ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2017. Том 24, № 2. С. 18–31

УДК 519.175.3 DOI: 10.17377/daio.2017.24.544

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ВНЕШНЕПЛАНАРНЫХ БИЦИКЛИЧЕСКИХ И ТРИЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

В. А. Воблый[a], *А. К. Мелешко*[b]

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, 105005 Москва, Россия
E-mail: [a]vitvobl@yandex.ru, [b]akmeleshko@gmail.com

Аннотация. Класс внешнепланарных графов используется для тестирования средней сложности алгоритмов на графах. Случайный помеченный внешнепланарный граф может быть сгенерирован полиномиальным алгоритмом, базирующимся на результатах перечисления таких графов. Под бициклическим (трициклическим) графом понимается связный граф с цикломатическим числом равным 2 (соответственно 3). Для чисел помеченных связных внешнепланарных бициклических и трициклических графов с n вершинами получены явные формулы, а также асимптотика для чисел этих графов при большом n. Кроме того, найдены явные формулы для числа помеченных внешнепланарных бициклических и трициклических n-вершинных блоков и выведена соответствующая асимптотика при большом n. Табл. 1, ил. 4, библиогр. 15.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, внешнепланарный граф, бициклический граф, трициклический граф, асимптотика.

Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Точкой сочленения связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей рёбрами граф становится несвязным. *Блок* — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения. *Цикломатическим числом* связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом рёбер графа и числом его вершин. Под *бициклическим* (*трициклическим*) графом понимается связный граф с цикломатическим числом, равным 2 (соответственно 3). *Планарный* граф — это граф, который можно уложить на плоскости без пересечения рёбер. *Внешнепланарным* графом называется планарный граф,

если его можно уложить на плоскости так, что все его вершины принадлежат одной грани [7, с. 127, 131]. *Гладкий* граф — это связный граф без висячих вершин [15].

Включением вершины степени 2 *в ребро* (*петлю*) графа называется его (её) подразбиение этой вершиной. Обратная операция называется *исключением вершины степени* 2 *из ребра.* В результате применения этой операции в графе могут появиться кратные рёбра или петля. Два графа называются *гомеоморфными,* если они могут быть получены друг из друга с помощью последовательности операций включения и исключения вершин степени 2. Отношение «быть гомеоморфными» является отношением эквивалентности, оно однозначно разбивает множество рассматриваемых графов на классы эквивалентности. Эти классы называются *гомеоморфными типами* (*топологическими графами*). Гомеоморфный тип — это общий граф (допускаются петли и кратные рёбра), не содержащий вершин степени 2, из которого с помощью операций включения вершин степени 2 могут быть получены все графы данного класса гомеоморфных графов [4, 6, 11].

Класс внешнепланарных графов применяется для тестирования средней сложности алгоритмов на графах. Случайный помеченный внешнепланарный граф может быть сгенерирован полиномиальным алгоритмом, базирующимся на результатах перечисления таких графов [9]. Помеченные внешнепланарные графы с большим числом вершин перечислены асимптотически в [10]. В [2] выведена явная формула для числа помеченных внешнепланарных графов с заданным числом вершин и уточнена асимптотика для большого числа вершин из [10]. В данной работе получены точные и асимптотические формулы для числа помеченных связных внешнепланарных бициклических и трициклических графов с заданным числом вершин.

Пусть G — *базисный граф*, т. е. связный гладкий граф, полученный из гомеоморфного типа H включением двух вершин степени 2 в каждую петлю, а также максимум по одной вершине степени 2 в каждое кратное ребро так, чтобы получился простой граф. Назовём *специальными вершинами* вершины степени больше 2 в G и *специальными цепями* — простые цепи, у которых концевые вершины являются специальными вершинами, а все внутренние вершины, если они есть, имеют степень 2.

