ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2017. Том 24, № 3. С. 61–79

УДК 519.174.3 DOI: 10.17377/daio.2017.24.561

О КЁНИГОВЫХ ГРАФАХ ОТНОСИТЕЛЬНО P_4 *)

Д. Б. Мокеев[1,2]

[1]Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия,
[2]НИУ Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде,
ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия
E-mail: MokeevDB@gmail.com

Аннотация. Описывается класс графов, у которых для каждого порождённого подграфа максимальное число непересекающихся порождённых путей с четырьмя вершинами равно минимальной мощности множества вершин таких, что каждый такой путь содержит хотя бы одну из них. В основе описания лежит операция замены вершин кографами, применяемая к вершинам графов, полученных из двудольных графов подразбиением их цикловых рёбер. Библиогр. 13.

Ключевые слова: упаковка подграфов, вершинное покрытие подграфов, четырёхвершинный путь, кёнигов граф.

Введение

Пусть $\mathcal{X}$ — множество графов. Множество попарно не пересекающихся порождённых подграфов графа G, изоморфных графам из $\mathcal{X}$, называется *$\mathcal{X}$-упаковкой G*. Множество вершин графа G, покрывающее все порождённые подграфы графа G, изоморфные графам из $\mathcal{X}$, называется *вершинным покрытием G относительно $\mathcal{X}$*, или просто *$\mathcal{X}$-покрытием.* Граф называется *кёниговым* относительно $\mathcal{X}$, если в любом его порождённом подграфе наибольшая мощность $\mathcal{X}$-упаковки равна наименьшей мощности $\mathcal{X}$-покрытия. Класс всех кёниговых графов относительно множества $\mathcal{X}$ обозначаем через $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Если множество $\mathcal{X}$ состоит из единственного графа H, то будем говорить об H-упаковках, H-покрытиях и кёниговых графах относительно H.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16–31–00109, 16–01–00599, 17–01–00710), гранта Президента РФ МК–4819.2016.1, Лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ и гранта Правительства РФ (договор 11.G34.31.0057).

Задачам об $\mathcal{X}$-упаковке и $\mathcal{X}$-покрытии графа посвящено немало работ, особенно их алгоритмическим аспектам (см., например, [2, 9, 13]). В частности, известно, что задача о паросочетании (P_2-упаковке) полиномиально разрешима [8], а для любого графа H, имеющего компоненту связности с тремя или более вершинами, задача об H-упаковке, напротив, NP-полна [10]. Представляется перспективным выделение новых случаев эффективной разрешимости задач о $\mathcal{X}$-упаковке и $\mathcal{X}$-покрытии в рамках метода «критического» класса графов, развиваемого в работах В. Е. Алексеева и Д. С. Малышева (см., например, [3, 4]).

Понятие кёнигова графа относительно $\mathcal{X}$ было введено в работе [1]. Классическая теорема Кёнига эквивалентна утверждению, что все двудольные графы принадлежат классу $\mathcal{K}(P_2)$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{K}(P_2)$ в действительности совпадает с классом двудольных графов. Для любого множества $\mathcal{X}$ класс $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ является наследственным, т. е. замкнутым относительно операции удаления вершин, и, следовательно, может быть описан множеством минимальных запрещённых подграфов (минимальных по отношению «быть порождённым подграфом» графов, не принадлежащих $\mathcal{K}(\mathcal{X})$). В [7] найдено такое описание для класса $\mathcal{K}(\mathcal{C})$, где $\mathcal{C}$ — множество всех простых циклов.

В [1] было начато исследование класса $\mathcal{K}(P_3)$, а в [5] получены два его исчерпывающих описания. Одно из них — в терминах запрещённых подграфов. Множество минимальных запрещённых подграфов для этого класса состоит из нескольких бесконечных семейств и трёх отдельных графов. Другое описание использует операции подразбиения рёбер и замены вершин кликами. Класс графов, которые можно получить, применяя определённым образом эти операции к произвольным мультиграфам, совпадает с $\mathcal{K}(P_3)$. В [12] описано множество запрещённых подграфов для класса $\mathcal{K}(P_4)$, которое состоит из нескольких бесконечных семейств и 64 отдельных графов, и высказано предположение, что оно является полным множеством минимальных запрещённых подграфов для этого класса. В настоящей работе делается попытка применить второй подход к описанию класса $\mathcal{K}(P_4)$. Будет показано, что всякий граф, который можно получить, применяя определённым образом операции подразбиения рёбер и замены вершин кографами к произвольному двудольному графу, является кёниговым относительно P_4. Множество таких графов не совпадает с $\mathcal{K}(P_4)$, но образует значительное его подмножество.

Далее кёниговы графы относительно P_4 будем называть просто кёниговыми.

В разд. 1 описываются правила замены вершин кографами, вводится понятие R-расширения графа и доказывается, что любое R-расширение любого леса является кёниговым графом. В разд. 2 добавляется операция подразбиения рёбер, определяется понятие SR-расширения (S — от subdivision, R — от replacement) и доказывается, что SR-расширение любого двудольного графа, отличного от простого цикла, является кёниговым графом. В разд. 3 аналогичное утверждение доказывается для SR-расширений циклов.

Наибольшее число элементов в P_4-упаковке графа G обозначим через $\mu_{P_4}(G)$, а минимальное число вершин в его P_4-покрытии — через $\beta_{P_4}(G)$.

Порождённый подграф, изоморфный P_4, назовём *квартетом*. Обозначим через (v_1, v_2, v_3, v_4) квартет, состоящий из вершин v_1, v_2, v_3, v_4. Обозначим через $V(G)$ множество вершин графа G, а через $|G|$ — число вершин в нём. Окрестность вершины v обозначим через $N(v)$.

Пусть G — граф, $A \subseteq V(G)$. Обозначим через $G[A]$ подграф, порождённый множеством A, через $G \setminus A$ — граф, полученный из G удалением всех вершин множества A. Иными словами, $G \setminus A = G[V(G) \setminus A]$.

Рассматривая цикл C_n, предполагаем, что его вершины пронумерованы вдоль цикла числами $0, 1, \ldots, n-1$. При этом арифметические операции с номерами вершин выполняются по модулю n. Каждый класс вычетов номеров вершин по модулю 4 называем 4-*классом*.

