ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2017. Том 24, № 4. С. 111–129

УДК 519.16 DOI: 10.17377/daio.2017.24.541

ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ПОДМНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ С СУММОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ *)

В. В. Шенмайер
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: shenmaier@mail.ru

Аннотация. Рассматривается следующая задача. Для заданного n-элементного множества векторов в d-мерном евклидовом пространстве найти подмножество, на котором достигается максимальное значение длины суммарного вектора. Предлагается алгоритм, позволяющий находить оптимальное решение этой задачи за время $O(n^{d-1}(d + \log n))$. В частности, если векторы входного множества лежат в одной плоскости, задача может быть решена за почти линейное время. Ил. 2, библиогр. 14.

Ключевые слова: суммарный вектор, поиск подмножества векторов, евклидово пространство, оптимальное решение, полиномиальный алгоритм.

1. Введение

Рассматривается задача

Longest Vector Sum (LVS). Дано: множество X в пространстве $\mathbb{R}^d$, содержащее n элементов. Найти: подмножество $S \subseteq X$, на котором достигается максимум функции

$$f(S) = \Big\| \sum_{x \in S} x \Big\|,$$

где $\| \cdot \|$ — евклидова норма вектора.

Приведём две содержательные интерпретации этой задачи, не описанные ранее в литературе. Первая интерпретация относится к области распознавания образов. Предположим, что имеется множество результатов измерений направления на некоторый объект (источник акустических волн, радиоволн, магнитное поле Земли). Результатами измерений

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 16–11–10041).

являются точки на единичной сфере в $\mathbb{R}^3$. Измерения имеют ошибку, и некоторые из них (неизвестно какие именно) относятся к посторонним объектам либо отражённым волнам. Как определить правильное направление? Разумным подходом является выявление подмножества измерений с максимальной совокупной степенью сонаправленности, выражаемой в их суммарной корреляции и равной длине суммарного вектора.

Вторая интерпретация актуальна для случая произвольных размерностей пространства. Она связана с областью политического анализа и аналогична предложенной в [12] трактовке задачи Densest Hemisphere, согласно которой векторы входного множества характеризуют «политические позиции» избирателей накануне демократических выборов. Все векторы имеют одинаковую длину, и координаты каждого из них отражают мнение соответствующего избирателя по основным политическим вопросам. Степень поддержки избирателем какой-либо политической позиции равна корреляции этой позиции с его собственной. Требуется определить политическую позицию выдвигаемого кандидата (или партии), обеспечивающую максимальную совокупную поддержку подходящей группы избирателей. Легко видеть, что искомый вектор равен сумме подмножества, являющегося решением задачи LVS.

Рассматриваемая задача является частным случаем известной задачи Shaped Partition [11], в которой требуется найти разбиение входного множества векторов на p подмножеств $S_1, \ldots, S_p$ с максимальным значением величины

$$c\Big(\sum_{x\in S_1} x, \ldots, \sum_{x\in S_p} x\Big),$$

где c — произвольная заданная выпуклая функция от p векторных переменных. Как показано в [11], если размерность пространства и параметр p фиксированы, данная задача разрешима за время $O(n^{dp^2})$. Наилучший известный алгоритм её решения имеет трудоёмкость $O(n^{d(p-1)})$ [13][1]. Отсюда, в частности, следует, что в случае фиксированной размерности пространства и любой заданной нормы задача LVS разрешима за полиномиальное время $O(n^d)$. В случае евклидовой нормы другая идея доказательства полиномиальной разрешимости задачи при фиксированном d описана в [2]. Там же предложен простейший алгоритм для случая полиэдральной нормы с трудоёмкостью $O(dfn)$, где f — число фасет многогранника единичного шара нормы. Тем самым даже если размерность пространства не фиксирована, задача LVS полиномиально разрешима

[1] В соответствии с [14] при аккуратном вычислении трудоёмкости формула получается именно такая, а не $O(n^{d(p-1)-1})$, как указано в [13].