Лемма 1 [14]**.** *Пусть a — число специальных цепей в базисном графе G, полученных из петли (α-цепей), b — число специальных цепей, состоящих из одного ребра, при условии, что две специальные вершины соединены только одной специальной цепью (β-цепей), c — число спе-*

циальных цепей, имеющих внутреннюю вершину степени 2 (γ-цепей). Пусть, кроме того, r — число специальных вершин в G , а g — его число симметрии, т. е. порядок вершинной группы автоморфизмов. Тогда число помеченных графов с n вершинами, гомеоморфных графу G, равно

$$C_n = \frac{n!}{g}\binom{n-r-a+b-1}{a+b+c-1}.$$

Лемма 2 [6]**.** *Пусть гомеоморфный тип H — связный гладкий общий граф, отличный от изолированной вершины или петли, который имеет a вершин, b рёбер (включая петли), b_0 петель, b_i пучков рёбер кратности i, и пусть $A(H)$ — порядок вершинно-рёберной группы автоморфизмов графа H* [8, с. 131]. *Тогда число помеченных графов с n вершинами и гомеоморфным типом H равно*

$$C_n = \frac{n!}{2^{b_0}A(H)}\operatorname{Coef}_{x^{n-a}} \frac{x^{b+b_0-\sum\limits_{i=1}^{b} b_i} \prod\limits_{i=1}^{b}(x+i(1-x))^{b_i}}{(1-x)^b}.$$

Лемма 3. *Число $OB(n,2)$ помеченных внешнепланарных бициклических блоков с n вершинами при $n \geqslant 4$ равно*

$$OB(n,2) = \frac{n!(n-3)}{4}.$$

Доказательство. Все гомеоморфные типы и базисные графы бициклических гладких графов изображены на рис. 1 и 2 соответственно [14].

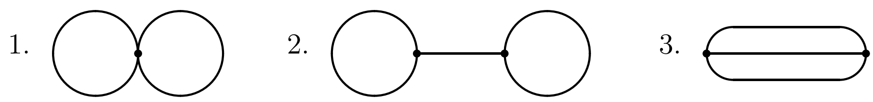

Рис. 1

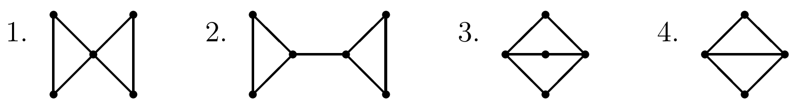

Рис. 2

Только последний гомеоморфный тип является блоком, причём ему соответствует два базисных графа — 3 и 4. Но базисный граф 3 не является внешнепланарным графом. В силу леммы 1 для графа 4 имеем $r = 2$, $g = 4$, $a = b = 0$, $c = 2$, $C_n = \frac{n!}{4}\binom{n-3}{1}$. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 непосредственно вытекает

Следствие 1. *При $n \to \infty$ верно асимптотическое равенство*

$$OB(n,2) \sim \frac{n}{4} n!.$$

Теорема 1. *Число $OP(n,2)$ помеченных связных внешнепланарных бициклических графов с n вершинами при $n \geqslant 4$ равно*

$$OP(n,2) = \frac{(n-1)!}{16} \sum_{k=4}^{n} \frac{k^2(k-3)}{(n-k)!} n^{n-k}.$$

Доказательство. Пусть A_n — число связных графов с n помеченными вершинами, не являющихся деревьями, V_n — число гладких связных графов с n помеченными вершинами. Введём производящие функции $V(z) = \sum\limits_{n=3}^{\infty} V_n \frac{z^n}{n!}$ и $A(z) = \sum\limits_{n=3}^{\infty} A_n \frac{z^n}{n!}$. Рид вывел [9] формулы

$$V(z) = A(ze^{-z}), \quad A(z) = V(T(z)), \tag{1}$$

где $T(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} z^n$ — древесная функция, удовлетворяющая уравнению $T(z)\exp(-T(z)) = z$. В [1] из первой формулы Рида получено соотношение

$$A_n = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} k n^{n-k-1} V_k. \tag{2}$$

Перечислим первый и второй гомеоморфные типы графов, которым соответствуют базисные графы 1 и 2. В силу леммы 1 для графа 1 имеем $r = 1$, $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$, $g = 8$, $C_{1,n} = \frac{n!}{8}\binom{n-4}{1} = \frac{n!}{8}(n-4)$.

