ldots, n-2$ и $\{\widetilde{\alpha}^0, \widetilde{\beta}^1\}$.

Два множества вершин $A = N_f \setminus \{\widetilde{\alpha}^1, \widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}^1, \widetilde{\delta}^2\}$ и $Q = \{\widetilde{\delta}^1, \widetilde{\delta}^2\}$ образуют семейство независимых множеств, при этом Q является независимым множеством элементов. Максимальное число вершин из множества A, которые содержатся в максимальной грани функции, и минимальное число граней, которые содержат вершину из множества A, т. е. характеристики $\Delta_{X,Y,A}$ и $\Omega_{X,Y,A}$, равны 2. Тогда для мощности максимального независимого множества $m(f)$, длины кратчайшего покрытия $l(f)$ и сложности минимального покрытия $L(f)$ из леммы 5 и теоремы 1 следует, что выполняются неравенства

$$m(f) \leqslant |Q| + \lfloor |A|/2 \rfloor = 2 + \lfloor (2n-3)/2 \rfloor = n,$$
$$l(f) \geqslant |Q| + \lceil |A|/2 \rceil = 2 + \lceil (2n-3)/2 \rceil = n+1,$$
$$L(f) \geqslant |Q|(n-1) + (\lceil |A|/2 \rceil - 1)(n-1) + n - 2 = n^2 - 2,$$

где в нижнюю оценку $L(f)$ входит сложность одной грани размерности 2. Стандартная задача о покрытии для множества A соответствует задаче о рёберном покрытии графа, который является циклом длины $2n-3$. При этом одно множество имеет сложность $n-2$ и соответствует грани размерности 2, а остальные имеют сложность $n-1$ и соответствуют граням размерности 1. Очевидно, что верхняя оценка $m(f)$ достигается для независимого множества из n вершин, включая две собственные вершины ядровых граней. Соответственно нижние оценки $l(f)$ и $L(f)$ достигаются для покрытия, которое содержит $n+1$ граней, включая две ядровые грани, а в минимальное покрытие обязательно входит грань размерности 2. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Еремеев А. В., Заозерская Л. А., Колоколов А. А.** Задача о покрытии: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2000. Сер. 2. Т. 7, № 2. С. 22–46.
2. **Забиняко Г. И.** Реализация алгоритмов решения задачи о покрытии множеств и анализ их эффективности // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 6. С. 50–58.
3. **Леонтьев В. К.** Дискретная оптимизация // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 2. С. 338–352.
4. **Чухров И. П.** О мерах сложности комплексов граней в единичном кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 6. С. 77–94.
5. **Чухров И. П.** О задаче минимизации для одного множества булевых функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 3. С. 75–97.
6. **Al-Shihabi S., Arafeh M., Barghash M.** An improved hybrid algorithm for the set covering problem // Comput. Ind. Eng. 2015. Vol. 85. P. 328–334.
7. **Coudert O.** On solving covering problems // Proc. 33rd Design Automation Conf. (Las Vegas, NV, June 3–7, 1996). New York: ACM, 1996. P. 197–202.
8. **Coudert O., Sasao T.** Two-level logic minimization // Logic synthesis and verification. Norwell, MA: Kluwer Acad. Publ., 2002. P. 1–27. (Springer Int. Ser. Eng. Comp. Sci.; Vol. 654).
9. **Gao C., Yao X., Weise T., Li J.** An efficient local search heuristic with row weighting for the unicost set covering problem // Eur. J. Oper. Res. 2015. Vol. 246, No. 3. P. 750–761.
10. **Sapkota N., Reilly C. H.** Simulating realistic set covering problems with known optimal solutions // Comput. Ind. Eng. 2011. Vol. 61, No. 1. P. 39–47.
11. **Vasko F. J., Lu Y., Zyma K.** What is the best greedy-like heuristic for the weighted set covering problem? // Oper. Res. Lett. 2016. Vol. 44, No. 3. P. 366–369.

Чухров Игорь Петрович

Статья поступила
27 апреля 2016 г.

Исправленный вариант —
17 ноября 2016 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2017. Volume 24, No. 2. P. 87–106

UDC 519.157.1 DOI: 10.17377/daio.2017.24.540

PROOF OF COVERING MINIMALITY BY GENERALIZING THE NOTION OF INDEPENDENCE

I. P. Chukhrov
Institute of Computer Aided Design RAS,
19/18 Vtoraya Brestskaya St., 123056 Moscow, Russia
E-mail: chip@icad.org.ru

Abstract. A method is proposed for obtaining lower bounds for the length of the shortest cover and complexity of the minimal cover based on the notion of independent family of sets. For the problem of minimization of Boolean functions, we provide the functions and construct coverings by faces of the set of unit vertices for which the suggested lower bounds can be achieved in the case of five or more variables. The lower bounds, based on independent sets, are unreachable and cannot be used as sufficient conditions for minimality of such functions. Bibliogr. 11.

Keywords: set covering problem, complexity, shortest cover, minimum cover, independent set, lower bound, condition of minimality.

REFERENCES

1. **A. V. Eremeev, L. A. Zaozerskaya,** and **A. A. Kolokolov,** The set covering problem: Complexity, algorithms, and experimental investigations, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **7**, No. 2, 22–46, 2000 [Russian].
2. **G. I. Zabinyako,** Implementation of algorithms for solution to the set covering problem and analysis of their efficiency, *Vychisl. Technol.,* **12**, No. 6. 50–58, 2007 [Russian]. Translated in *Comput. Technol.,* **12**, No. 6. 50–58, 2007.
3. **V. K. Leont'ev,** Discrete optimization, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **47**, No. 2, 338–352, 2007 [Russian]. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.,* **47**, No. 2, 328–340, 2007.
4. **I. P. Chukhrov,** On complexity measures of complexes of faces in the unit cube, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **20**, No. 6, 77–94, 2013 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **8**, No. 1, 9–19, 2014.
5. **I. P. Chukhrov,** On a minimization problem for a set of boolean functions, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **22**, No. 3, 75–97, 2015 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **9**, No. 3, 335–350, 2015.

6. **S. Al-Shihabi, M. Arafeh,** and **M. Barghash,** An improved hybrid algorithm for the set covering problem. *Comput. Ind. Eng.,* **85**, 328–334, 2015.
7. **O. Coudert,** On solving covering problems, in *Proc. 33rd Design Automation Conf., Las Vegas, NV, USA, June 3–7, 1996,* pp. 197–202, ACM, New York, 1996.
8. **O. Coudert** and **T. Sasao,** Two-level logic minimization, in S. Hassoun and T. Sasao, eds., *Logic Synthesis and Verification,* pp. 1–27, Kluwer Acad. Publ., Netherlands, 2002 (Springer Int. Ser. Eng. Comput. Sci., Vol. 654).
9. **C. Gao, X. Yao, T. Weise,** and **J. Li,** An efficient local search heuristic with row weighting for the unicost set covering problem, *Eur. J. Oper. Res.,* **246**, No. 3, 750–761, 2015.
10. **N. Sapkota** and **C. H. Reilly,** Simulating realistic set covering problems with known optimal solutions. *Comput. Ind. Eng.,* **61**, No. 1, 39–47, 2011.
11. **F. J. Vasko, Y. Lu,** and **K. Zyma,** What is the best greedy-like heuristic for the weighted set covering problem?, *Oper. Res. Lett.,* **44**, No. 3, 366–369, 2016.

Igor P. Chukhrov

Received
27 April 2016
Revised
17 November 2016