ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2017. Том 24, № 3. С. 20–34

УДК 519.174.7 DOI: 10.17377/daio.2017.24.559

СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИРКУЛЯНТНОГО ГРАФА С ДИСТАНЦИЯМИ 1 И 2

М. А. Лисицына[1,a], *О. Г. Паршина*[2,3,b]

[1]Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С. М. Буденного,
Тихорецкий пр., 3, 194064 Санкт-Петербург, Россия
[2]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
[3]Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1,
43 Boulevard du 11 Novembre 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex, France
E-mail: [a]lisicinama@ngs.ru, [b]parolja@gmail.com

Аннотация. Раскраску вершин графа называют совершенной, если все его одинаково окрашенные вершины имеют одинаковый цветовой состав окружения. *Бесконечным циркулянтным графом со сплошным набором n дистанций* назовём граф Кэли группы Z с системой образующих $\{1, 2, \ldots, n\}$. В статье получено описание всех совершенных раскрасок такого графа с дистанциями 1 и 2 в произвольное конечное число цветов. В 2015 г. была сформулирована гипотеза, характеризующая совершенные раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором n дистанций. Полученный результат подтверждает гипотезу для $n = 2$, в случае $n > 2$ вопрос остаётся открытым. Библиогр. 12.

Ключевые слова: совершенная раскраска, циркулянтный граф.

Введение

Раскраску вершин графа называют *совершенной*, если все вершины одного цвета имеют одинаковый цветовой состав окружения. В англоязычной литературе для совершенной раскраски используют термины equitable partition и partition design. В работе исследуются совершенные раскраски графа Кэли группы $\mathbb{Z}$ с системой образующих $\{1, 2, \ldots, n\}$, который будем обозначать через $Ci_\infty(n)$.

Ранее выдвинута [11] гипотеза о характеризации всех совершенных раскрасок графа $Ci_\infty(n)$ в произвольное число цветов. Строгая формулировка этой гипотезы будет приведена позднее. В данной работе доказано, что для $n = 2$ выдвинутое предположение верно.

© 2017 М. А. Лисицына, О. Г. Паршина

Ряд результатов для совершенных раскрасок циркулянтных графов получен в работах [5,7,8]. В [7] описаны все параметры сплошных совершенных 2-раскрасок произвольных циркулянтных графов. В [8] приведена бесконечная серия несплошных раскрасок в 2 цвета таких графов с новыми параметрами, а в [5] описаны все совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций.

Каждая совершенная раскраска циркулянтного графа с n дистанциями порождает совершенную раскраску n-мерной прямоугольной решётки с теми же параметрами (см. [7]). Изучению совершенных раскрасок двумерной прямоугольной решётки посвящены работы [1,6,10,12].

Близкими к циркулянтным также являются графы, в группе автоморфизмов которых содержатся элементы большого порядка, например, графы призмы и лестницы Мёбиуса. Совершенные раскраски этих графов исследовались в [2–4].

1. Определения и обозначения

Определим исследуемый граф. *Бесконечным циркулянтным графом с дистанциями* $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}$ называется граф $Ci_\infty(d_1, \ldots, d_n)$, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел и для любой вершины v множество инцидентных ей рёбер имеет вид

$$\{\{v, v \pm d_i\} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Любая совершенная раскраска графа $Ci_\infty(d_1, \ldots, d_n)$ является периодической [7]. Значит, для её описания достаточно указать наименьший период. Записывать такой период будем в виде заключённой в квадратные скобки строки, число элементов в которой равно длине периода.

Циркулянтным графом длины t с дистанциями $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}$ называется псевдограф $Ci_t(d_1, \ldots, d_n)$, в котором множество вершин совпадает с множеством элементов группы $\mathbb{Z}_t$ и для любой вершины v мультимножество инцидентных ей рёбер имеет вид

$$\{\{v, v \pm d_i \bmod t\} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Очевидно, что любой совершенной раскраске графа $Ci_\infty(d_1, \ldots, d_n)$ с минимальной длиной периода t можно естественным образом поставить в соответствие совершенную раскраску графа $Ci_t(d_1, \ldots, d_n)$.

В настоящей работе рассматривается случай $d_i = i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Граф $Ci_\infty(n) = Ci_\infty(1, 2, \ldots, n)$ назовём *бесконечным циркулянтным графом со сплошным набором дистанций.* Соответствующий ему циркулянтный граф длины t обозначим через $Ci_t(n)$.

Доказательство основного результата статьи выполнено перебором. С целью сократить перебор, определим некоторые новые понятия.