Аналогично для графа 2 получим $r = 2$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$, $g = 8$, $C_{2,n} = \frac{n!}{8}\binom{n-4}{2} = \frac{n!}{16}(n-4)(n-5)$.

Сложив числа графов $C_{1,n}$ и $C_{2,n}$ с числом $OB(n,2)$ помеченных внешнепланарных бициклических блоков, найдём число V_n помеченных гладких внешнепланарных бициклических графов:

$$\begin{aligned} V_n &= C_{1,n} + C_{2,n} + OB(n,2) \\ &= \frac{n!}{8}(n-4) + \frac{n!}{16}(n-4)(n-5) + \frac{n!}{4}(n-3) = \frac{n!}{16} n(n-3). \end{aligned}$$

Так как в нашем случае $OP(n,2) = A_n$, в силу (2) получим требуемое. Теорема 1 доказана.

Лемма 4. *Число $OB(n,3)$ помеченных внешнепланарных трициклических блоков с n вершинами при $n \geqslant 5$ равно*

$$OB(n,3) = \frac{n!(n-3)(n-4)(n+1)}{24}.$$

Доказательство. Все гомеоморфные типы трициклических гладких графов изображены на рис. 3 [4].

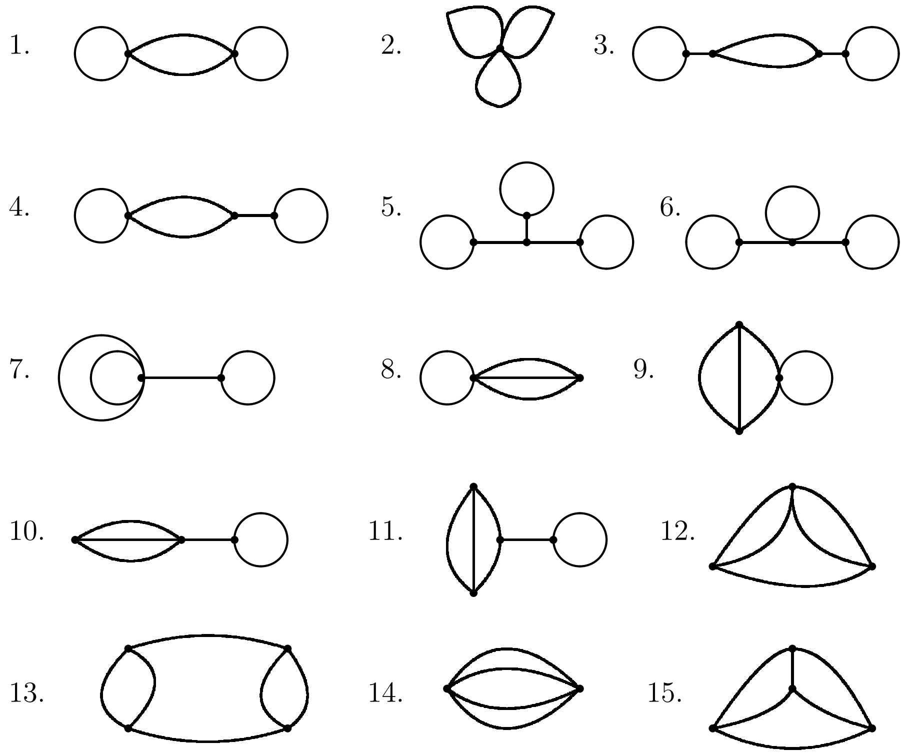

Рис. 3

Из них только типы 12–15 являются блоками, причём блоки типов 14 и 15 не являются внешнепланарными графами. На рис. 4 изображены базисные графы Райта для гомеоморфных типов 8–13. Гомеоморфным типам 12 и 13 соответствуют базисные графы 9–14, из которых только типы 9 и 12 — внешнепланарные графы.

