ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2017. Том 24, № 3. С. 5–19

УДК 519.8 DOI: 10.17377/daio.2017.24.551

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ НЕСКОЛЬКИХ КОММИВОЯЖЁРОВ НА СЛУЧАЙНЫХ ВХОДНЫХ ДАННЫХ С ДИСКРЕТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ *)

Э. Х. Гимади[1,2,a], *О. Ю. Цидулко*[1,2,b]

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
[2]Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: [a]gimadi@math.nsc.ru, [b]tsidulko.ox@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача m коммивояжёров (m-Peripatetic Salesman Problem) на случайных входных данных с дискретным распределением. Для её решения предлагается приближённый полиномиальный алгоритм, который при определённых ограничениях на входные данные с вероятностью, стремящейся к 1 с ростом размерности задачи, даёт точное решение задачи m-PSP как с одинаковыми, так и с различными весовыми функциями маршрутов коммивояжёров. Ил. 1, библиогр. 27.

Ключевые слова: задача нескольких коммивояжёров, асимптотически точный алгоритм, случайные входные данные, дискретное распределение.

Введение

Задача m коммивояжёров (m-Peripatetic Salesman Problem, далее для краткости m-PSP) является естественным обобщением классической задачи одного коммивояжёра (Traveling Salesman Problem или TSP). В задаче m-PSP рассматривается полный n-вершинный неориентированный граф $G = (V, E)$, на множестве рёбер которого заданы неотрицательные весовые функции $w_i : E \to \mathbb{R}_+$, $i = 1, \ldots, m$. Требуется найти m рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов $H_1, \ldots, H_m \subset E$ с минимальным суммарным весом

$$W(H_1, \ldots, H_m) = \sum_{i=1}^{m} w_i(H_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{e \in H_i} w_i(e).$$

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 16–11–10041).

© 2017 Э. Х. Гимади, О. Ю. Цидулко

В литературе под задачей m-PSP, как правило, понимают постановку, в которой все весовые функции рёбер w_i одинаковы: $w_1 = \ldots = w_m = w$. Здесь при необходимости будем называть такой вариант задачей m-PSP *с одинаковыми весовыми функциями.* Вариант задачи, в котором для каждого коммивояжёра задана своя собственная функция стоимости (веса) рёбер $w_i \neq w_j$ для $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$, будем называть задачей m-PSP *с различными весовыми функциями.*

Задача m-PSP впервые была представлена [26] в 1975 г. Де Корт [18] показал, что задача отыскания двух рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов в графе NP-полна. Отсюда следует NP-трудность задачи 2-PSP как на максимум, так и на минимум. Аналогичные аргументы могут быть применены к случаю m-PSP при $m > 2$.

Наиболее изучена задача двух коммивояжёров (2-PSP). Для неё найдены полиномиально разрешимые частные случаи [16]; построены нижние и верхние оценки для задачи на минимум [17–19]; построены приближённые алгоритмы с гарантированными оценками точности для метрической задачи на минимум [2, 4], симметрической [1, 10] и асимметрической [23] задачи на максимум. В работах [5, 8, 11] получены результаты для случаев 2-PSP, где веса рёбер принадлежат заданному интервалу или конечному множеству чисел.

Меньше известно для общего случая задачи m-PSP, т. е. при $m \geqslant 3$. В [3] представлен асимптотически точный алгоритм с временной сложностью $O(n^3)$ для евклидовой задачи m-PSP на максимум при $m = o(n)$. В [24] получен 5/6-приближённый алгоритм для метрической задачи m-PSP на максимум.

Ранее в работах [6, 7] для задачи m-PSP различными весовыми функциями построен приближённый алгоритм A_1 с временной сложностью $O(mn^2)$. Алгоритм A_1 последовательно строит m гамильтоновых циклов в графе. Для i-го гамильтонова цикла H_i, применяя принцип «иди в ближайший непройденный город» $n - 4i$ раз, алгоритм строит частичный путь. Затем с помощью процедуры extension-rotation путь достраивается до гамильтонова цикла. Рёбра i-го найденного гамильтонова цикла объявляются запрещёнными для циклов с номерами $i+1, \ldots, m$; тем самым для циклов достигается условие рёберной непересекаемости.

Точность алгоритма была исследована в случаях, когда входные данные (элементы матрицы расстояний) являются независимыми одинаково распределёнными величинами с равномерной функцией распределения на отрезке $[a_n, b_n]$, $0 < a_n \leqslant b_n$, или с показательной функцией распределения на $[a_n, \infty)$, $0 < a_n$, а также для мажорирующих их распределений.