1. R-расширение

В этом разделе определяется процедура R-расширения, которая является одним из основных инструментов для построения SR-графов, определяемых в разд. 2.

Определение 1. Граф G назовём *P_4-связным*, если для любой его пары вершин x, y существует последовательность квартетов, в которой каждые два соседних квартета пересекаются, первый содержит x, а последний — y.

Компонентой P_4-связности назовём максимальный по включению P_4-связный подграф. Граф G является кёниговым тогда и только тогда, когда каждая компонента P_4-связности G — кёнигов граф.

Поскольку P_4 — самодополнительный граф, класс кёниговых графов замкнут относительно дополнения графов. Иными словами, справедлива

Лемма 1. *Граф G кёнигов тогда и только тогда, когда $\overline{G}$ кёнигов.*

Кограф можно определить как граф, не содержащий квартетов [6]. *Расщепляемым графом* называется граф, множество вершин которого

можно разбить на клику и независимое множество. *Пороговый граф* можно определить как расщепляемый граф, не содержащий квартетов [11].

Лемма 2 [11]**.** *Любой пороговый граф допускает линейное упорядочение вершин его клики и независимого множества по включению их окрестностей.*

Определение 2. Операция *замены графом H вершины x* графа G состоит в следующем.

1. Эта вершина удаляется из графа G.

2. К графу G добавляется несколько новых вершин, соединённых между собой так, что они порождают подграф, изоморфный H.

3. Каждая новая вершина соединена ребром со всеми вершинами множества $N(x)$ в исходном графе.

Множество вершин A называется *однородным*, если любая вершина множества $V(G) \setminus A$ либо смежна со всеми вершинами A, либо несмежна со всеми вершинами A.

Определение 3. *Однородным кографом* графа G будем называть максимальный по включению подграф, являющийся кографом, порождённый однородным множеством в G. Будем называть однородный кограф H графа G *тривиальным*, если $|H| = 1$, и *нетривиальным* — в противном случае.

Определение 4. Пусть граф G получен из некоторого графа H с помощью замен произвольными кографами некоторых вершин. Будем называть *секциями* кографы, которыми были заменены вершины исходного графа. Каждая вершина графа H, не подвергшаяся замене, считается в G отдельной секцией. Будем называть секцию *тривиальной*, если она содержит одну вершину, и *нетривиальной* — в противном случае.

Отметим, что любая секция является однородным кографом или частью однородного кографа. Поэтому каждый квартет содержит не более одной вершины в каждой секции.

Лемма 3. *Любой однородный кограф либо полностью содержится в наименьшем P_4-покрытии, либо не пересекается с ним.*

Доказательство. Пусть S — однородный кограф графа G. Предположим, что S содержит вершину a, принадлежащую какому-нибудь наименьшему P_4-покрытию, и вершину b, не принадлежащую ему. Отметим, что поскольку S является однородным кографом, не существует квартета, содержащего a и b. Так как P_4-покрытие наименьшее, в G существует квартет, содержащий вершину a, в котором три остальных

вершины не принадлежат данному P_4-покрытию (иначе эта вершина может быть удалена из P_4-покрытия и оно не наименьшее). Тогда три другие вершины этого квартета вместе с вершиной b образуют непокрытый квартет, что противоречит условию P_4-покрытия. Лемма 3 доказана.

Следствие 1. *Пусть граф G получен из некоторого графа H с помощью замен кографами вершин. Тогда каждое наименьшее P_4-покрытие графа G состоит из целых секций.*

Определение 5. Назовём порождённый путь графа *висячим*, если одна из его вершин имеет степень 1, а остальные — не более 2. Отметим, что в графе может существовать не более одной вершины, смежной с вершинами висячего пути, но не принадлежащей ему. Такую вершину назовём *контактной*.

Определение 6. Операция *замены кографом висячего пути из двух вершин* состоит в следующем.

1. Вершины этого пути удаляются из графа.

2. К графу добавляются вершины и рёбра некоторого кографа.

3. Некоторые (но не все) вершины кографа соединяются с контактной вершиной так, что подграф, порождённый контактной и новыми вершинами, не содержит квартетов.

4. Если степень контактной вершины в исходном графе не более двух, то она также может быть заменена кографом.

Пусть граф G получен из некоторого графа H заменой висячего пути из двух вершин с контактной вершиной x кографом, причём Y — вершины добавленного кографа. Для графа G положим $A = Y \cap N(x)$ и $B = Y \setminus A$. Предположим, что существуют смежные вершины $u, v \in B$, а также $a \in A$ такие, что u смежна с a, в то время как v не смежна с a. Тогда (v, u, a, x) является квартетом, что противоречит определению соответствующей операции замены. Таким образом, каждая компонента связности графа $G[B]$ является однородным кографом в графе G.

Аналогично доказывается, что каждая компонента связности графа $\overline{G[A]}$ также является однородным кографом в графе G.

Таким образом, кограф, которым заменяется висячий путь из двух вершин, можно получить из некоторого порогового графа заменой его вершин кликами. При этом вершины, смежные с контактной (обозначим это множество через K), порождают клику, а не смежные с ней (обозначим это множество через L) — независимое множество.

По лемме 2 вершины каждого из множеств K и L можно линейно упорядочить по включению их окрестностей. Пусть $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$

и $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_q\}$, так что $N(k_{i+1}) \subseteq N(k_i)$ для любого $i \in \{1, \ldots, p-1\}$ и $N(l_j) \subseteq N(l_{j+1})$ для любого $j \in \{1, \ldots, q-1\}$.

Все кографы, заменяющие вершины $k_1, k_2, \ldots, k_p$ и $l_1, l_2, \ldots, l_q$, а также кограф, заменяющий контактную вершину на шаге 4, считаются отдельными секциями.

Определение 7. Операция *замены кографом висячего пути из трёх вершин* состоит в следующем.

1. Вершины этого пути удаляются из графа.

2. К графу добавляются вершины и рёбра некоторого кографа.

3. Некоторые вершины кографа соединяются с контактной вершиной так, что подграф, порождённый контактной и новыми вершинами, содержит квартет.

Каждую вершину заменяющего кографа, а также контактную вершину будем считать отдельными секциями.