В силу леммы 1 для блока типа 12 (базисный граф 9) имеем $r = 3$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $g = 2$, $\widetilde{C}_{1,n} = \frac{n!}{2}\binom{n-3}{2} = \frac{n!}{4}(n-3)(n-4)$.

Также для блока типа 13 (базисный граф 12) получим $r = 4$, $a = 0$, $b = 2$, $c = 2$, $g = 4$, $\widetilde{C}_{2,n} = \frac{n!}{4}\binom{n-3}{3} = \frac{n!}{24}(n-3)(n-4)(n-5)$.

Сложив числа графов $\widetilde{C}_{1,n}$ и $\widetilde{C}_{2,n}$, получим требуемое. Теорема 1 доказана.

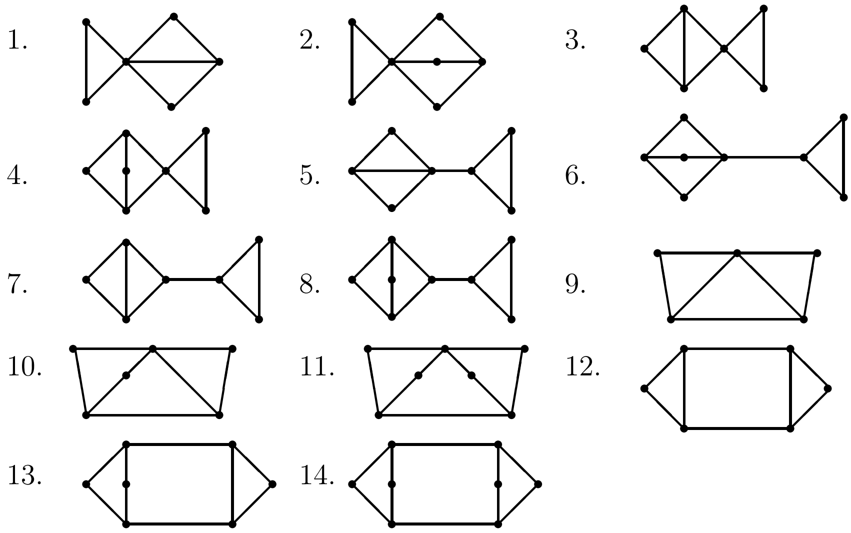

Рис. 4

Из леммы 4 непосредственно вытекает

Следствие 2. *При $n \to \infty$ верно асимптотическое равенство*

$$OB(n,3) \sim \frac{n^3}{24} n!.$$

Теорема 2. *Число $OP(n,3)$ помеченных связных внешнепланарных трициклических графов с n вершинами при $n \geqslant 5$ равно*

$$OP(n,3) = \frac{(n-1)!}{5760} \sum_{k=5}^{n} \frac{k(k-3)(k-4)(4k^3+23k^2+103k-150)}{(n-k)!} n^{n-k}.$$

Доказательство. Используя лемму 2, перечислим 1 и 3–7 гомеоморфные типы графов, изображённые на рис. 3. Тогда в силу леммы 2 и известного ряда [5, с. 141]

$$(1-z)^{-p} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p-1}{p-1} z^k$$

для типа 1 имеем $a = 2$, $b = 4$, $b_0 = 2$, $b_2 = 1$, $b_1 = b_3 = b_4 = 0$, $A(H) = 4$,

$$\begin{aligned} C_{1,n} = \frac{n!}{16} \operatorname{Coef}_{x^{n-2}} \frac{x^5(x + 2(1-x))}{(1-x)^4} \\ = \frac{n!}{16} \operatorname{Coef}_{x^{n-2}} \left(\frac{x^6}{(1-x)^4} + 2\frac{x^5}{(1-x)^3} \right) \\ = \frac{n!}{16} \operatorname{Coef}_{x^{n-2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+6} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{k+5} \right) \\ = \frac{n!}{16} \left(\binom{n-5}{3} + 2\binom{n-5}{2} \right) = \frac{n!}{16}(n-5)(n-6)(n-1); \end{aligned}$$