в случае нормы ℓ_∞ и FPT-разрешима (fixed-parameter tractable) относительно параметра d в случае нормы ℓ_1[2)]. Наконец, в [6] доказано, что задача с евклидовой нормой NP-трудна в сильном смысле.

В [1, 3–5, 7, 11] исследовалась близкая задача, в которой требуется максимизировать функцию $f(S)$ на подмножествах заданной мощности. В частности, в [1] установлена её NP-трудность в сильном смысле, в [11] содержится первое доказательство её полиномиальной разрешимости при фиксированном d и в [7] предложен алгоритм её решения с трудоёмкостью $O(dn^{d+1})$, наилучшей для известных алгоритмов.

Отметим, что минимизационная версия задачи LVS труднорешаема и неаппроксимируема даже в одномерном случае, поскольку её частным случаем является один из вариантов известной задачи о сумме подмножеств [9], в котором требуется найти подмножество заданного множества чисел, имеющее нулевую сумму.

В данной статье предложен алгоритм решения задачи LVS с трудоёмкостью $O(n^{d-1}(d+\log n))$, где $d \geqslant 2$, что улучшает известные результаты для этой задачи. В частности, в случае плоскости задача может быть решена за почти линейное время. В качестве следствия с учётом идей из [5] получаем, что аналогичная задача на подмножествах заданной мощности разрешима в двумерном случае за время $O(n^2 \log n)$, что меньше трудоёмкости алгоритма из [7].

В основе предлагаемого алгоритма лежит тот факт, что оптимальное решение задачи LVS может быть найдено среди относительно небольшого числа допустимых решений, каждое из которых соответствует одной из ячеек конфигурации гиперплоскостей в пространстве $\mathbb{R}^d$, ортогональных векторам входного множества. Как известно, число таких ячеек полиномиально в случае фиксированной размерности пространства [2, 8, 10]. Алгоритм использует стандартную схему индуктивно рекурсивного построения семейства допустимых решений для указанной конфигурации, подобную описанной в [2, 10]. Предлагаемая реализация данной схемы имеет следующие отличительные особенности: а) в качестве базы рекурсии, на которой основана работа алгоритма, выбран двумерный случай; б) в процессе работы алгоритма допускается, что определяемая последовательность допустимых решений может содержать повторяющиеся элементы, однако длина последовательности остаётся по-

---

[2)] FPT-разрешимость относительно некоторого параметра k означает существование точного алгоритма с трудоёмкостью $O\big(F(k)\,\mathrm{Poly}(l)\big)$, где F — произвольная функция, зависящая только от параметра k, Poly — полином фиксированной степени, l — длина входа.

линомиальной (лемма 5); в) алгоритм строит не подмножества входного множества, а их суммарные векторы, что позволяет сократить вычисления — в частности, за счёт использования суммарных векторов, построенных на предыдущих шагах рекурсии.

2. Конфигурации гиперплоскостей

Не нарушая общности, будем считать, что множество X не содержит нулевого вектора, поскольку он не влияет на решение задачи LVS.

Для всякого ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^d$ обозначим через $H(x)$ гиперплоскость, проходящую через начало координат и ортогональную x: $H(x) = \{p \in \mathbb{R}^d \mid \langle p, x\rangle = 0\}$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Определение 1. Пусть G — произвольное подпространство в $\mathbb{R}^d$, содержащее все векторы из X. *Конфигурацией гиперплоскостей для множества X в пространстве G* будем называть семейство $A_G(X)$ максимальных по включению связных подмножеств пространства G, не пересекающихся с гиперплоскостями вида $H(x)$, $x \in X$. Каждое из этих подмножеств будем называть *ячейкой* конфигурации $A_G(X)$.

Очевидно, что ячейки конфигурации $A_G(X)$ являются открытыми непересекающимися конусами в пространстве G и их замыкания покрывают всё это пространство.