Определение 8. Вершину графа степени 3 или более будем называть *тяжёлой*, если в её окрестности есть не менее трёх вершин степени больше 1, и *полутяжёлой* в противном случае. Вершины степени 1 и 2 будем называть *лёгкими*.

Определение 9. *R-расширение* графа, в котором длины всех циклов кратны 4, состоит в следующем.

1. Каждая лёгкая вершина, не входящая ни в один цикл, может быть заменена произвольным кографом.

2. Каждая лёгкая цикловая вершина v может быть заменена кографом при условии, что ни в одном цикле, содержащем v, нет тяжёлой или полутяжёлой вершины, расстояние от которой до вершины v вдоль цикла кратно 4, и нет полутяжёлой вершины, расстояние от которой до вершины v вдоль цикла сравнимо с 2 по модулю 4.

3. В полученном графе висячие пути из 2 вершин могут быть заменены кографами.

4. В полученном графе висячие пути из 3 вершин могут быть заменены кографами.

Полученный граф назовём *R-расширением* графа G.

Замечание 1. Отметим, что мощность любой P_4-упаковки не превосходит мощности любого P_4-покрытия. Следовательно, для доказательства равенства $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G)$ достаточно найти равномощные P_4-упаковку и P_4-покрытие графа G.

Лемма 4. *Любое R-расширение леса является кёниговым графом.*

Доказательство. Пусть G — R-расширение леса T. Секцию G, на которую заменена вершина x леса T, обозначим через $S(x)$. В случае если двухвершинный висячий путь x, y, где $\deg(x) = 1$, $\deg(y) = 2$, заменён кографом, для соответствующих секций G примем следующие обозначения: $S(x \,|\, l_1), S(x \,|\, l_2), \ldots, S(x \,|\, l_r)$ — для секций, полученных из вершин $l_1, l_2, \ldots, l_r$, и $S(y \,|\, k_1), S(y \,|\, k_2), \ldots S(y \,|\, k_p)$ — для секций, полученных из вершин $k_1, k_2, \ldots, k_p$, соответственно.

Любой порождённый подграф графа G также является R-расширением леса. Действительно, пусть граф H получен из G удалением некоторых его вершин. Если ни одна секция графа G не была удалена полностью, то H, очевидно, является R-расширением леса T. Если же в H какие-нибудь секции G отсутствуют полностью, то его базовый граф является порождённым подграфом T, а значит, тоже является лесом. Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать, что в любом R-расширении леса выполняется равенство величин μ_{P_4} и β_{P_4}.

Пусть в T существует два листа, смежных с одной и той же вершиной. Тогда, очевидно, T может быть получен из леса T' меньшего размера заменой листа графом $\overline{K}_2$. Иными словами, соответствующие секции в G могут быть объединены в одну. А значит, G может быть получен из T' R-расширением. Таким образом, достаточно рассмотреть только случай, когда в T каждая вершина смежна с не более чем одним листом.

Доказательство проведём индукцией по числу квартетов в графе G. В качестве базы индукции рассмотрим случай, когда T является кографом. Тогда G также является кографом и $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G) = 0$.

Предположим теперь, что для любого собственного порождённого подграфа G' графа G выполняется $\mu_{P_4}(G') = \beta_{P_4}(G')$. Возможны следующие пять случаев.

Случай 1: T имеет компоненту связности T_0, являющуюся квартетом. Из графа G удалим все его секции, возникшие при замене вершин компоненты связности T_0. Получим граф G'. По предположению индукции $\mu_{P_4}(G') = \beta_{P_4}(G')$. Тогда

$$\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G') + \min\bigl\{|S(x_1)|, |S(x_2)|, |S(x_3)|, |S(x_4)|\bigr\}.$$

Случай 2: в T имеется висячий путь x_1, x_2, x_3 с контактной вершиной y, заменённый кографом. Выберем из этого кографа такие вершины a_1, a_2, a_3, что четвёрка (a_1, a_2, a_3, y) образует квартет в G. Рассмотрим граф $G' = G \setminus \{a_1, a_2, a_3, y\}$. Пусть M — наибольшая P_4-упаковка, а C — наименьшее P_4-покрытие графа G'. По предположению индукции $|M| = |C|$, тогда $M \cup \bigl\{(a_1, a_2, a_3, y)\bigr\}$ — P_4-упаковка, а $C \cup \{y\}$ — P_4-покрытие той же мощности графа G.

Случай 3: в T имеется такой квартет (x_1, x_2, x_3, x_4), что $\deg(x_1) = 1$, $\deg(x_2) = 2$, $\deg(x_3) \geqslant 3$, $\deg(x_4) = 1$ или $\deg(x_4) = 2$ и x_4 смежна с листом. Выберем вершины $a_1 \in S(x_1)$, $a_2 \in S(x_2)$ и $a_4 \in S(x_4)$. Заметим, что если висячий путь x_1, x_2 или висячий путь из двух вершин, содержащий x_4, заменён кографом, то необходимо выбрать вершины $a_1 \in S\bigl(l_1^{x_1}\bigr)$, $a_2 \in S\bigl(k_1^{x_2}\bigr)$ для первого случая и $a_4 \in S\bigl(k_1^{x_4}\bigr)$ для второго. Рассмотрим граф $G' = G \setminus \{a_1, a_2, x_3, a_4\}$. Пусть M — наибольшая P_4-упаковка, а C — наименьшее P_4-покрытие графа G'. По предположению индукции $|M| = |C|$. Теперь $M \cup \bigl\{(a_1, a_2, x_3, a_4)\bigr\}$ — P_4-упаковка, а $C \cup \{x_3\}$ — P_4-покрытие той же мощности графа G.

Случай 4: в T имеется такой квартет (x_1, x_2, x_3, x_4), что $\deg(x_1) = 1$, $\deg(x_2) = \deg(x_3) = 2$, $\deg(x_4) \geqslant 2$, причём каждая из вершин висячего пути x_1, x_2 заменена кографом. Выберем вершины $a_1 \in S(x_1)$, $a_2 \in S(x_2)$, $a_3 \in S(x_3)$ и $a_4 \in S(x_4)$. Рассмотрим граф $G' = G \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Пусть M — наибольшая P_4-упаковка, а C — наименьшее P_4-покрытие графа G'. По предположению индукции $|M| = |C|$. Если квартет (a_1, a_2, a_3, a_4) добавить в M, то получится P_4-упаковка графа G мощности $|P| + 1$. Покажем, что в G имеется P_4-покрытие той же мощности.