для типа 3: $a = 4$, $b = 6$, $b_0 = 2$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0$, $A(H) = 4$,

$$\begin{aligned} C_{3,n} = \frac{n!}{16} \operatorname{Coef}_{x^{n-4}} \frac{x^5(x + 2(1-x))}{(1-x)^6} \\ = \frac{n!}{16} \operatorname{Coef}_{x^{n-4}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5}{5} x^{k+6} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^{k+5} \right) \\ = \frac{n!}{16} \left(\binom{n-5}{5} + 2\binom{n-5}{4} \right) \\ = \frac{n!}{1920}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n+1); \end{aligned}$$

для типа 4: $a = 3$, $b = 5$, $b_0 = 2$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = b_4 = b_5 = 0$, $A(H) = 2$,

$$\begin{aligned} C_{4,n} = \frac{n!}{8} \operatorname{Coef}_{x^{n-3}} \frac{x^5(x + 2(1-x))}{(1-x)^5} \\ = \frac{n!}{8} \operatorname{Coef}_{x^{n-3}} \left(\frac{x^6}{(1-x)^5} + 2\frac{x^5}{(1-x)^4} \right) \\ = \frac{n!}{8} \operatorname{Coef}_{x^{n-3}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^{k+6} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+5} \right) \\ = \frac{n!}{8} \left(\binom{n-5}{4} + 2\binom{n-5}{3} \right) = \frac{n!}{192} n(n-5)(n-6)(n-7); \end{aligned}$$

для типа 5: $a = 4$, $b = 6$, $b_0 = 3$, $b_1 = 3$, $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0$, $A(H) = 6$,

$$C_{5,n} = \frac{n!}{48}\operatorname{Coef}_{x^{n-4}}\frac{x^6}{(1-x)^6} = \frac{n!}{48}\operatorname{Coef}_{x^{n-4}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+5}{5}x^{k+6}$$
$$= \frac{n!}{48}\binom{n-5}{5} = \frac{n!}{5760}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9);$$

для типа 6: $a = 3$, $b = 5$, $b_0 = 3$, $b_1 = 2$, $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$, $A(H) = 2$,

$$C_{6,n} = \frac{n!}{16}\operatorname{Coef}_{x^{n-3}}\frac{x^6}{(1-x)^5} = \frac{n!}{16}\operatorname{Coef}_{x^{n-3}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+4}{4}x^{k+6}$$
$$= \frac{n!}{16}\operatorname{Coef}_{x^{n-3}}\binom{n-5}{4} = \frac{n!}{384}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8);$$

для типа 7: $a = 2$, $b = 4$, $b_0 = 3$, $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = b_4 = 0$, $A(H) = 2$,

$$C_{7,n} = \frac{n!}{16}\operatorname{Coef}_{x^{n-2}}\frac{x^6}{(1-x)^4} = \frac{n!}{16}\operatorname{Coef}_{x^{n-2}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^{k+6}$$
$$= \frac{n!}{16}\binom{n-5}{3} = \frac{n!}{96}(n-5)(n-6)(n-7).$$

Гомеоморфный тип 2 (см. рис. 3) является графом розы с тремя лепестками. В [3] получена формула

$$R_{n,k} = \frac{n!}{k!2^k}\binom{n-k-2}{k-1},$$

где k — количество лепестков. Тогда

$$R_{n,3} = \frac{n!}{48}\binom{n-5}{2} = \frac{n!}{96}(n-5)(n-6).$$

Гомеоморфным типам графов 8–11 на рис. 3 соответствуют базисные графы 1–8 на рис. 4, из которых только типы 1, 3, 5, 7 — внешнепланарные графы. Поэтому в силу леммы 1 имеем
для типа 8: $r = 2$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, $g = 4$,