Всюду далее $k \geqslant 1$ — натуральное число. Элементы конечного множества $I = \{1, 2, \dots, k\}$ будем называть *цветами.* Пусть $G(V, E)$ — простой граф, а отображение $\varphi\colon V \to I$ является его совершенной раскраской. Мультимножество цветов окружения вершины v цвета a в совершенной раскраске φ назовём *палитрой* цвета a.

Определим на множестве V *характеристическую функцию цвета* i *в совершенной раскраске* φ следующим образом:

$$\varphi_i(v) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(v) = i, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Раскраску вершин графа G, полученную таким образом из совершенной раскраски φ, назовём $(0,1)$*-раскраской.*

Исследуя свойства циркулянтных графов, удобно под расстоянием между двумя вершинами понимать расстояние в $\mathbb{Z}$. Заметим, что такое определение отличается от принятого в теории графов.

Опишем, как организован перебор. В каждой совершенной раскраске графа $Ci_\infty(n)$ выберем цвет, расстояние между вершинами которого минимально. Если таких цветов несколько, выберем любой из них. Записав характеристическую функцию этого цвета в рассматриваемой раскраске, получим некоторую $(0,1)$-раскраску того же графа. Доказательство основного результата выполнено перебором всех возможных минимальных расстояний между 1-окрашенными вершинами в построенной $(0,1)$-раскраске. Сократить перебор позволяют некоторые вспомогательные утверждения, которые будут сформулированы и доказаны далее.

2. Конструкции совершенных раскрасок

Раскраски циркулянтных графов $Ci_\infty(n)$ с периодами

$$S_{11}(k) = [1\ 2\ 3 \dots (k-1)\ k\ (k-1) \dots 3\ 2],$$
$$S_{12}(k) = [1\ 2\ 3 \dots (k-1)\ k\ k\ (k-1) \dots 3\ 2],$$
$$S_{22}(k) = [1\ 2\ 3 \dots (k-1)\ k\ k\ (k-1) \dots 3\ 2\ 1]$$

будем называть *зеркальными типов* 1-1, 1-2 и 2-2 соответственно, а с периодом $S(k) = [1\ 2\ 3 \dots k]$ — *циклическими.* Тип зеркальной раскраски определяется количеством вершин крайних цветов (1 и k) в периоде.

Утверждение следующей леммы очевидно.

Лемма 1. *Раскраски циркулянтных графов $Ci_\infty(n)$ с периодами $S_{11}(k)$, $S_{12}(k)$, $S_{22}(k)$ и $S(k)$ являются совершенными для любых натуральных $n \geqslant 1$ и $k \geqslant 1$.*

Циклические и зеркальные совершенные раскраски далее будем называть *стандартными*. Стандартность таких раскрасок отражает следующий факт. Циклические и зеркальные раскраски могут быть получены как результат применения орбитного метода (см., например, [9]), который является основным способом построения совершенных раскрасок графов.

Совершенные раскраски графа $Ci_\infty(n)$ с длинами периодов $2n$, $2n+1$ и $2n+2$, которые не являются стандартными, будем называть *нестандартными*. Напомним, что любой совершенной раскраске графа $Ci_\infty(n)$ с длиной периода t можно поставить в соответствие совершенную раскраску циркулянта $Ci_t(n)$. Верно и обратное утверждение. Таким образом, для характеризации нестандартных раскрасок бесконечного циркулянтного графа со сплошным набором n дистанций достаточно описать совершенные раскраски графов $Ci_{2n}(n)$, $Ci_{2n+1}(n)$ и $Ci_{2n+2}(n)$ и исключить из полученных периодов стандартные.

Граф $Ci_{2n+1}(n)$ является полным графом с $2n+1$ вершинами. По определению совершенной раскраски любая раскраска вершин полного графа совершенна.

Рассмотрим циркулянтный граф длины $2n$ со сплошным набором n дистанций. Граф $Ci_{2n}(n)$ — это граф K_{2n} с дополнительными рёбрами, соединяющими вершины на расстоянии n. Заметим, что такие рёбра образуют совершенное паросочетание в исследуемом графе. Значит, раскраска циркулянта $Ci_{2n}(n)$ совершенна тогда и только тогда, когда она является совершенной раскраской такого паросочетания. Задача описания совершенных раскрасок графа $Ci_{2n}(n)$, таким образом, сводится к исследованию совершенных раскрасок паросочетаний.