При решении задачи m-PSP с различными весовыми функциями веса рёбер, выбранных алгоритмом A_1, являются независимыми случайными величинами ξ_{is}, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant s \leqslant n$. Чтобы доказать асимптотическую точность алгоритма, необходимо было оценить вероятность

$$\mathbf{Pr}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\xi_{is} > (1+\varepsilon_n)OPT\right\} \leqslant \delta_n$$

и найти условия, при которых ε_n и δ_n стремятся к нулю с ростом размерности задачи n. При получении этих оценок ключевую роль играла теорема Петрова из [13, разд. 3.4], которая имеет место для суммы независимых случайных величин. Однако если применить алгоритм A_1 к задаче m-PSP с одинаковыми весовыми функциями, то веса выбранных рёбер ξ_{is} будут зависимыми. Зависимые случайные величины в целом менее изучены, и для них не удалось найти результатов, подобных теореме Петрова. Таким образом, мы не можем провести аналогичный вероятностный анализ алгоритма A_1 и гарантировать его хорошие оценки точности для этого варианта задачи.

В настоящей работе предлагается подход, который при определённых условиях на входные данные даёт асимптотически точные полиномиальные алгоритмы решения задачи m-PSP с одинаковыми весовыми функциями на случайных входах. Полученные алгоритмы также подходят для решения задачи m-PSP с различными весовыми функциями. Подробно рассматривается случай дискретного распределения входных данных. Здесь подход с высокой вероятностью («with high probability», или «w.h.p.», что означает «с вероятностью, стремящейся к 1 с ростом размерности задачи») приводит к точному решению задачи. Вероятность несрабатывания, т. е. доля случаев, когда алгоритм не возвращает никакого решения, стремится к нулю с ростом размерности задачи.

1. Общий подход к приближённому решению задачи

Для решения задачи m-PSP с одинаковыми весовыми функциями предлагается подход, заключающийся в случайном равномерном разделении исходного графа на m рёберно-несмежных остовных подграфов и построении гамильтоновых циклов в этих подграфах с использованием наиболее лёгких рёбер.

Описание подхода.

Шаг 1. Исходный полный n-вершинный граф G равномерно разделим на подграфы $G_1, \dots, G_m$ так, чтобы в каждом G_i было n вершин и около $\frac{n(n-1)}{2m}$ рёбер. А именно, запустим процедуру SPLIT(G).

Процедура SPLIT(G)

begin

для $1 \leqslant i \leqslant m$ положить $V(G_i) = V(G)$, $E(G_i) = \varnothing$;

для каждого $e \in E(G)$:

случайным образом с равной вероятностью

выбрать одно из множеств $E(G_1), \ldots, E(G_m)$;

если выбрано $E(G_i)$, то добавить ребро e в $E(G_i)$;

end

Шаг 2. Построим подграфы $\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_m$, удалив из G_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, все рёбра, вес которых превышает величину w^*. Позже подберём w^* так, чтобы в подграфах оказались только лёгкие рёбра, но при этом в каждом $\widetilde{G}_i$ осталось бы достаточно рёбер для реализации шага 3.

Шаг 3. В каждом подграфе $\widetilde{G}_i$ построим гамильтонов цикл, используя полиномиальный алгоритм, который с высокой вероятностью находит гамильтонов цикл в неполном случайном графе. В данной работе воспользуемся алгоритмом Гимади и Перепелицы из [9].

Шаги 1 и 2 требуют $O(n^2)$ времени, на шаге 3 алгоритм Гимади—Перепелицы с трудоёмкостью $O(n^2/\ln n)$ выполняется m раз. Таким образом, общую временную сложность подхода можно оценить величиной $O(mn^2)$.

1.1. Алгоритмы нахождения гамильтонова цикла в случайном графе. Задача «Гамильтонов цикл» — хорошо известная NP-полная задача. В ряде работ изучался вопрос нахождения гамильтонова цикла в случайных графах.

В данной области исследований часто используются следующие две концепции случайного графа. Согласно первой концепции под случайным графом понимается n-вершинный граф G_p, где каждое ребро в графе существует с одинаковой вероятностью p независимо от других рёбер. Эта концепция удобна для доказательства утверждений. Согласно второй концепции под случайным графом понимается граф G_N с n вершинами и ровно N рёбрами, равномерно выбранный из множества всех таких графов. В этих терминах удобно формулировать утверждения. В [14] показано, что две концепции взаимозаменяемы с подходящими значениями для N и p.