Непустые множества среди $S(x_i) \setminus \{a_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, являются секциями в G'. Если для некоторого i имеет место $S(x_i) \setminus \{a_i\} \subseteq C$ (такое множество может быть только одно), то $C \cup \{a_i\}$ — P_4-покрытие графа G. В противном случае среди этих множеств есть пустые. Пусть i^* — наибольшее i, при котором $|S(x_i)| = 1$. Тогда $C \cup \{a_{i^*}\}$ — P_4-покрытие графа G.

Случай 5: в T имеется такой квартет (x_1, x_2, x_3, x_4), что $\deg(x_1) = 1$, $\deg(x_2) = \deg(x_3) = 2$, $\deg(x_4) \geqslant 2$, причём висячий путь x_1, x_2 заменён кографом. Выберем вершины $a_1 \in S(x_1 \,|\, l_1)$, $a_2 \in S(x_2 \,|\, k_1)$, $a_3 \in S(x_3)$ и $a_4 \in S(x_4)$. Рассмотрим граф G', полученный из G удалением вершин a_1, a_2, a_3, a_4. Пусть M — наибольшая P_4-упаковка, а C — наименьшее P_4-покрытие графа G'. По предположению индукции $|M| = |C|$. Если квартет (a_1, a_2, a_3, a_4) добавить в M, то получится P_4-упаковка графа G мощности $|P| + 1$. Покажем, что в G имеется P_4-покрытие той же мощности. Возможны следующие подслучаи.

5.1. $S(x_1 \,|\, l_1) \setminus \{a_1\}$ непусто и включено в C, тогда $C \cup \{a_1\}$ является P_4-покрытием графа G.

5.2. $S(x_1 \,|\, k_1) \setminus \{a_2\}$ непусто и включено в C, тогда $C \cup \{a_2\}$ является P_4-покрытием графа G.

5.3. $S(x_i) \setminus \{a_i\}$, где $i \in \{3, 4\}$, непусто и включено в C, тогда $C \cup \{a_i\}$ является P_4-покрытием графа G.

5.4. Ни одно из множеств $S(x_1\,|\,l_1)\setminus\{a_1\}$, $S(x_2\,|\,k_1)\setminus\{a_2\}$ и $S(x_i)\setminus\{a_i\}$, где $i \in \{3,4\}$, не включено в C, тогда среди них есть пустые. Рассмотрим все варианты.

(1) $|S(x_4)| = 1$, тогда $C \cup \{a_4\}$ — P_4-покрытие графа G.

(2) $|S(x_4)| > 1$, $|S(x_3)| = 1$, тогда $C \cup \{a_3\}$ — P_4-покрытие графа G.

(3) $|S(x_i)| > 1$, где $i \in \{3,4\}$, $|S(x_2\,|\,k_1)| = 1$. Тогда каждый квартет графа G, проходящий через $S(x_4)$ и $S(x_3)$, проходит через какую-то вершину C или через a_2, а каждый квартет, проходящий через $S(x_1\,|\,l_1)$, обязательно содержит a_2. Все остальные квартеты графа G совпадают с квартетами графа G'. Поэтому $C \cup \{a_2\}$ — P_4-покрытие графа G.

(4) $|S(x_i)| > 1$, где $i \in \{3,4\}$, $|S(x_2\,|\,k_1)| > 1$, $|S(x_1\,|\,l_1)| = 1$. Тогда каждый квартет графа G, проходящий через $S(x_4)$, $S(x_3)$ и $S(x_2\,|\,k_1)$, проходит через какую-то вершину C или через a_1. Поэтому $C \cup \{a_1\}$ — P_4-покрытие графа G.

Итак, для любого R-расширения леса выполняется равенство величин μ_{P_4} и β_{P_4}. Значит, любой такой граф кёнигов. Лемма 4 доказана.

Следствие 2. *Дополнение любого R-расширения леса принадлежит классу $\mathcal{K}(P_4)$.*

2. SR-графы

В этом разделе опишем процедуру SR-расширения и класс SR-графов. Также докажем, что SR-расширение двудольных графов, отличных от простых циклов, всегда даёт кёниговы графы. Теорема об SR-расширениях простых циклов будет сформулирована и доказана в следующем разделе.

Определение 10. Пусть H — двудольный граф. Процедура *SR-расширения* H состоит в следующем.

1. Каждое цикловое ребро (принадлежащее какому-нибудь циклу) графа H подразбить одной вершиной.

2. К полученному графу применить процедуру R-расширения.

Будем называть полученный граф *SR-расширением* графа H. Назовём *SR-графом* граф, который является SR-расширением произвольного двудольного графа, а также его дополнение.

Теорема 1. *Любое P_4-связное SR-расширение двудольного графа, отличного от простого цикла, является кёниговым графом.*

Доказательство. Рассмотрим P_4-связный граф, который получен SR-расширением двудольного графа. Поскольку базовый граф не является простым циклом, каждый его цикл содержит хотя бы одну по-

лутяжёлую или тяжёлую вершину. Следовательно, в силу определения R-расширения хотя бы один 4-класс любого преобразованного цикла состоит только из тривиальных секций. Чтобы обеспечить замкнутость относительно удаления вершин, расширим рассматриваемый класс графов, добавив R-расширения простых циклов из $4k$ вершин, в которых хотя бы один 4-класс состоит только из тривиальных секций.

Итак, пусть G — P_4-связный граф, полученный SR-расширением произвольного двудольного графа H, причём хотя бы один 4-класс любого преобразованного цикла состоит только из тривиальных секций. Аналогично доказательству леммы 4, не уменьшая общности, будем рассматривать только такие графы, в которых каждая вершина смежна с не более чем одной висячей вершиной.