Пусть $M = (V, E)$ — граф совершенного паросочетания на множестве вершин V. Построим раскраску его вершин в k цветов. Для этого множество цветов $I = \{1, 2, \ldots, k\}$ разобьём на два непересекающихся подмножества I_1 и I_2 так, что $|I_2| = 2l$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Цвета множества I_2 разобьём на пары: $(\alpha_i, \overline{\alpha}_i)$, $i = 1, \ldots, l$. Концы каждого элемента паросочетания красим одним из двух доступных способов: одинаково — цветом $\alpha \in I_1$ или цветами α_i и $\overline{\alpha}_i$, где $(\alpha_i, \overline{\alpha}_i)$ — пара из разбиения I_2. Описанную конструкцию назовём *антиподальной раскраской паросочетания.*

В следующей очевидной лемме описаны все совершенные раскраски паросочетания.

Лемма 2. *Пусть $M = (V, E)$ — граф совершенного паросочетания на множестве вершин V. Раскраска его вершин $\varphi\colon V \to I$ совершенна тогда и только тогда, когда она антиподальна.*

Таким образом, совершенные раскраски циркулянта $Ci_{2n}(n)$ исчерпываются антиподальными раскрасками соответствующего совершенного паросочетания.

Случай $Ci_{2n+2}(n)$ аналогичен предыдущему, так как граф $Ci_{2n+2}(n)$ представляет собой полный граф K_{2n+2}, из которого удалено совершенное паросочетание.

Описание совершенных раскрасок графа $Ci_\infty(n)$ с периодами $2n$, $2n+1$ и $2n+2$, таким образом, завершено. Исключив из этих раскрасок стандартные, получим множество его нестандартных совершенных раскрасок.

Применив полученные результаты к случаю $n = 2$, охарактеризуем все нестандартные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2.

Лемма 3. *Нестандартные раскраски графа $Ci_\infty(2)$ с точностью до переобозначения цветов исчерпываются следующими пятнадцатью раскрасками:*

$$\begin{array}{lll}
N_1 = [11112], & N_2 = [11122], & N_3 = [11212], \\
N_4 = [11123], & N_5 = [11213], & N_6 = [11223], \\
N_7 = [12123], & N_8 = [11234], & N_9 = [12134], \\
N_{10} = [111222], & N_{11} = [112113], & N_{12} = [123145], \\
N_{13} = [112334], & N_{14} = [123124], & N_{15} = [121323].
\end{array}$$

В [11] выдвинута гипотеза о том, что все совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа $Ci_\infty(n)$ исчерпываются стандартными бесконечными сериями и нестандартными совершенными раскрасками. Отметим, что совершенные раскраски графа $Ci_\infty(1)$ исчерпываются четырьмя бесконечными сериями стандартных раскрасок (см. [4]), что подтверждает гипотезу в случае $n = 1$, так как все совершенные раскраски такого графа с периодами длины 2, 3 и 4 стандартны. В данной работе доказано, что гипотеза верна в случае $n = 2$. Для $n > 2$ она не подтверждена и не опровергнута.

3. Предварительные сведения

Далее сформулированы и доказаны несколько утверждений о совершенных раскрасках бесконечных циркулянтных графов, позволяющих сократить перебор в доказательстве основного результата.

Следующие две леммы посвящены свойствам графа $Ci_\infty(n)$.

Лемма 4. *Пусть в совершенной раскраске графа $Ci_\infty(n)$ в k цветов встречается фрагмент xx, где $x \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тогда вершины, находящиеся на расстоянии n от такого фрагмента, окрашены одинаково.*

Доказательство. Окружения вершин цвета x в таком фрагменте отличаются лишь вершинами, находящимися на расстоянии n от него. Так как рассматриваемая раскраска совершенна, цвета таких вершин совпадают. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Рассмотрим совершенную раскраску графа $Ci_\infty(n)$. Пусть наименьшее расстояние между соцветными вершинами в этой раскраске равно $k > 2n$. Тогда раскраска является циклической в k цветов.*

Доказательство. Рассмотрим удовлетворяющую условиям леммы совершенную раскраску графа $Ci_\infty(n)$. В ней найдётся фрагмент вида $1\ 2\ 3 \dots (k-1)\ k\ 1$ с наименьшим расстоянием $k > 2n$ между соцветными крайними вершинами. В силу минимальности k цвет 1 входит в указанный фрагмент ровно два раза, а все остальные цвета в нём попарно различны. Значит, вершина цвета 1 имеет следующий цветовой состав окружения: $\{2, 3, \dots, n, n+1, k-n+1, \dots, k\}$. Учитывая минимальность k, продолжаем рассматриваемый фрагмент вправо следующим образом: $1\ 2\ 3 \dots (k-1)\ k\ 1\ 2$. Повторяя описанные шаги, продолжаем фрагмент до циклической раскраски с периодом $[1\ 2\ 3 \dots (k-1)\ k]$. Лемма 5 доказана.