В 1959 г. получено [20] пороговое условие существования гамильтонова цикла в n-вершинном графе: для любого $\varepsilon > 0$ если в графе число рёбер N меньше $(1/2-\varepsilon)n \log n$, то с высокой вероятностью (стремящейся к 1 с ростом n) граф содержит изолированные вершины, а значит, не может содержать гамильтонов цикл. Поза [27] в 1976 г. неалгоритмическим

способом доказал, что почти все неориентированные графы с числом рёбер не менее $cn \log n$ содержат гамильтонов цикл. Согласно [12, 25] необходимую плотность графа можно уменьшить до $1/2(n \log n + n \log \log n + Q(n))$ рёбер, где $Q(n)$ — любая медленно растущая функция такая, что $Q(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ (например, $Q(n) = O(\log \log n)$).

В 1973 г. Э. Х. Гимади и В. А. Перепелица [9] представили алгоритм, который за время $O(n^2/\ln n)$ w.h.p. находит гамильтонов цикл в ориентированном или неориентированном графе с $N \geqslant n\sqrt{n \ln n}$ рёбрами. В 1979 г. в [14] предложен рандомизированный алгоритм, который за время $O(n \ln^2 n)$ с вероятностью $1 - O(n^{-\alpha})$ находит гамильтонов цикл в ориентированном или неориентированном случайном графе с числом рёбер $N \geqslant c_\alpha n \ln n$, где c_α — достаточно большая константа.

В 1987 г. в [15] представлен детерминированный полиномиальный алгоритм, который w.h.p. находит гамильтонов цикл в неориентированном графе с $1/2(n \log n + n \log \log n + c_n n)$ рёбрами за время $O(n^{3+o(1)})$. В 1988 г. предложен [21] алгоритм с трудоёмкостью $O(n^{1,5})$ для ориентированного случая задачи.

В 2015 г. в [22] построен алгоритм, который за почти линейное время $O(n^{1+o(1)})$ w.h.p. находит гамильтонов цикл в случайном графе с минимальной степенью вершины не меньше 3 и числом рёбер $N = cn$, где c — достаточно большая константа.

В данной работе на шаге 3 предлагаемого подхода используется алгоритм A_{GP} Гимади — Перепелицы [9]. Важным преимуществом алгоритма является то, что с незначительными изменениями он применим к задаче на ориентированном графе с вероятностью несрабатывания того же порядка, а значит, анализ работы подхода с использованием этого алгоритма будет легко перенести на случай ориентированной задачи m-PSP. Кроме того, в условии на число рёбер N для этого алгоритма не содержится больших констант. Для сравнения, в алгоритме A_{AV} из [14] для успешной работы требуется $N \geqslant c_\alpha n \ln n$ рёбер, где c_α — достаточно большая константа, точное значение которой в [14] не приводится. По нашим предварительным оценкам она имеет порядок $c_\alpha \sim 100 + \alpha$. Таким образом, несмотря на то, что алгоритм A_{AV} для успешной работы требует значительно меньше рёбер относительно n, из-за большой константы c_α использование алгоритма A_{AV} в нашем подходе начнёт давать лучшие результаты, нежели использование A_{GP}, только при достаточно больших n (порядка нескольких сотен тысяч).

1.2. Алгоритм Гимади — Перепелицы [9]. В этом пункте приведём краткое описание алгоритма A_{GP}. Алгоритм A_{GP} с параметрами $(k,\ \tau,\ \rho)$ пытается построить гамильтонов цикл в заданном n-вершинном графе $G = (V, E)$. Он состоит из пяти этапов (рис. 1). Если на каком-либо шаге нет возможности произвести требуемое действие, то алгоритм A_{GP} прекращает свою работу и возвращает ответ «неудача».

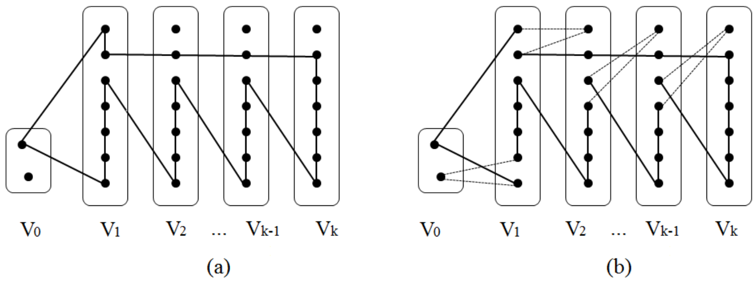

Рис. 1. Алгоритм A_{GP}: (a) этапы 0–3, (b) этап 4

Положим $v = \lfloor \frac{n-\rho}{k} \rfloor$, $v' = \lfloor \frac{n-\rho}{k}\tau \rfloor$. Значения параметров k, τ, ρ будут определены позже.

Этап 0. Зафиксируем произвольную вершину i_1. Построим подмножество вершин $V_0 \subset V$ из $n - kv$ вершин таких, что $(u, i_1) \in E$ для всех $u \in V_0$. Разделим оставшиеся kv вершин на k непересекающихся подмножеств V_λ, $|V_\lambda| = v$, $1 \leqslant \lambda \leqslant k$, причём $i_1 \in V_1$.