Любая компонента P_4-связности порождённого подграфа графа G также является SR-графом с заданными свойствами. Действительно, пусть граф H получен из G удалением некоторых его вершин. Обозначим через B граф, из которого G получен R-расширением. Если ни одна секция графа G не была удалена полностью, то H, очевидно, является R-расширением графа B, а значит, SR-расширением того же двудольного графа, из которого получен G. Если же в H какие-нибудь секции G отсутствуют полностью, то H является R-расширением какого-то подграфа B' графа B. Все циклы графа B' являются циклами и в B. Поэтому граф B' также может быть получен из некоторого двудольного графа подразбиением каждого из его цикловых рёбер одной вершиной. А значит, H является SR-расширением этого двудольного графа. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что $\mu(G) = \beta(G)$.

Доказательство проведём индукцией по числу циклов в графе G. В качестве базы индукции рассмотрим случай, когда H — дерево. По лемме 4 в этом случае $\mu(G) = \beta(G)$.

Предположим, что для любого собственного порождённого подграфа G' графа G выполняется $\mu_{P_4}(G') = \beta_{P_4}(G')$. Возможны следующие три случая.

Случай 1: в H имеется висячий путь из двух вершин. Здесь равенство $\mu(G) = \beta(G)$ доказывается аналогично доказательству леммы 4.

Случай 2: в H нет висячих путей из двух вершин, но имеется блок X, содержащий ровно один шарнир v_0, являющийся тяжёлой вершиной (могут содержаться также лёгкие шарниры). Каждая вершина X, кроме, быть может, висячих, является цикловой.

Обозначим через X' подграф графа G, полученный из X, а через X_0 — подграф графа H, полученный из X удалением всех висячих вер-

шин, и построим в нём наибольшее паросочетание M_0 и наименьшее вершинное покрытие C_0. Поскольку X_0 не содержит висячих вершин, каждому ребру $m_i \in M_0$ можно поставить в соответствие смежное ребро m_i', не входящее в это паросочетание. В процессе процедуры SR-расширения каждое ребро подразбивается одной вершиной. Для каждого $m_i \in M_0$ возьмём квартет, состоящий из вершин, инцидентных m_i, и вершин, добавленных при подразбиении рёбер m_i и m_i'. Очевидно, что полученное множество M_1 квартетов составляет P_4-упаковку графа X.

Заметим, что все вершины в доле графа X, содержащей v_0, составляют отдельные секции в графе G. Заметим также, что вершины другой доли этого графа могут быть заменены нетривиальными кографами только в том случае, если все они не являются тяжёлыми в графе H. Но в этом случае доля, содержащая v_0, является одним из наименьших вершинных покрытий графа X_0. Тем самым можно выбрать множество C_0 так, что его вершины составляют отдельные секции в графе G. В дальнейшем будем рассматривать только такие P_4-покрытия. Таким образом, C_0 является P_4-покрытием графа X', причём $|C_0| = |M_1|$.

Если v_0 принадлежит какому-нибудь наименьшему вершинному покрытию графа X_0, то в качестве C_0 рассмотрим именно такое покрытие.

Пусть вершина v_0 не принадлежит никакому наименьшему вершинному покрытию графа X_0 и одно из рёбер M_0 инцидентно ей (заметим, что такое паросочетание всегда существует). Тогда найдётся чередующийся путь из вершины v_0 в какую-нибудь вершину a, не инцидентную ни одному ребру из M_0. Заменой рёбер данного пути, входящих в M_0, рёбрами этого же пути, не входящими в него, получим новое наибольшее паросочетание M_0' графа X_0. Каждому новому ребру $m_i \in M_0'$ поставим в соответствие ребро m_i' этого же чередующегося пути в направлении от вершины v_0, а ребру, инцидентному a, поставим в соответствие другое ребро, инцидентное той же вершине. Таким образом, одно из рёбер, инцидентное v_0, не поставлено в соответствие ни одному ребру паросочетания. Обозначим через v_1 вершину, подразбивающую его в процессе процедуры SR-расширения.

Рассмотрим граф G', полученный из G удалением вершин подграфа X', если v_0 принадлежит какому-нибудь наименьшему вершинному покрытию графа X_0, и подграфа X' за исключением вершин v_0 и $S(v_1)$ в противном случае. Пусть M — наибольшая P_4-упаковка, а C — наименьшее P_4-покрытие графа G'. По предположению индукции $|M| = |C|$. Тогда $M \cup M_1$ является P_4-упаковкой, а $C \cup C_0$ — P_4-покрытием графа G, поскольку $|C_0| = |M_1|$ и $\mu(G) = \beta(G)$.

Случай 3: в H нет шарниров, являющихся тяжёлыми вершинами. Тогда H содержит ровно 1 блок X такой, что $|X| \geqslant 4$. Обозначим через X' подграф графа G, полученный из X. Аналогично предыдущему случаю выберем в нём наибольшую P_4-упаковку M_1 и наименьшее P_4-покрытие C_0. Легко видеть, что C_0 является P_4-покрытием, а M_1 — P_4-упаковкой графа G, причём $|C_0| = |M_1|$. Теорема 1 доказана.

3. SR-расширение простых циклов

В этом разделе рассматриваются SR-расширения простых циклов чётной длины и показано, какие из них являются кёниговыми, а также сформулирована общая теорема об SR-графах. Заметим, что в простом цикле нет висячих путей. Это означает, что любой рассматриваемый граф может быть получен из $4k$-вершинного цикла, где $k \geqslant 2$, заменой его вершин произвольными (возможно, одновершинными) кографами.

Для краткости будем называть *SR-циклом* граф, полученный SR-расширением простого цикла чётной длины.

Обозначим через $D(k_1, k_2, k_3, k_4)$ набор графов, полученных из цикла длины $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ заменой произвольными двухвершинными кографами (K_2 или O_2) вершин с номерами $0, k_1, k_1 + k_2, k_1 + k_2 + k_3$. Обозначим через $\mathcal{D}$ множество таких графов G, что $G \in D(k_1, k_2, k_3, k_4)$ или $\overline{G} \in D(k_1, k_2, k_3, k_4)$, где k_1, k_2, k_3, k_4 удовлетворяют одному из двух наборов условий:

1) $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \equiv k_4 \equiv 1 \pmod 4$, при этом $k_2, k_3, k_4 \geqslant 5$;

2) $k_1 \equiv 1$, $k_2 \equiv k_4 \equiv 2$, $k_3 \equiv 3 \pmod 4$, при этом $k_1 \geqslant 5$.