Докажем несколько свойств $(0,1)$-раскрасок бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2.

Лемма 6. *Фрагменты* 1100 *и* 010 *не могут встретиться в одной и той же* $(0,1)$*-раскраске графа* $Ci_\infty(2)$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно. Значит, в рассматриваемой раскраске встретится последовательность 110^l10, где $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 2$.

Далее цвета будем обозначать также строчными буквами, причём различные буквы могут обозначать один цвет. В рамках этого доказательства считаем, что буквы обозначают цвета, отличные от 1. Рассмотрим три случая.

(1) $l = 2$. Соответствующий фрагмент совершенной раскраски может быть записан в виде $11ab1c$. Он однозначно продолжается до $11ab1c1$, так как у вершины цвета 1 в окружении есть соцветная ей вершина. Отметим, что цвета a и b не совпадают, так как в их окружениях разное число 1-окрашенных вершин. Поскольку у вершины цвета a ровно три соседа цвета 1 и рассматриваемый фрагмент является частью совершенной раскраски, он продолжается до $11ab1c1ba11$. Мультимножества $\{1, a, b, c\}$ и $\{1, 1, b, b\}$ описывают цветовой состав окружения вершин цветов 1 и c соответственно. Значит, рассматриваемая последовательность однозначно продолжается до $11ab1c1ba11cbb$. Сравнивая цветовой состав окружения вершин цвета b, получаем $a = b$; противоречие.

(2) $l = 3$. В совершенной раскраске графа $Ci_\infty(2)$, соответствующей заданной $(0,1)$-раскраске, есть последовательность вида $11abc1d$. Заметим, что внутренняя степень цвета 1 равна 1. В силу леммы 4 и последнего замечания рассматриваемый фрагмент продолжается следующим образом: $be11abc1d1$. Отметим, что в окружении вершины цвета c находится только одна 1-окрашенная вершина. Сравним цветовой состав окружения вершин цвета 1: вторая справа вершина этого цвета соседствует ровно с одной вершиной цвета c, но в окрестностях радиуса один вершин блока 11 все вершины соседствуют с как минимум двумя вершинами первого цвета; противоречие.

(3) Случай $l > 3$ доказывается аналогично п. 2.

Наше предположение оказалось ложным. Значит, если в $(0,1)$-раскраске графа $Ci_\infty(2)$ встречается фрагмент 110^l, где $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 2$, то фрагмент 010 в такой раскраске отсутствует. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. 1. *Если в $(0,1)$-раскраске графа $Ci_\infty(2)$ есть фрагмент 110^l1, $l \in \mathbb{N}$, $l > 4$, то соответствующая ей совершенная раскраска является зеркальной типа $S_{12}(k)$ или $S_{22}(k)$ для подходящего k.*

2. *Рассмотрим совершенную раскраску графа $Ci_\infty(2)$, в которой наименьшее расстояние между соцветными вершинами равно 2. Если в соответствующей ей $(0,1)$-раскраске есть фрагмент 1010^l1, $l \in \mathbb{N}$, $l > 3$, то исходная совершенная раскраска является зеркальной типа $S_{11}(k)$ для подходящего k.*

Доказательство. 1. Согласно условию леммы в рассматриваемой $(0,1)$-раскраске найдётся фрагмент 110^l1, $l \in \mathbb{N}$, $l > 4$. Он продолжается вправо единицей в силу леммы 6. Соответствующая часть совершенной раскраски имеет вид $ab11cd\ldots ef11gh$, при этом $1 \notin \{c, d, e, f\}$. В силу леммы 4 верно $a = d$ и $e = h$, следовательно, получаем $ab11ca\ldots ef11ge$.

Пронумеруем 1-окрашенные вершины в таком фрагменте слева направо. Для первой и третьей вершин первого цвета выпишем цветовые составы их окружения: $\{1_1, a_1, b_2, c_2\}$ и $\{1_1, e_1, f_2, g_2\}$. Здесь и далее нижний индекс в такой записи обозначает число вершин цвета 1, смежных с вершиной указанного цвета. Сравнивая приведённые составы, заключаем, что $a = e$. Таким образом, рассматриваемый фрагмент имеет вид $ab11ca \dots af11ga$. Рассмотрим в нём вторую слева вершину цвета a. Заметим, что в её окружении есть лишь одна вершина, которая имеет ровно двух 1-окрашенных соседей — это вершина цвета c. Для других a-окрашенных вершин данного фрагмента таким свойством обладают цвета b, f и g. Значит, все четыре цвета b, c, f и g совпадают. Таким образом, рассматриваемая последовательность принимает вид $ab11ba \dots ab11ba$. Она, в свою очередь, однозначно восстанавливается вовне и внутрь. Результатом такого восстановления является зеркальная раскраска типа $S_{12}(k)$ или $S_{22}(k)$ для подходящего k.