Этап 1. Начнём строить частичный путь из вершины i_1: положим $P = \{i_1\}$ и $\lambda = 1$.

Пока $\lambda \leqslant k$,
повторить $v - v'$ раз:
для последней вершины i_s пути P найти
ребро $(i_s, i_{s+1}) \in E \setminus P$, ведущее в вершину i_{s+1}
из того же подмножества V_λ, что и вершина i_s;
добавить ребро (i_s, i_{s+1}) в P;
если $\lambda < k$,
найти ребро e из последней вершины P в некоторую
вершину из подмножества $V_{\lambda+1}$;
добавить ребро e в путь P;
положить $\lambda = \lambda + 1$.

По окончании этого этапа имеем путь P длиной $k(v - v')$ вершин.

Этап 2. Повторить $(k-1)v'$ раз:
для последней вершины i_s пути P найти

ребро $(i_s, i_{s+1}) \in E$ такое, что $i_{s+1} \in V \setminus (P \cup V_0)$;
добавить найденное ребро в P.

По окончании этого этапа имеем путь P длиной $kv - v'$ вершин.

Этап 3. Замкнуть путь $P = \{i_1, \dots, i_s\}$ в цикл:
найти пару вершин $i_\alpha \in V \setminus (P \cup V_0)$ и $i_{\alpha+1} \in V_0$ таких,
что существуют рёбра (i_s, i_α) и $(i_\alpha, i_{\alpha+1})$;
добавить указанные рёбра и ребро $(i_{\alpha+1}, i_1)$ в путь P.

По окончании этого этапа имеем цикл P с $kv - v' + 2$ вершинами.

Этап 4. Для каждого $\lambda = 0, 1, \dots, k$ добавить оставшиеся вершины из подмножества V_λ в путь P следующим образом. Сначала произвольным образом покрыть множество $V_\lambda \setminus P$ цепями. Для каждой цепи $\{u_0, \dots, u_s\}$, $0 \leqslant s$, найти ребро (a, b) в пути P такое, что $a, b \in P \setminus V_\lambda$ и существуют рёбра (a, u_0) и (u_s, b). Удалить ребро (a, b) из P и добавить в него рёбра (a, u_0) и (u_s, b).

Теорема 1 [9]**.** *Пусть $p \geqslant 2\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$, а параметры алгоритма A_{GP} определены равенствами*

$$k = \frac{\ln n}{2}, \quad \rho = 0.3np, \quad \tau = \frac{kp}{1 + pk}.$$

Тогда алгоритм A_{GP} w.h.p. строит гамильтонов цикл в случайном графе с n вершинами и по меньшей мере $N = n\sqrt{n \ln n}$ рёбрами. Время работы алгоритма равно $O(n^2/\ln n)$, а вероятность несрабатывания равна

$$\delta_{GP} = O\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n^{1.5-o(1)}}\right) = O\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n^{0.8}}\right).$$

Для доказательства теоремы авторы [9] вычислили условные вероятности $P_0, \dots, P_4$ успешного осуществления каждого из этапов при условии осуществления предыдущих этапов и показали, что $P_0 \cdots P_4 \to 1$ при $n \to \infty$. Из этих вычислений можно вывести вероятность несрабатывания алгоритма δ_{GP}.

2. Вероятностный анализ подхода

Для оценки точности работы подхода используется аппарат вероятностного анализа. В качестве множества индивидуальных задач или случайных входов задачи будем рассматривать множество весовых функций рёбер $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ таких, что веса рёбер $w(e)$ полного n-вершинного неориентированного графа являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами с дискретной функцией распределения.

Через $f_A(I)$ и $OPT(I)$ обозначим соответственно приближённое (полученное посредством алгоритма A) и оптимальное значения целевой функции задачи на входе I.

Будем говорить, что алгоритм A для задачи на минимум *имеет оценки* $(\varepsilon_A, \delta_A)$ *на множестве случайных входов* этой задачи, если

$$\mathbf{Pr}\{f_A(I) > (1+\varepsilon_A)OPT(I)\} \leqslant \delta_A.$$

Здесь $\mathbf{Pr}\{\cdot\}$ – вероятность соответствующего события, ε_A — оценка относительной погрешности решения, получаемого алгоритмом A, δ_A — вероятность несрабатывания алгоритма A, т. е. доля случаев, когда алгоритм не гарантирует погрешности, не превосходящей ε_A, или не даёт ответа вовсе. Представляется интересным поведение оценок δ_A и ε_A при увеличении размерности задачи.

Алгоритм A называется *асимптотически точным* на классе рассматриваемых задач, если существуют оценки ε_A и δ_A, стремящиеся к нулю с ростом размерности задачи n.