Для точки $p \in \mathbb{R}^d$ через $S(p, X)$ обозначим множество векторов из X, имеющих положительное скалярное произведение с p. Легко видеть, что для всех точек p произвольной ячейки $C \in A_G(X)$ множество $S(p, X)$ одно и то же. Обозначим это множество через $S(C, X)$. Из определения $S(C, X)$ вытекает, что если $p \in C$, то $\langle p, x\rangle > 0$ для всех $x \in S(C, X)$. Тем самым если точка p принадлежит замыканию ячейки C, то

$$\langle p, x\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех } x \in S(C, X). \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть S^* — оптимальное решение задачи* LVS *и $p = \sum_{x\in S^*} x$. Тогда множество $S(p, X)$ также является оптимальным решением этой задачи и $\|p\|^2 = \big\langle p, \sum_{x\in S(p,X)} x\big\rangle$.*

Доказательство. Так как в X имеются ненулевые векторы, вектор p не может быть нулевым. Заметим, что

$$f(S^*) = \|p\| = \left\langle \frac{p}{\|p\|}, \sum_{x\in S^*} x \right\rangle \leqslant \left\langle \frac{p}{\|p\|}, \sum_{x\in S(p,X)} x \right\rangle,$$

поскольку в $S(p,X)$ присутствуют все векторы $x \in X$, для которых $\langle p,x\rangle > 0$, и нет других векторов. С учётом того, что $\langle a,b\rangle \leqslant \|a\|\|b\|$, получаем $f(S^*) \leqslant f(S(p,X))$. Таким образом, $S(p,X)$ — оптимальное решение задачи LVS, и вся полученная цепочка неравенств превращается в цепочку равенств, в частности,

$$\|p\| = \left\langle \frac{p}{\|p\|}, \sum_{x\in S(p,X)} x \right\rangle.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть G — произвольное подпространство в $\mathbb{R}^d$, содержащее все векторы из X. Тогда для некоторой ячейки $C \in A_G(X)$ множество $S(C,X)$ является оптимальным решением задачи* LVS.

Доказательство. Пусть $p = \sum\limits_{x\in S^*} x$, где S^* — оптимальное решение задачи LVS. Как и при доказательстве леммы 1, заметим, что вектор p ненулевой. Рассмотрим ячейку C конфигурации $A_G(X)$, замыканию которой принадлежит p. Если такая ячейка не единственна, то выберем любую из них. Покажем, что C — искомая ячейка.

Из свойств замыкания множества следует существование точки $q \in C$ такой, что $\langle q,x\rangle > 0$ для всех $x \in X$, имеющих положительное скалярное произведение с p. Это означает, что $S(p,X) \subseteq S(q,X) = S(C,X)$. С другой стороны, согласно (1) все элементы множества $S(C,X)$ имеют неотрицательное скалярное произведение с p, тем самым

$$\left\langle \frac{p}{\|p\|}, \sum_{x\in S(C,X)} x \right\rangle \geqslant \left\langle \frac{p}{\|p\|}, \sum_{x\in S(p,X)} x \right\rangle = \|p\|$$

в силу леммы 1. Отсюда и из неравенства $\|a\|\|b\| \geqslant \langle a,b\rangle$ получаем, что $f(S(C,X)) \geqslant \|p\| = f(S^*)$, а значит, $S(C,X)$ — оптимальное решение задачи LVS. Лемма 2 доказана.

Определение 2. *Семейством представителей* конфигурации $A_G(X)$ будем называть множество векторов в пространстве G такое, что каждая ячейка конфигурации содержит хотя бы один из этих векторов.

Отметим, что в определении семейства представителей — в отличие от аналогичного определения из [2] — не требуется, чтобы каждая ячейка из $A_G(X)$ содержала в точности по одному представителю.