2. По условию леммы в рассматриваемой $(0, 1)$-раскраске есть слово 1010^l1, $l \in \mathbb{N}$, $l > 3$. Соответствующий фрагмент совершенной раскраски имеет вид $1a1bc \dots de1fg$, при этом $1 \notin \{a, b, c, d, e, f\}$, $b \neq c$, $d \neq e$ и $f \neq g$, потому что расстояние между вершинами одинакового цвета не меньше 2. Так как окрестность вершины цвета 1 содержит единственную соцветную ей вершину, то $g = 1$. Таким образом, рассматриваемая часть совершенной раскраски имеет вид $1a1bc \dots de1f1$. Пронумеруем вершины цвета 1 в этом фрагменте слева направо. Рассмотрим окрестности второй и третьей из них: $\{1_1, a_2, b_1, c_1\}$ и $\{1_1, d_1, e_1, f_2\}$. Такие мультимножества совпадают, если $a = f$, $b = d$, $c = e$ или $a = f$, $b = e$, $c = d$. Первый вариант противоречит цветовому составу окружения вершины цвета b. Если $a = f$, $b = e$ и $c = d$, то фрагмент имеет вид $1a1bc \dots cb1a1$, и, как и в п. 1 леммы, однозначно восстанавливается вовне и внутрь. Результатом такого восстановления является зеркальная раскраска типа $S_{11}(k)$ для подходящего k. Лемма 7 доказана.

4. Основная теорема

Справедлива следующая

Теорема 1. *Совершенные раскраски графа $Ci_\infty(2)$ с точностью до переобозначения цветов исчерпываются следующим списком:*

1) *стандартные бесконечные серии;*

2) *пятнадцать нестандартных раскрасок*

$N_1 = [11112]$,	$N_2 = [11122]$,	$N_3 = [11212]$,
$N_4 = [11123]$,	$N_5 = [11213]$,	$N_6 = [11223]$,
$N_7 = [12123]$,	$N_8 = [11234]$,	$N_9 = [12134]$,
$N_{10} = [111222]$,	$N_{11} = [112113]$,	$N_{12} = [123145]$,
$N_{13} = [112334]$,	$N_{14} = [123124]$,	$N_{15} = [121323]$.

Доказательство. Обозначим через ρ минимальное расстояние между соцветными вершинами в совершенной раскраске. Доказательство теоремы проведём перебором всех возможных значений этого параметра. Для наглядности результаты перебора представлены в табл. 1.

Значения параметра ρ записаны в первом столбце. Во втором столбце представлены фрагменты, которые обязательно встретятся в $(0,1)$-раскраске графа $Ci_\infty(2)$ при соответствующем значении ρ, назовём их *неизбежными*. После этого для каждого значения ρ перечислены все возможные продолжения неизбежного фрагмента, анализ любого из которых приводит либо к противоречию, либо к совершенной раскраске. Результат такого анализа записан в последний столбец, где прочерк означает, что с данным продолжением совершенную раскраску графа $Ci_\infty(2)$ получить нельзя.

Таблица 1

Схема доказательства теоремы 1

ρ	Неизбежный фрагмент	Продолжение	Совершенная раскраска
1	110	000	$S_{22}(k)$, $k \geqslant 3$, $S_{12}(k)$, $k \geqslant 4$, N_{13}
		001	$S_{12}(3)$, N_6, N_8, N_{10}
		010	—
		011	$S_{22}(2)$, N_2, N_4
		100	—
		101	N_5, N_3
		110	$S_{12}(2)$, N_{11}
		111	N_1
2	1010	00	$S_{11}(k)$, $k \geqslant 4$, N_{15}
		01	N_7, N_9
		10	$S_{11}(3)$, $S_{11}(2) = S(2)$
3		0	—
	100100	1	$S(3)$, N_{12}, N_{14}
$\geqslant 4$	10^s10^s, $s \geqslant 3$	$*$	$S(k)$, $k \geqslant 4$

Остановимся более подробно на доказательстве.

Для $\rho = 1$ неизбежный фрагмент имеет вид 110 и допускает восемь продолжений (табл. 1).