В дальнейшем потребуется

Утверждение 1. *Для любых n, p, β таких, что $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, справедливо*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor(1-\beta)np\rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leqslant \exp\{-\beta^2 np/2\}.$$

Теорема 2. *Пусть веса рёбер полного n-вершинного графа являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами с дискретной функцией распределения на отрезке $[a,b]$ или неограниченном полуинтервале $[a,\infty)$, где a — минимально возможный вес ребра, причём для случайной величины X веса ребра выполнено*

$$p_a = \mathbf{Pr}\{X = a\} \geqslant \frac{4m(\sqrt{n\ln n}+1)}{n-1}.$$

Тогда при $m \leqslant n^{0.3-\theta}/4$, где $0 \leqslant \theta < 0.3$, предлагаемый подход даёт точное решение задачи с вероятностью несрабатывания, равной

$$\delta_A = O\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n^{0.5+\theta}}\right).$$

Доказательство. На шаге 1 (см. описание подхода) строим случайные подграфы $G_1, \ldots, G_m$, в которых каждое ребро присутствует с веро-

ятностью $1/m$, независимо от других рёбер. На шаге 2 удалим из подграфов $G_1, \dots, G_m$ все рёбра, вес которых больше a. Оставшиеся в подграфах рёбра назовём лёгкими. Вероятность того, что ребро лёгкое, равна

$$\mathbf{Pr}\{\text{вес ребра} = a\} = p_a.$$

Таким образом полученные подграфы $\widetilde{G}_1, \dots, \widetilde{G}_m$ являются случайными графами, в которых каждое ребро существует с вероятностью

$$p = p_a/m \tag{1}$$

независимо от других рёбер.

Оценим снизу оптимальное значение целевой функции на входе I как $OPT(I) \geqslant amn$. Если алгоритм, использованный на шаге 3, успешно выполнил работу для каждого подграфа $\widetilde{G}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то значение целевой функции, полученное предлагаемым подходом, равно $F_A = amn$, т. е. задача решена точно.

На шаге 3 применяем алгоритм A_{GP} для поиска гамильтоновых циклов в подграфах $\widetilde{G}_1, \dots, \widetilde{G}_m$. В этих подграфах должно быть по крайней мере $N = n\sqrt{n \ln n}$ рёбер, чтобы алгоритм A_{GP} с большой вероятностью завершился успешно. Используя утверждение 1, оценим вероятность того, что в начале шага 3 в подграфе $\widetilde{G}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, окажется меньше, чем N рёбер:

$$\begin{aligned}\delta' = \mathbf{Pr}\{&\text{в подграфе } \widetilde{G}_i \text{ число рёбер меньше } N\} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{j} p^j (1-p)^{\frac{n(n-1)}{2} - j} \\ &\qquad \leqslant \exp\left(-\frac{n(n-1)}{4} p + n\sqrt{n \ln n}\right) \leqslant e^{-n},\end{aligned}$$

если

$$p \geqslant \frac{4\left(\sqrt{n \ln n} + 1\right)}{n-1}. \tag{2}$$

Другими словами, если вероятность p существования ребра в графе удовлетворяет (2), то величина δ' пренебрежимо мала. Соединяя (1) и (2), получим условие на распределение входных данных, необходимое для успешной работы алгоритма:

$$p_a \geqslant \frac{4m\left(\sqrt{n \ln n} + 1\right)}{n-1}. \tag{3}$$

Поскольку p_a не должно превосходить 1, положим число гамильтоновых циклов $m \leqslant n^{0.3}/4$.

Вероятность несрабатывания δ_A предлагаемого подхода складывается, во-первых, из вероятностей δ' того, что к началу шага 3 в подграфах $\widetilde{G}_i$ оказывается недостаточно рёбер, а во-вторых, из вероятностей δ того, что при достаточном количестве рёбер в подграфах $\widetilde{G}_i$ на шаге 3 алгоритм возвращает ответ «неудача»:

$$\delta_A \leqslant m\delta + m\delta' \leqslant m\delta + me^{-n} = O\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n^{0.5+\theta}}\right) \tag{4}$$

при $m \leqslant n^{0.3-\theta}/4$, где $0 \leqslant \theta < 0.3$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *При числе циклов $m \leqslant n^{0.3-\theta}/4$, $0 \leqslant \theta < 0.3$, предлагаемый подход с вероятностью несрабатывания $O\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n^{0.5+\theta}}\right)$ даёт точное решение для задачи m-PSP с одинаковыми весовыми функциями, в которой веса рёбер полного n-вершинного графа являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами со следующими дискретными функциями распределения:*