Нетрудно видеть, что такие графы являются SR-циклами. Однако в [12] доказано, что графы множества $\mathcal{D}$ запрещённые для класса $\mathcal{K}(P_4)$. Далее будет показано, что отсутствие порождённых подграфов данного типа является достаточным условием принадлежности SR-цикла к классу кёниговых графов.

Перед тем как сформулировать теорему об SR-циклах, рассмотрим один частный случай.

Лемма 5. *Любой SR-цикл из 8 секций является кёниговым графом.*

Доказательство. Рассмотрим граф G, полученный из C_8 заменой вершин кографами. Любой его порождённый подграф является также SR-циклом из 8 секций либо SR-расширением леса. В последнем случае по лемме 4 он кёнигов. Таким образом, достаточно доказать, что в G существуют равномощные P_4-покрытие и P_4-упаковка.

Рассмотрим какую-нибудь наибольшую P_4-упаковку M графа G. Назовём секцию графа G *полной* относительно M, если все её вершины принадлежат квартетам выбранной P_4-упаковки. Здесь и далее через v_i обозначаем произвольную вершину секции S_i. Будем говорить, что квартет *начинается в секции* S_i, если он состоит из вершин $(v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3})$.

Если существует такая наибольшая P_4-упаковка M, что две секции одного 4-класса являются полными относительно M, то объединение этих двух секций C является P_4-покрытием, причём $|C| = |M|$.

Рассмотрим случай, когда для любой P_4-упаковки хотя бы одна секция каждого 4-класса не является полной. Итак, пусть M — наибольшая P_4-упаковка. С точностью до циклического сдвига возможен только один случай: секции S_0, S_1, S_3, S_6 не являются полными относительно M. Заметим, что S_2, S_7 полны относительно M, иначе P_4-упаковка M не является наибольшей. По этой же причине полной является хотя бы одна из секций S_4, S_5. Не уменьшая общности, предположим, что S_4 полна относительно M.

Пусть M содержит квартет (v_7, v_0, v_1, v_2). Возьмём вершину $x_3 \in S_3$, не входящую ни в один квартет M. Тогда множество

$$M' = M \setminus \{(v_7, v_0, v_1, v_2)\} \cup \{(v_0, v_1, v_2, x_3)\}$$

также является P_4-упаковкой, причём $|M'| = |M|$. Но M' содержит непокрытый квартет, начинающийся в S_6, содержащий вершину v_7. Тогда P_4-упаковка M', а следовательно, и M не является наибольшей. Таким образом, M не содержит квартетов, начинающихся в S_7.

Аналогично доказывается, что M не содержит квартетов, начинающихся в S_2, S_4, а также в S_1 при условии, что S_5 не полна. Если же S_5 полна относительно M, то не существует одновременно квартетов с началом в S_1 и S_5, иначе их можно заменить в M квартетами, начинающимися в S_0 и S_6 соответственно, тем самым образовав непокрытый квартет с началом в S_3.

Итак, P_4-упаковка M не содержит квартетов, начинающихся в секциях S_2, S_4 и S_7. Пусть M не содержит также квартетов, начинающихся в S_1, тогда любой квартет M содержит ровно одну вершину множества $C = S_2 \cup S_4 \cup S_7$. В противном случае M не содержит квартетов, начинающихся в S_5. Тогда в качестве C возьмём $S_2 \cup S_5 \cup S_7$. В обоих случаях C является P_4-покрытием, причём $|C| = |M|$. Лемма 5 доказана.

Теперь сформулируем и докажем основную теорему об SR-циклах.

Теорема 2. *SR-цикл кёнигов тогда и только тогда, когда не содержит порождённых подграфов из множества $\mathcal{D}$.*

Доказательство. Пусть граф $G \in Free(\mathcal{D})$ является SR-циклом с $4n$ секциями. Можно сказать, что G получен из $4n$-вершинного простого цикла заменой вершин кографами.

Любой порождённый подграф SR-цикла может быть получен SR-расширением того же исходного цикла либо леса. В последнем случае этот подграф кёнигов по лемме 4. Таким образом, достаточно доказать, что у любого SR-цикла, удовлетворяющего условиям теоремы, существуют P_4-покрытие и P_4-упаковка одинаковой мощности.

Доказательство проведём индукцией по числу вершин в графе G. Наименьшее число вершин в нём равно $4n$, в этом случае он совпадает с C_{4n} и, очевидно, является кёниговым.

Если в SR-цикле есть 4-класс, в котором все секции тривиальны, то вершины из этого класса образуют P_4-покрытие мощности n. Очевидно, что имеется и P_4-упаковка той же мощности.

Допустим, что в каждом 4-классе есть большая секция. Выберем по одной большой секции из каждого 4-класса. Пусть (k_1, k_2, k_3, k_4) — набор расстояний между этими секциями вдоль цикла. Легко видеть, что для этого набора расстояний по модулю 4 имеется ровно три возможности с точностью до циклического сдвига: $(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 2), (3, 3, 3, 3)$. Рассмотрим эти три случая.

Случай 1: $(k_1, k_2, k_3, k_4) \equiv (1, 1, 1, 1) \pmod 4$. Так как запрещённые подграфы отсутствуют, среди k_1, k_2, k_3, k_4 имеется не менее двух единиц. Возможны следующие подслучаи с точностью до симметрии и циклического сдвига.

1.1. $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Это значит, что в G существует 4 подряд идущих нетривиальных секции. Отметим, что если G не содержит тривиальных секций, то $n = 2$, иначе имеется запрещённый подграф. Но при $n = 2$ граф G является кёниговым по лемме 5. Пусть секция S_0 тривиальна, а S_1, S_2, S_3, S_4 нетривиальны. Выберем по одной вершине $v_i \in S_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Пусть $G' = G \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. По предположению индукции в G' существуют P_4-упаковка M' и P_4-покрытие C' такие, что $|M'| = |C'|$. Заметим, что C' содержит по крайней мере одну секцию из $S_i \setminus \{v_i\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, но не более двух. Если таких секций две, то S_0 не включена в C' (иначе C' не является наименьшей). Тогда заменой в C' секции с наименьшим номером на S_0 получим наименьшее P_4-покрытие, включающее ровно одну из секций $S_i \setminus \{v_i\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Добавив к C' удалённую вершину соответствующей секции, а к M' — квартет (v_1, v_2, v_3, v_4), получим P_4-покрытие и P_4-упаковку графа G одинаковой мощности.