$$C_{8,n} = \frac{n!}{4}\binom{n-4}{2} = \frac{n!}{8}(n-4)(n-5);$$

для типа 9: $r = 3$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, $g = 4$,

$$C_{9,n} = \frac{n!}{4}\binom{n-3}{3} = \frac{n!}{24}(n-3)(n-4)(n-5);$$

для типа 10: $r = 3$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $g = 4$,

$$C_{10,n} = \frac{n!}{4}\binom{n-4}{3} = \frac{n!}{24}(n-4)(n-5)(n-6);$$

для типа 11: $r = 4$, $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $g = 4$,

$$C_{11,n} = \frac{n!}{4}\binom{n-3}{4} = \frac{n!}{96}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6).$$

Остаётся сложить числа графов типов 1–13:

$$\begin{aligned} V_n = C_{1,n} + R_{n,3} + C_{3,n} + C_{4,n} + C_{5,n} + C_{6,n} + C_{7,n} \\ + C_{8,n} + C_{9,n} + C_{10,n} + C_{11,n} + OB(n,3) \\ = \frac{n!}{5760}(n-3)(n-4)(4n^3 + 23n^2 + 103n - 150) \end{aligned}$$

и подставить в (2). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *При $n \to \infty$ верны асимптотические равенства*

$$OP(n,2) \sim \frac{n^{n+1}}{8}, \quad OP(n,3) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{192} n^{n+5/2}.$$

Доказательство. Из формул Рида (1) имеем $A(z) = V(T(z))$, где

$$A_n = OP(n,2), \quad V(z) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n(n-3)}{16} z^n = \frac{z^4(2-z)}{8(1-z)^3}.$$

Здесь суммирование степенного ряда выполнено с помощью известных степенных рядов [5, с. 696].

Раскладывая $V(z)$ в ряд Лорана по степеням $1-z$, получим

$$\begin{aligned} A(z) = \frac{1}{8(1-T(z))^3} + \frac{3}{8(1-T(z))^2} + \frac{1}{4(1-T(z))} \\ + \frac{1}{4} - \frac{3(1-T(z))}{8} + \frac{(1-T(z))^2}{8}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\frac{1}{(1-T(z))^y} = \sum_{n=0}^{\infty} t_n(y)\frac{z^n}{n!},$$

где $t_n(y)$ — древесный полином степени n. Тогда

$$OP(n,2) = \frac{1}{8}t_n(3) + \frac{3}{8}t_n(2) + \frac{1}{4}t_n(1) + \frac{1}{4}t_n(0) - \frac{3}{8}t_n(-1) + \frac{1}{8}t_n(-2).$$

В [11] при $n \to \infty$ и $y > -1$ выведено асимптотическое равенство

$$t_n(y) = \frac{\sqrt{2\pi}n^{n-1/2+y/2}}{2^{y/2}\Gamma(y/2)} + O(n^{n-1+y/2}).$$

Очевидно, что $t_n(0) = 0$ и $t_n(-1) = -n^{n-1}$ при $n > 0$. Райт доказал [14], что $2(T(z) - W_{-1}(z)) = T^2(z)$, где $W_{-1}(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{n!}z^n$. Следовательно, $(1-T(z))^2 = 1 - 2W_{-1}(z)$ и $t_n(-2) = -2n^{n-2}$ при $n > 0$, поэтому

$$OP(n,2) \sim \frac{1}{8}t_n(3) \sim \frac{1}{8}\frac{\sqrt{2\pi}n^{n+1}}{2^{3/2}\Gamma(3/2)} = \frac{n^{n+1}}{8}.$$

Аналогично для трициклических графов имеем

$$V(z) = \frac{1}{5760}\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)(n-4)(4n^3+23n^2+103n-150)z^n$$
$$= -\frac{z^5(3z^3-19z^2+36z-24)}{48(1-z)^6}.$$