— *распределение Бернулли $\mathcal{B}_p$, где $p \leqslant 1 - \frac{\sqrt{\ln n}}{n^{0.2+\theta}}$;*

— *геометрическое распределение $\mathcal{G}_p$, где $p \geqslant \frac{\sqrt{\ln n}}{n^{0.2+\theta}}$;*

— *распределение Пуассона Π_λ, где $\lambda \leqslant \ln\left(\frac{n^{0.2+\theta}}{\sqrt{\ln n}}\right)$.*

Замечание 1. Как отмечалось ранее, использованный в данной статье алгоритм A_{GP} имеет аналог для случая ориентированного исходного графа [9] с вероятностью несрабатывания того же порядка. Таким образом, полученные здесь результаты также будут верны для ориентированной задачи m-PSP.

Замечание 2. Разделение исходного графа на остовные подграфы на шаге 1 обеспечивает независимость рёбрам из разных гамильтоновых циклов. Это может позволить в дальнейшем проводить вероятностный анализ, используя преимущества независимых случайных величин, при применении более сложных алгоритмов нахождения гамильтонова цикла малого веса в случайных неполных графах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агеев А. А., Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.** Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 3/4 для отыскания двух непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 2. С. 11–20.

2. **Агеев А. А., Пяткин А. В.** Приближённый алгоритм решения метрической задачи о двух коммивояжёрах с оценкой точности 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 4. С. 3–20.

3. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.** Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 12–24.
4. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Коркишко Н. М.** Приближённые алгоритмы для нахождения двух рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов минимального веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2004. Т. 11, № 1. С. 11–25.
5. **Гимади Э. Х., Глазков Ю. В., Глебов А. Н.** Алгоритмы приближённого решения задачи о двух коммивояжёрах в полном графе с весами рёбер 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2007. Т. 14, № 2. С. 41–61.
6. **Гимади Э. Х., Глазков Ю. В., Цидулко О. Ю.** Вероятностный анализ алгоритма решения трёхиндексной m-слойной планарной задачи о назначениях на одноциклических подстановках // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 1. С. 15–29.
7. **Гимади Э. Х., Истомин А. М., Рыков И. А., Цидулко О. Ю.** Вероятностный анализ приближенного алгоритма для решения задачи о нескольких коммивояжерах на случайных входных данных, неограниченных сверху // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 88–98.
8. **Гимади Э. Х., Ивонина Е. В.** Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 1. С. 17–32.
9. **Гимади Э. Х., Перепелица В. А.** Статистически эффективный алгоритм выделения гамильтонова контура (цикла) // Дискретный анализ. Новосибирск: Ин-т математики, 1973. Т. 22. С. 15–28.
10. **Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж.** Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 4. С. 17–48.
11. **Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж.** Приближённый алгоритм решения задачи о двух коммивояжёрах на минимум с различными весовыми функциями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 5. С. 11–37.
12. **Коршунов А. Д.** О мощности некоторых классов графов // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 6. С. 1230–1233.
13. **Петров В. В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987. 252 с.
14. **Angluin D., Valiant L. G.** Fast probabilistic algorithms for Hamiltonian circuits and matchings // J. Comput. Syst. Sci. 1979. Vol. 18, No. 2. P. 155–193.
15. **Bollobás B., Fenner T. I., Frieze A. M.** An algorithm for finding Hamilton paths and cycles in random graphs // Combinatorica. 1987. Vol. 7, No. 4. P. 327–341.

16. **De Brey M. J. D., Volgenant A.** Well-solved cases of the 2-peripatetic salesman problem // Optimization. 1997. Vol. 39, No. 3. P. 275–293.
17. **De Kort J. B. J. M.** Lower bounds for symmetric K-peripatetic salesman problems // Optimization. 1991. Vol. 22, No. 1. P. 113–122.
18. **De Kort J. B. J. M.** Bounds for the symmetric K-peripatetic salesman problem // Optimization. 1992. Vol. 23, No. 4. P. 357–367.
19. **De Kort J. B. J. M.** A branch and bound algorithm for symmetric 2-peripatetic salesman problems // Eur. J. Oper. Res. 1993. Vol. 70, No. 2. P. 229–243.
20. **Erdös P., Rényi A.** On random graphs I // Publ. Math. 1959. Vol. 6. P. 290–297.
21. **Frieze A. M.** An algorithm for finding Hamilton cycles in random directed graphs // J. Algorithms. 1988. Vol. 9, No. 2. P. 181–204.
22. **Frieze A. M., Haber S.** An almost linear time algorithm for finding Hamilton cycles in sparse random graphs with minimum degree at least three // Random Struct. Algorithms. 2015. Vol. 47, No. 1. P. 73–98.
23. **Gimadi E. Kh., Glebov A. N., Skretneva A. A., Tsidulko O. Yu., Zambalaeva D. Zh.** Combinatorial algorithms with performance guarantees for finding several Hamiltonian circuits in a complete directed weighted graph // Discrete Appl. Math. 2015. Vol. 196, No. 11. P. 54–61.
24. **Glebov A. N., Gordeeva A. V.** An algorithm with approximation ratio 5/6 for the metric maximum m-PSP // Discrete Optimization and Operations Research. Proc. 9th Int. Conf. (Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016). Cham, Switzerland: Springer, 2016. P. 159–170 (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 9869).
25. **Komlós J., Szemerédi E.** Limit distributions for the existence of Hamilton circuits in a random graph // Discrete Math. 1983. Vol. 43, No. 1. P. 55–63.
26. **Krarup J.** The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial Programming: Methods and Applications. Proc. NATO Adv. Study Inst. (Versailles, France, Sept. 2–13, 1974). Dordrecht: D. Reidel, 1975. P. 173–178 (NATO Adv. Study Inst. Ser.; Vol. 19).
27. **Posa L.** Hamiltonian circuits in random graphs // Discrete Math. 1976. Vol. 14, No. 4. P. 359–364.