1.2. $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 > 1$, $k_4 > 1$ и в G нет четырёх подряд идущих нетривиальных секций. Пусть секции S_1, S_2, S_3 нетривиальны, а секции S_0, S_4 тривиальны. Рассмотрим граф G', полученный из G удалением секций S_0, S_1, S_2, S_3, S_4. По предположению индукции в G' существуют P_4-упаковка M' и P_4-покрытие C' такие, что $|M'| = |C'|$. Тогда множество $C = C' \cup S_{i-1} \cup S_{i+3}$ является P_4-покрытием графа G, а $M = M' \cup \big\{(u_0, u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3, v_4)\big\}$, где $u_i, v_i \in S_i$, $u_i \neq v_i$ для всех $i \in \{0, \ldots, 4\}$, — его P_4-упаковка. Поскольку секции S_{i-1} и S_{i+3} тривиальны, получаем

$$|M| = |M'| + 2 = |C'| + 2 = |C|.$$

1.3. $k_1 = k_3 = 1$, $k_2 > 1$, $k_4 > 1$ и в G нет трёх подряд идущих нетривиальных секций. Пусть $k_2 = 4l + 1$, тогда $k_4 = n - 4l - 3$. Пронумеруем секции G таким образом, чтобы $S_0, S_1, S_{4l+2}, S_{4l+3}$ были нетривиальны. Тогда для $1 \leqslant i \leqslant l$ секции S_{4i+1} и S_{4i-2} тривиальны. Иначе G содержит порождённый подграф из $\mathcal{D}$. Аналогично для $l+1 \leqslant j \leqslant n-1$ секции S_{4j} и S_{4j+3} тривиальны. Рассмотрим P_4-покрытие

$$C = \bigcup_{i=1}^{l} S_{4i-2} \cup S_{4l+1} \cup \bigcup_{j=l+1}^{n-1} S_{4j} \cup S_{4n-1}$$

и P_4-упаковку

$$M = \big\{(v_{4i}, v_{4i+1}, v_{4i+2}, v_{4i+3}) \mid 0 \leqslant i \leqslant l\big\} \\ \cup \big\{(v_{4j-2}, v_{4j-1}, v_{4j}, v_{4j+1}) \mid l \leqslant j \leqslant n\big\},$$

где $u_i \in S_i$, $v_i \in S_i$, $u_i \neq v_i$ для всех $i \in \{0, 1, l-2, l-1\}$. Легко видеть, что $|M| = |C| = n + 1$.

Случай 2: $(k_1, k_2, k_3, k_4) \equiv (1, 2, 3, 2) \pmod 4$. Так как запрещённые подграфы отсутствуют, то $k_1 = 1$. Пронумеруем секции G так, что $S_0, S_1, S_{4p+3}, S_{4q+2}$, где $0 < p < q$, нетривиальны, причём между S_{4p+3} и S_{4q+2} все секции этих же 4-классов тривиальны. Если одна из секций $S_2, S_6, \ldots, S_{4p+2}$ и $S_{4q+3}, S_{4q+7}, \ldots, S_{4n-1}$ нетривиальна, то имеет место случай 1 или G содержит запрещённый граф. Предположим, что каждая из указанных секций тривиальна. Тогда рассмотрим множества

$$C = \bigcup_{i=0}^{q} S_{4i+2} \cup \bigcup_{i=q}^{n-1} S_{4i+3},$$

$$M = \bigcup_{i=0}^{p} \{(u_{4i}, u_{4i+1}, u_{4i+2}, u_{4i+3})\} \cup \bigcup_{i=p+1}^{q} \{(v_{4i-1}, v_{4i}, v_{4i+1}, v_{4i+2})\}$$
$$\cup \bigcup_{i=q+1}^{n-1} \{(u_{4i-2}, u_{4i-1}, u_{4i}, u_{4i+1})\} \cup \{(v_{4n-2}, v_{4n-1}, v_0, v_1)\},$$

где $u_i, v_i \in S_i$ и $u_i \neq v_i$ для всех $i \in \{0, \ldots, 4n-1\}$. Нетрудно видеть, что C является P_4-покрытием графа G, а M — его P_4-упаковкой, причём $|M| = |C| = n + 1$.

Случай 3: $(k_1, k_2, k_3, k_4) \equiv (3, 3, 3, 3) \pmod 4$. Пронумеруем секции графа G так, что S_0, S_{4p+3}, S_{4q+2}, S_{4r+1}, где $0 \leqslant p < q < r$, нетривиальны. Если одна из секций $S_1, S_5, \ldots, S_{4p+1}$, или S_{4p+4}, $S_{4p+8}, \ldots, S_{4q}$, или S_{4q+3}, $S_{4q+7}, \ldots, S_{4r-1}$, или S_{4r+2}, $S_{4p+6}, \ldots, S_{4n-2}$ нетривиальна, то имеет место один из случаев 1 и 2 или G содержит запрещённый граф. Предположим, что каждая из них тривиальна. Тогда рассмотрим в качестве C объединение всех перечисленных секций и положим

$$M = \bigcup_{i=0}^{p} \{(u_{4i}, u_{4i+1}, u_{4i+2}, u_{4i+3})\}$$
$$\cup \bigcup_{i=p+1}^{q} \{(v_{4i-1}, v_{4i}, v_{4i+1}, v_{4i+2})\} \cup \bigcup_{i=q+1}^{r} \{(u_{4i-2}, u_{4i-1}, u_{4i}, u_{4i+1})\}$$
$$\cup \bigcup_{i=r+1}^{n-1} \{(v_{4i-3}, v_{4i-2}, v_{4i-1}, v_{4i})\} \cup \{(v_{4n-3}, v_{4n-2}, v_{4n-1}, v_0)\},$$

где $u_i, v_i \in S_i$ и $u_i \neq v_i$ для всех $i \in \{0, \ldots, 4n-1\}$. Нетрудно видеть, что C является P_4-покрытием графа G, а M — его P_4-упаковкой, причём $|M| = |C| = n + 1$. Теорема 2 доказана.