Рассмотрим продолжение 000. Согласно лемме 4 в соответствующей совершенной раскраске найдётся слово $ab11cade$, причём $1 \notin \{a, c, d, e\}$. Продолжая этот фрагмент вправо вершиной цвета 1, в силу лемм 4 и 6 получим $ab11cade11fd$. Запишем цветовой состав окружения 1-окрашенных вершин: $\{1_1, a_1, b_2, c_2\}$ и $\{1_1, d_1, e_2, f_2\}$. Из совпадения этих мультимножеств следует, что $a = d$. Таким образом, рассматриваемая часть совершенной раскраски имеет вид $ab11caae11fa$. Анализируя палитру цвета a, заключаем, что $b = c$ или $b = e$.

Если цвета b и c совпадают, то совпадают все четыре цвета b, c, e и f. Соответствующая совершенная раскраска восстанавливается однозначно — $S_{22}(3)$. Пусть $b \neq c$ и $b = e$. Тогда $c = f$ и рассматриваемый фрагмент однозначно продолжается до совершенной раскраски с периодом $[ab11ca] = [112334] = N_{13}$.

Если фрагмент 110000 продолжается нулём, то согласно лемме 7 рассматриваемая $(0,1)$-раскраска соответствует одной из зеркальных раскрасок $S_{12}(k)$ или $S_{22}(k)$ для подходящего k ($k \geqslant 4$ или $k \geqslant 3$ соответственно). Этим завершается доказательство в случае продолжения 000 неизбежного фрагмента для $\rho = 1$.

Продолжение 010 неизбежного фрагмента для $\rho = 1$ противоречиво в силу леммы 6. Продолжению 100 этого фрагмента соответствует последовательность $11a1bc$, причём $1 \notin \{a, b, c\}$. Такая последовательность не может быть частью никакой совершенной раскраски в силу противоречивости окружений вершин первого цвета.

Для других продолжений этого фрагмента доказательство аналогично, поэтому авторы оставляют его читателю в качестве упражнения.

Пусть $\rho = 2$. Для такого значения ρ неизбежный фрагмент имеет вид 1010 и допускает три продолжения — 00, 01 и 10.

Продолжению 00 неизбежного фрагмента 1010 соответствует часть исходной совершенной раскраски вида $1a1bcd$. Если продолжение такой части вправо на одну вершину окрашено не цветом 1, то исходная раскраска является зеркальной в силу леммы 7.

В противном случае в рассматриваемой раскраске можно выделить фрагмент $1a1bcd1$, при этом $1 \notin \{a, b, c, d\}$, $b \neq c$, $c \neq d$. Так как вершина цвета 1 имеет одного 1-окрашенного соседа, фрагмент продолжается до $1a1bcd1e1$, $e \neq 1$. Пронумеруем вершины цвета 1 в таком фрагменте слева направо. Рассмотрим окрестности второй и третьей вершин пер-

вого цвета: $\{1_1, a_2, b_1, c_2\}$ и $\{1_1, e_2, d_1, c_2\}$. Два таких мультимножества равны, значит, $a = e$ и $b = d$. Запишем результат переобозначения цветов: $1a1bcb1a1$. Поскольку цветовой состав окружения вершин цвета 1, b и c известен, фрагмент продолжается до совершенной раскраски с периодом $S_{11}(4)$, если $a \neq c$, иначе — до раскраски N_{15}.

Рассмотрим продолжение неизбежного фрагмента словом 01. В этом случае в исходной совершенной раскраске имеется фрагмент $1a1bc1$, где $1 \notin \{a, b, c\}$, $b \neq c$. Так как $\rho = 2$ и цветовой состав окружения 1-окрашенной вершины определяется однозначно из записанной части исходной раскраски, такая часть продолжается до всей совершенной раскраски. Если $a \neq b$ и $a \neq c$, то период раскраски равен $[1a1bc] = [12134] = N_9$. Случаю $a = b$, $a \neq c$ соответствует совершенная раскраска с периодом $[1a1ac] = [12123] = N_7$, как и случаю $a \neq b$, $a = c$.

Если продолжение неизбежного фрагмента 10, то цветовой состав окружения 1-окрашенной вершины в исходной раскраске вновь определён однозначно. Значит, соответствующий фрагмент совершенной раскраски имеет вид $1a1b1a$. Такой фрагмент восстанавливается до раскраски $S_{11}(3)$ в случае $a \neq b$ или до $S(2)$ в противоположном случае. Доказательство для случая $\rho = 2$ окончено.