Гимади Эдуард Хайрутдинович,
Цидулко Оксана Юрьевна

Статья поступила
3 августа 2016 г.

Исправленный вариант —
13 октября 2016 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2017. Volume 24, No. 3. P. 5–19

UDC 519.8 DOI: 10.17377/daio.2017.24.551

AN ASYMPTOTICALLY OPTIMAL ALGORITHM FOR THE m-PERIPATETIC SALESMAN PROBLEM ON RANDOM INPUTS WITH DISCRETE DISTRIBUTION

E. Kh. Gimadi[1,2,a] and *O. Yu. Tsidulko*[1,2,b]

[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
[2]Novosibirsk State University,
2 Pirogov St., 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: [a]gimadi@math.nsc.ru, [b]tsidulko.ox@gmail.com

Abstract. We consider the m-Peripatetic Salesman Problem (m-PSP) on random inputs with discrete distribution function. In this paper we present a polynomial approximation algorithm which, under certain conditions, with high probability (w.h.p.) gives optimal solution for both the m-PSP on random inputs with identical weight functions and the m-PSP with different weight functions. Illustr. 1, bibliogr. 27.

Keywords: m-Peripatetic Salesman Problem, asymptotically optimal algorithm, random inputs, discrete distribution.

REFERENCES

1. **A. A. Ageev, A. E. Baburin,** and **E. Kh. Gimadi,** A 3/4-approximation algorithm for finding two disjoint Hamiltonian cycles of maximum weight, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **13**, No. 2, 11–20, 2006 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **1**, No. 2, 142–147, 2007.
2. **A. A. Ageev** and **A. V. Pyatkin,** A 2-approximation algorithm for the metric 2-peripatetic salesman problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **16**, No. 4, 3–20, 2009 [Russian].
3. **A. E. Baburin** and **E. Kh. Gimadi,** On the asymptotic optimality of an algorithm for solving the maximum m-PSP in a multidimensional Euclidean space, *Tr. Inst. Mat. Mekh.,* **16**, No. 3, 12–24, 2010 [Russian]. Translated in *Proc. Steklov Inst. Math.,* **272**, Suppl. 1, S1–S13, 2011.
4. **A. E. Baburin, E. Kh. Gimadi,** and **N. M. Korkishko,** Approximation algorithms for finding two edge-disjoint Hamiltonian cycles of minimal total weight, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **11**, No. 1, 11–25, 2004 [Russian].