Подводя итог, сформулируем общую теорему об SR-графах, справедливость которой непосредственно вытекает из теорем 1 и 2.

Теорема 3. *SR-граф кёнигов тогда и только тогда, когда не содержит порождённых подграфов из множества $\mathcal{D}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Мокеев Д. Б.** Кёниговы графы относительно 3-пути // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 4. С. 3–14.
2. **Малышев Д. С.** Влияние роста упаковочного числа графов на сложность задачи о независимом множестве // Дискрет. математика. 2013. Т. 25, № 2. С. 63–67.

3. **Малышев Д. С.** Критические классы графов для задачи о рёберном списковом ранжировании // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 6. С. 59–76.
4. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Appl. Math. 2004. Vol. 132, No. 1–3. P. 17–26.
5. **Alekseev V. E., Mokeev D. B.** König graphs for 3-paths and 3-cycles // Discrete Appl. Math. 2016. Vol. 204. P. 1–5
6. **Corneil D. G., Lerchs H., Stewart Burlingham L.** Complement reducible graphs // Discrete Appl. Math. 1981. Vol. 3, No. 3. P. 163–174
7. **Ding G., Xu Z., Zang W.** Packing cycles in graphs, II // J. Comb. Theory, Ser. B. 2003. Vol. 87, No. 2. P. 244–253.
8. **Edmonds J.** Paths, trees, and flowers // Can. J. Math. 1965. Vol. 17, No. 3–4. P. 449–467.
9. **Hell P.** Graph packings // Electron. Notes Discrete Math. 2000. Vol. 5. P. 170–173
10. **Kirkpatrick D. G., Hell P.** On the completeness of a generalized matching problem // Proc. 10th Annu. ACM Symp. Theory Comput. (San Diego, CA, May 1–3, 1978). New York: ACM, 1978. P. 240–245.
11. **Mahadev N. V. R., Peled U. N.** Threshold graphs and related topics. Amsterdam: North-Holland, 1995, 543 p. (Ann. Discrete Math.; Vol. 56).
12. **Mokeev D. B.** König graphs for 4-paths // Models, Algorithms and Technologies for Network Analysis (Proc. 3rd Int. Conf. Network Analysis, Nizhny Novgorod, Russia, May 20–22, 2013). Cham: Springer, 2014. P. 93–103. (Springer Proc. Math. Stat.; Vol. 104).
13. **Yuster R.** Combinatorial and computational aspects of graph packing and graph decomposition // Comput. Sci. Rev. 2007. Vol. 1, No. 1. P. 12–26.

Мокеев Дмитрий Борисович

Статья поступила
30 декабря 2016 г.

Исправленный вариант —
24 января 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2017. Volume 24, No. 3. P. 61–79

UDC 519.174.3 DOI: 10.17377/daio.2017.24.561

ON KÖNIG GRAPHS WITH RESPECT TO P_4

D. B. Mokeev

[1]Lobachevsky Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., 603950 Nizhny Novgorod, Russia
[2]Higher School of Economics in Nizhny Novgorod,
25/12 Bolshaya Pechyorskaya St., 603155 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: MokeevDB@gmail.com

Abstract. We describe the class of graphs whose every induced subgraph has the property: The maximum number of disjoint induced 4-paths is equal to the minimum size of the set of the vertices such that each 4-path contains at least one of them. The description is based on the operation of replacing vertices by cographs which is to the vertices of the graphs obtained from bipartite graphs by subdividing their cycle edges. Bibliogr. 13.

Keywords: packing of subgraphs, vertex covering of subgraphs, 4-path, König graph.

REFERENCES

1. **V. E. Alekseev** and **D. B. Mokeev,** König graphs with respect to 3-paths, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **19**, No. 4, 3–14, 2012.
2. **D. S. Malyshev,** The impact of the growth rate of the packing number of graphs on the computational complexity of the independent set problem, *Diskretn. Mat.,* **25**, No. 2, 63–67, 2013. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **23**, No. 3–4, 245–249, 2013.
3. **D. S. Malyshev,** Classes of graphs critical for the edge list-ranking problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **20**, No. 6, 59–76, 2013. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **8**, No. 2, 245–255, 2014.
4. **V. E. Alekseev,** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem, *Discrete Appl. Math.,* **132**, No. 1–3, 17–26, 2004.
5. **V. E. Alekseev** and **D. B. Mokeev,** König graphs for 3-paths and 3-cycles, *Discrete Appl. Math.,* **204**, 1–5, 2016.
6. **D. G. Corneil, H. Lerchs,** and **L. Stewart Burlingham,** Complement reducible graphs, *Discrete Appl. Math.,* **3**, No. 3, 163–174, 1981.
7. **G. Ding, Z. Xu,** and **W. Zang,** Packing cycles in graphs, II, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **87**, No. 2, 244–253, 2003.

8. **J. Edmonds,** Paths, trees, and flowers, *Can. J. Math.,* **17**, No. 3–4, 449–467, 1965.
9. **P. Hell,** Graph packings, *Electron. Notes Discrete Math.,* **5**, 170–173, 2000.
10. **D. G. Kirkpatrick** and **P. Hell,** On the completeness of a generalized matching problem, in *Proc. X Annu. ACM Symp. Theory Comput., San Diego, USA, May 1–3, 1978,* pp. 240–245, ACM, New York, 1978.
11. **N. V. R. Mahadev** and **U. N. Peled,** *Threshold graphs and related topics,* North Holland, Amsterdam, 1995 (Ann. Discrete Math., Vol. 56).
12. **D. B. Mokeev,** König graphs for 4-paths, in *Models, Algorithms and Technologies for Network Analysis* (Proc. 3th Int. Conf. Netw. Anal., Nizhny Novgorod, Russia, May 20–22, 2013), pp. 93–103, Springer, Cham, 2014 (Springer Proc. Math. Stat., Vol. 104).
13. **R. Yuster,** Combinatorial and computational aspects of graph packing and graph decomposition, *Comput. Sci. Rev.,* **1**, No. 1, 12–26, 2007.

Dmitry B. Mokeev

Received
30 December 2016
Revised
24 January 2017