Здесь суммирование степенного ряда выполнено с помощью пакета программ Maple. Раскладывая числитель дроби в ряд Тейлора по степеням $1-z$ с помощью Maple, найдём

$$V(z) = \frac{1}{48}\bigg(\frac{4}{(1-z)^6} - \frac{13}{(1-z)^5} + \frac{15}{(1-z)^4} - \frac{17}{(1-z)^3}$$
$$+ \frac{35}{(1-z)^2} - \frac{39}{1-z} + 13 + 5(1-z) - 3(1-z)^2\bigg).$$

Следовательно,

$$OP(n,3) = \frac{1}{48}\big(4t_n(6) - 13t_n(5) + 15t_n(4) - 17t_n(3) + 35t_n(2)$$
$$- 39t_n(1) + 13t_n(0) + 5t_n(-1) - 3t_n(-2)\big) \sim \frac{1}{48}4t_n(6) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{192}n^{n+5/2}.$$

Теорема 3 доказана.

В табл. 1 представлены числа $OP(n,2)$ и $OP(n,3)$, вычисленные с помощью формул из теорем 1 и 2.

Т а б л и ц а 1

n	4	5	6	7	8	9	10
$OP(n,2)$	6	195	5220	139125	3887520	115839234	3699460800
$OP(n,3)$	0	60	3420	144375	5644800	219576420	8753774400

Авторы благодарят рецензента за замечания и предложения по улучшению изложения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воблый В. А.** Асимптотическое перечисление графов некоторых типов: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.09, Москва, ВЦ АН, 1985. 12 с.
2. **Воблый В. А.** Об одной формуле для числа помеченных связных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 4. С. 48–59.
3. **Воблый В. А., Мелешко А. К.** Перечисление помеченных графов розы // Мат. XVI Междунар. науч.-практ. семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения» (Кировоград, 11–12 апреля 2014 г.). Кировоград: Кировоград. нац. тех. университет, 2014. С. 27–29.
4. **Дмитриев Е. Ф.** Перечисление отмеченных двуцветных связных графов с небольшим цикломатическим числом. Деп. в ВИНИТИ, № 4959-85.
5. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды: Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
6. **Степанов В. Е.** О некоторых особенностях строения случайного графа вблизи критической точки // Теория вероятностей и её применения. 1987. Т. 32, вып. 4. С. 633–657.
7. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
8. **Харари Ф., Палмер Э.** Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 326 с.
9. **Bodirsky M., Kang M.** Generating outerplanar graphs uniformly at random // Comb. Probab. Computing. 2006. Vol. 15, No. 3. P. 333–343.
10. **Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M.** Enumeration and limit laws of series-parallel graphs // Eur. J. Comb. 2007. Vol. 28, No. 8. P. 2091–2105.
11. **Ford G. W., Uhlenbeck G. E.** Combinatorial problems in the theory of graphs. IV // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1957. Vol. 43, No. 1. P. 163–167.
12. **Knuth D. E., Pittel B.** A recurrence related to trees // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 105, No. 2. P. 335–349.
13. **Read R. C.** Some unusual enumeration problems // Ann. New York Acad. Sci. 1970. Vol. 175. P. 314–326
14. **Wright E. M.** The number of connected sparsely edged graphs // J. Graph Theory. 1977. Vol. 1, No. 4. P. 317–330.

15. **Wright E. M.** The number of connected sparsely edged graphs. II // J. Graph Theory. 1978. Vol. 2, No. 4. P. 299–305.

Воблый Виталий Антониевич,
Мелешко Анна Константиновна

Статья поступила
10 мая 2016 г.