5. **E. Kh. Gimadi, Yu. V. Glazkov,** and **A. N. Glebov,** Approximation algorithms for solving the 2-peripatetic salesman problem on a complete graph with edge weights 1 and 2, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **14**, No. 2, 41–61, 2007 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **3**, No. 1, 46–60, 2009.
6. **E. Kh. Gimadi, Yu. V. Glazkov,** and **O. Yu. Tsidulko,** The probabilistic analysis of an algorithm for solving the m-planar 3-dimensional assignment problem on one-cycle permutations, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **21**, No. 1, 15–29, 2014 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **8**, No. 2, 208–217, 2014.
7. **E. Kh. Gimadi, A. M. Istomin, I. A. Rykov,** and **O. Yu. Tsidulko,** Probabilistic analysis of an approximation algorithm for the m-peripatetic salesman problem on random instances unbounded from above, *Tr. Inst. Mat. Mekh.,* **20**, No. 2, 88–98, 2014 [Russian]. Translated in *Proc. Steklov Inst. Math.,* **289**, Suppl. 1, S77–S87, 2015.
8. **E. Kh. Gimadi** and **E. V. Ivonina,** Approximation algorithms for the maximum 2-peripatetic salesman problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **19**, No. 1, 17–32, 2012 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **6**, No. 3, 295–305, 2012.
9. **E. Kh. Gimadi** and **V. A. Perepelitsa,** A statistically effective algorithm for selection of a Hamiltonian contour or cycle, in *Diskretnyi analiz* (Discrete Analysis), Vol. 22, pp. 15–28, Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1973 [Russian].
10. **A. N. Glebov** and **D. Zh. Zambalaeva,** A polynomial algorithm with approximation ratio 7/9 for the maximum two peripatetic salesmen problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **18**, No. 4, 17–48, 2011 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **6**, No. 1, 69–89, 2012.
11. **A. N. Glebov** and **D. Zh. Zambalaeva,** An approximation algorithm for the minimum two peripatetic salesmen problem with different weight functions, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **18**, No. 5, 11–37, 2011 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **6**, No. 2, 167–183, 2012.
12. **A. D. Korshunov,** On the power of some classes of graphs, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **193**, No. 6, 1230–1233, 1970 [Russian]. Translated in *Sov. Math., Dokl.,* **11**, No. 6, 1100–1104, 1970.
13. **V. V. Petrov,** *Predel'nye teoremy dlya summ nezavisimykh sluchainykh velichin* (Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables), Nauka, Moscow, 1987 [Russian]. Translated under the title *Limit Theorems of Probability Theory: Sequences of Independent Random Variables,* Clarendon Press, Oxford, 1995 (Oxf. Stud. Probab., Vol. 4).
14. **D. Angluin** and **L. G. Valiant,** Fast probabilistic algorithms for Hamiltonian circuits and matchings, *J. Comput. Syst. Sci.,* **18**, No. 2, 155–193, 1979.

15. **B. Bollobás, T. I. Fenner,** and **A. M. Frieze,** An algorithm for finding Hamilton paths and cycles in random graphs, *Combinatorica,* **7**, No. 4, 327–341, 1987.
16. **M. J. D. De Brey** and **A. Volgenant,** Well-solved cases of the 2-peripatetic salesman problem, *Optimization,* **39**, No. 3, 275–293, 1997.
17. **J. B. J. M. De Kort,** Lower bounds for symmetric K-peripatetic salesman problems, *Optimization,* **22**, No. 1, 113–122, 1991.
18. **J. B. J. M. De Kort,** Bounds for the symmetric K-peripatetic salesman problem, *Optimization,* **23**, No. 4, 357–367, 1992.
19. **J. B. J. M. De Kort,** A branch and bound algorithm for symmetric 2-peripatetic salesman problems, *Eur. J. Oper. Res.,* **70**, No. 2, 229–243, 1993.
20. **P. Erdös** and **A. Rényi,** On random graphs I, *Publ. Math.,* **6**, 290–297, 1959.
21. **A. M. Frieze,** An algorithm for finding Hamilton cycles in random directed graphs, *J. Algorithms,* **9**, No. 2, 181–204, 1988.
22. **A. M. Frieze** and **S. Haber,** An almost linear time algorithm for finding Hamilton cycles in sparse random graphs with minimum degree at least three, *Random Struct. Algorithms,* **47**, No. 1, 73–98, 2015.
23. **E. Kh. Gimadi, A. N. Glebov, A. A. Skretneva, O. Yu. Tsidulko,** and **D. Zh. Zambalaeva,** Combinatorial algorithms with performance guarantees for finding several Hamiltonian circuits in a complete directed weighted graph, *Discrete Appl. Math.,* **196**, No. 11, 54–61, 2015.
24. **A. N. Glebov** and **A. V. Gordeeva,** An algorithm with approximation ratio 5/6 for the metric maximum m-PSP, in *Discrete Optimization and Operations Research* (Proc. 9th Int. Conf. DOOR, Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016), pp. 159–170, Springer, Cham, Switzerland, 2016 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9869).
25. **J. Komlós** and **E. Szemerédi,** Limit distributions for the existence of Hamilton circuits in a random graph, *Discrete Math.,* **43**, No. 1, 55–63, 1983.
26. **J. Krarup,** The peripatetic salesman and some related unsolved problems, in *Combinatorial Programming: Methods and Applications,* (Proc. NATO Adv. Study Inst., Versailles, France, Sept. 2–13, 1974), pp. 173–178, D. Reidel, Dordrecht, 1975 (NATO Adv. Study Inst. Ser., Vol. 19).
27. **L. Posa,** Hamiltonian circuits in random graphs, *Discrete Math.,* **14**, No. 4, 359–364, 1976.

Edward Kh. Gimadi,
Oxana Yu. Tsidulko

Received
3 August 2016
Revised
13 October 2016