Значению $\rho = 3$ соответствует неизбежный фрагмент 100100, допускающий продолжения 0 и 1.

Рассмотрим продолжение 0 для этого фрагмента. Тогда часть совершенной раскраски принимает вид $1ab1cde$, причём $1 \notin \{a, b, c, d, e\}$, $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq d$, $c \neq e$ и $d \neq e$. Запишем палитру цвета 1: $\{a_2, b_2, c_1, d_{\geqslant 1}\}$. Значит, изучаемый фрагмент можно продолжить влево двумя способами — словом cd или dc. Так как цветовые составы окружения вершин цветов a, b и c и в том, и в другом варианте определяются однозначно, соответствующие фрагменты допускают дальнейшее продолжение. В обоих случаях такие продолжения оказываются противоречивыми.

Продолжению неизбежного фрагмента для $\rho = 3$ вершиной цвета 1 соответствует последовательность вида $1ab1cd1$. Согласно палитре цвета 1 полученный фрагмент можно продолжить вправо словом ab или ba. В первом случае совершенная раскраска восстанавливается до N_{12}, если все четыре цвета a, b, c и d различны; до N_{14}, если $a = c$, $b \neq d$; а при $a = c$ и $b = d$ получается раскраска $S(3)$. Продолжая фрагмент $1ab1cd1$ словом ba, получаем противоречие с цветовым составом окружения вершины цвета b. Случай $\rho = 3$ исследован полностью.

Для $\rho = 4$ неизбежный фрагмент имеет вид 10001000. Ему соответствует следующий фрагмент совершенной раскраски: $1abc1def$, причём

$1 \notin \{a, b, c, d, e, f\}$, цвета a, b и c попарно различны, как и цвета d, e и f. В палитре первого цвета есть элемент a, значит, $a = d$ или $a = e$. Пусть $a = d$. Анализируя окружение вершины цвета a, заключаем, что $b = e$ или $b = f$. В случае $b = f$ продолжение противоречиво, а для $b = e$ фрагмент однозначно восстанавливается до совершенной раскраски с периодом $[1abc] = [1234] = S(4)$. При $a = e$ все варианты продолжения противоречат составу окружения вершины цвета b.

Согласно лемме 5 значениям $\rho > 4$ соответствуют циклические раскраски. Теорема 1 доказана.

Заметим, что некоторые нестандартные раскраски после объединения двух или более цветов остаются совершенными, при этом результатом такой операции может быть как нестандартная, так и стандартная раскраска. Например, совершенную раскраску N_7 можно получить объединением второго и третьего цветов в раскраске N_9.

Следует также отметить следующий факт. Достаточное условие теоремы, т. е. свойство стандартных и нестандартных раскрасок быть совершенными, доказано в разд. 2 данной статьи. Доказательство теоремы, выполненное перебором, служит подтверждением необходимости этого условия, т. е. того, что других совершенных раскрасок нет.

5. Заключение

В работе описаны все совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа $Ci_\infty(2)$. Напомним, что в [11] была сформулирована гипотеза, содержащая полное описание совершенных раскрасок циркулянтного графа $Ci_\infty(n)$. Результат, описанный в данной работе, подтверждает её в случае $n = 2$. Для $n > 2$ вопрос остаётся открытым. Неясно также, будет ли техника, использованная авторами в этом исследовании, эффективна для $n > 2$. В то же время, полученное описание — одно из немногих известных полных описаний совершенных раскрасок бесконечных графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Васильева А. Ю., Сергеева И. В.** Дистанционно регулярные раскраски бесконечной квадратной решётки // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 3. С. 3–10.
2. **Августинович С. В., Лисицына М. А.** Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 2. С. 3–17.
3. **Лисицына М. А.** Совершенные 3-раскраски графов призмы и лестницы Мёбиуса // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 1. С. 28–36.

4. **Лисицына М. А., Августинович С. В.** Совершенные раскраски призмы // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 1116–1128.
5. **Паршина О. Г.** Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 2. С. 76–83.
6. **Пузынина С. А.** Совершенные раскраски вершин графа $G(Z^2)$ в три цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций, Сер. 2. 2005. Т. 12, № 1. С. 37–54.
7. **Хорошилова Д. Б.** О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 1. С. 80–92.
8. **Хорошилова Д. Б.** О параметрах совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 6. С. 82–89.
9. **Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.** Спектры графов. Киев: Наукова думка, 1984. 384 с.
10. **Axenovich M. A.** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. 2003. Vol. 268, No. 1–3. P. 31–48.
11. **Parshina O. G.** Perfect k-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances // Abs. Int. Conf. PhD Summer School "Groups and Graphs, Algorithms and Automata" (Yekaterinburg, Aug. 9–15, 2015) Yekaterinburg: UrFU Publ., 2015. P. 80.
12. **Puzynina S. A., Avgustinovich S. V.** On periodicity of two-dimensional words // Theor. Comput. Sci. 2008. Vol. 391. P. 178–187.