Исправленный вариант —
11 октября 2016 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2017. Volume 24, No. 2. P. 18–31

UDC 519.175.3 DOI: 10.17377/daio.2017.24.544

ENUMERATION OF LABELED OUTERPLANAR BICYCLIC AND TRICYCLIC GRAPHS

V. A. Voblyi[a] and *A. K. Meleshko*[b]
Bauman Moscow State University,
5 Bld. 1 Vtoraya Baumanskaya St., 105005 Moscow, Russia
E-mail: [a]vitvobl@yandex.ru, [b]akmeleshko@gmail.com

Abstract. The class of outerplanar graphs is used for testing the average complexity of algorithms on graphs. A random labeled outerplanar graph can be generated by a polynomial algorithm based on the results of an enumeration of such graphs. By a *bicyclic* (*tricyclic*) graph we mean a connected graph with cyclomatic number 2 (respectively, 3). We find explicit formulas for the number of labeled connected outerplanar bicyclic and tricyclic graphs with n vertices and also obtain asymptotics for the number of these graphs for large n. Moreover, we obtain explicit formulas for the number of labeled outerplanar bicyclic and tricyclic n-vertex blocks and deduce the corresponding asymptotics for large n. Tab. 1, illustr. 4, bibliogr. 15.

Keywords: enumeration, labeled graph, outerplanar graph, bicyclic graph, tricyclic graph, asymptotics.

REFERENCES

1. **V. A. Voblyi,** Asymptotic enumeration of graphs of some types, *Cand. Sci. Dissertation,* VTs AN SSSR, Moscow, 1985 [Russian].
2. **V. A. Voblyi,** A formula for the number of labeled connected graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **19**, No. 4, 48–59, 2012 [Russian].
3. **V. A. Voblyi** and **A. K. Meleshko,** Enumeration of labeled rose graphs, in *Materialy XVI Mezhdunarodnogo nauchno-technicheskogo seminara "Kombinatornye konfiguratsii i ikh prilozheniya"* (Proc. XVI Int. Sci. Tech. Seminar "Combinatorial Configurations and Its Applications"), *Kirovograd, Ukraine, Apr. 11–12, 2014,* pp. 27–29, Kirovograd Natl. Tech. Univ., Kirovograd, 2014 [Russian].
4. **E. F. Dmitriev,** Enumeration of labeled two-colored connected graphs with small cyclomatic number, *Depos. Manuscr.* Deposited in VINITI, No. 4559-85 [Russian].

5. **A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov,** and **O. I. Marichev,** *Integraly i ryady: Elementarnye funktsii* (Integrals and Series: Elementary Functions), Nauka, Moscow, 1981 [Russian].
6. **V. E. Stepanov,** On some features of the structure of a random graph near a critical point, *Teor. Veroyatn. Primen.*, **32**, No. 4, 633–657, 1987 [Russian]. Translated in *Theory Probab. Appl.*, **32**, No. 4, 573–594, 1987.
7. **F. Harary,** *Graph Theory,* Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 1969. Translated under the title *Teoriya grafov,* Mir, Moscow, 1973 [Russian].
8. **F. Harary** and **E. M. Palmer,** *Graphical Enumeration,* Acad. Press, New York, 1973. Translated under the title *Perechislenie grafov,* Mir, Moscow, 1977 [Russian].
9. **M. Bodirsky** and **M. Kang,** Generating outerplanar graphs uniformly at random, *Comb. Probab. Comput.,* **15**, 333–343, 2006.
10. **M. Bodirsky, O. Gimenez, M. Kang,** and **M. Noy,** Enumeration and limit laws of series-parallel graph, *Eur. J. Comb.,* **28**, 2091–2105, 2007.
11. **G. W. Ford** and **G. E. Uhlenbeck,** Combinatorial problems in the theory of graphs. IV, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA,* **43**, No. 1, 163–167, 1957.
12. **D. E. Knuth** and **B. Pittel,** A recurrence related to trees, *Proc. Am. Math. Soc.* **105**, No. 2, 335–349, 1989.
13. **R. C. Read,** Some unusual enumeration problems, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **175**, 314–326, 1970.
14. **E. M. Wright,** The number of connected sparsely edged graphs, *J. Graph Theory,* **1**, No. 4, 317–330, 1977.
15. **E. M. Wright,** The number of connected sparsely edged graphs. II. Smooth graphs and blocks, *J. Graph Theory,* **2**, No. 4, 299–305, 1978.

Vitaly A. Voblyi,
Anna K. Meleshko

Received
10 May 2016
Revised
11 October 2016