Лисицына Мария Александровна,
Паршина Ольга Геннадьевна

Статья поступила
2 декабря 2016 г.

Исправленный вариант —
30 марта 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2017. Volume 24, No. 3. P. 20–34

UDC 519.174.7 DOI: 10.17377/daio.2017.24.559

PERFECT COLORINGS OF THE INFINITE CIRCULANT GRAPH WITH DISTANCES 1 AND 2

M. A. Lisitsyna[1,a] and *O. G. Parshina*[2,3,b]

[1]Marshal Budyonny Military Academy of Telecommunications,
3 Tikhoretsky Ave., 194064 St. Petersburg, Russia
[2]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
[3]Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1,
43 Boulevard du 11 Novembre 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex, France
E-mail: [a]lisicinama@ngs.ru, [b]parolja@gmail.com

Abstract. A coloring of the vertex set in a graph is called *perfect* if all its identically colored vertices have identical multisets of colors of their neighbors. Refer as the *infinite circulant graph with continuous set of n distances* to the Cayley graph of the group $\mathbb{Z}$ with generator set $\{1, 2, \ldots, n\}$. We obtain a description of all perfect colorings with an arbitrary number of colors of this graph with distances 1 and 2. In 2015, there was made a conjecture characterizing perfect colorings for the infinite circulant graphs with a continuous set of n distances. The obtained result confirms the conjecture for $n = 2$. The problem is still open in the case of $n > 2$. Bibliogr. 12.

Keywords: perfect coloring, circulant graph, equitable partition.

REFERENCES

1. **S. V. Avgustinovich, A. Yu. Vasil'eva,** and **I. V. Sergeeva,** Distance regular colorings of the infinite rectangular grid, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **18**, No. 3, 3–10, 2011 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **6**, No. 3, 280–285, 2012.
2. **S. V. Avgustinovich** and **M. A. Lisitsyna,** Perfect 2-colorings of transitive cubic graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **18**, No. 2, 3–17, 2011 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **5**, No. 4, 519–528, 2011.
3. **M. A. Lisitsyna,** Perfect 3-colorings of prisms and Möbius ladders, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **20**, No. 1, 28–36, 2013 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **7**, No. 2, 215–220, 2013.
4. **M. A. Lisitsyna** and **S. V. Avgustinovich,** Perfect colorings of the prism graph, *Sib. Electron. Mat. Izv.,* **13**, 1116–1128, 2016 [Russian].

5. **O. G. Parshina,** Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with continuous set of distances, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **21**, No. 2, 76–83, 2014 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **8**, No. 3, 357–361, 2014.
6. **S. A. Puzynina,** Perfect colorings of vertices of the graph $G(Z^2)$ in three colors, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **12**, No. 1, 37–54, 2005 [Russian].
7. **D. B. Khoroshilova,** On two-colour perfect colourings of circular graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **16**, No. 1, 80–92, 2009 [Russian].
8. **D. B. Khoroshilova,** On the parameters of perfect 2-colorings of circulant graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **18**, No. 6, 82–89, 2011 [Russian].
9. **D. M. Cvetković, M. Doob,** and **H. Sachs,** *Spectra of Graphs: Theory and Application,* VEB Dtsch. Verl. Wiss., Berlin, 1980. Translated under the title *Spektry grafov: Teoriya i primenenie,* Naukova Dumka, Kiev, 1984 [Russian].
10. **M. A. Axenovich,** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius, *Discrete Math.,* **268**, No. 1–3, 31–48, 2003.
11. **O. G. Parshina,** Perfect k-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances, in *Abs. Int. Conf. PhD Summer Sch. "Groups and Graphs, Algorithms and Automata", Yekaterinburg, Russia, Aug. 9–15, 2015,* p. 80, UrFU Publ., Yekaterinburg, 2015. Available at http://g2a2.imm.uran.ru/doc/G2A2_Abstracts.pdf (accessed Apr. 16, 2017).
12. **S. A. Puzynina** and **S. V. Avgustinovich,** On periodicity of two-dimensional words, *Theor. Comput. Sci.,* **391**, 178–187, 2008.

Mariya A. Lisitsyna,
Olga G. Parshina

Received
2 December 2016

Revised
30 March 2017