Лемма 2 даёт способ нахождения оптимального решения задачи LVS. Для этого достаточно вычислить и сравнить по норме суммарные векторы множеств вида $S(p,X)$, где p — элементы некоторого семейства представителей конфигурации $A_G(X)$.

3. Алгоритм для двумерного случая

Вначале опишем, как достаточно быстро можно получить оптимальное решение плоской задачи LVS. Предложенный для этого случая алгоритм (с небольшими дополнениями) в дальнейшем будет использован в качестве базы рекурсии при решении задачи в случае произвольной размерности пространства. Алгоритм опирается на тот факт, что для каждой ячейки C двумерной конфигурации гиперплоскостей (в данном случае прямых) имеется ровно две смежные с ней ячейки и множество $S(C, X)$ может быть получено путём простой модификации аналогичного множества для любой из них.

Предположим, что векторы множества X лежат в некотором двумерном подпространстве G пространства $\mathbb{R}^d$. Выберем направление отсчёта углов в G. Для этого с помощью правил линейной алгебры построим ортонормированный базис E линейной оболочки множества X. Если $|E| = 1$, то все векторы из X коллинеарны. Следовательно, в соответствии с леммой 2 лучшее из множеств $S(\pm e_1, X)$, где e_1 — единственный вектор базиса, является решением задачи LVS. Далее будем предполагать, что E состоит из двух векторов, которые назовём e_1 и e_2. Положительным направлением отсчёта углов в плоскости G будем считать направление от e_1 к e_2. В частности, угол вектора e_2 относительно вектора e_1 равен $\pi/2$, угол вектора e_1 относительно вектора e_2 равен $-\pi/2$.

Заметим, что границами ячеек конфигурации $A_G(X)$ являются лучи, выходящие из начала координат и ортогональные векторам из X. Для каждого вектора $x \in X$ обозначим через $l(x)$ и $r(x)$ два ортогональных ему вектора, получающихся вращением вектора $x/\|x\|$ на угол $\pi/2$ и $-\pi/2$ соответственно. Пусть $\mathbf{0}$ — нулевой вектор и $[p, q)$ — луч, выходящий из p и проходящий через q, где $p, q \in \mathbb{R}^d$. Для каждого луча λ вида $[\mathbf{0}, l(x))$ или $[\mathbf{0}, r(x))$, $x \in X$, определим два множества векторов $L(\lambda) = \{x \in X \mid l(x) \in \lambda\}$ и $R(\lambda) = \{x \in X \mid r(x) \in \lambda\}$.

Лемма 3. *Пусть C_1, C_2 — две соседние ячейки конфигурации $A_G(X)$ и λ — луч между ними, причём ячейка C_2 лежит в направлении отрицательного угла относительно λ. Тогда*

$$S(C_2, X) = (S(C_1, X) \cup L(\lambda)) \setminus R(\lambda). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть p_1, p_2 — произвольные векторы, принадлежащие ячейкам C_1 и C_2 соответственно, и $x \in X$. Если вектор $l(x)$ лежит на луче λ, то $\langle p_2, x\rangle > 0$, $\langle p_1, x\rangle < 0$ (рис. 1). Если вектор $r(x)$ лежит на луче λ, то, наоборот, $\langle p_2, x\rangle < 0$, $\langle p_1, x\rangle > 0$. Наконец, если

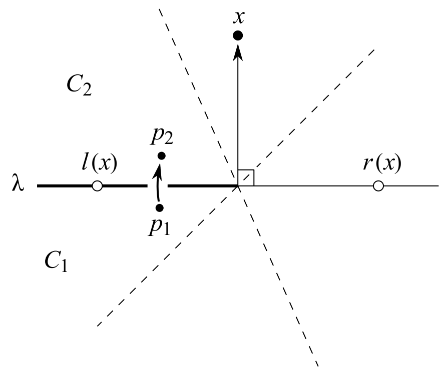

Рис. 1

оба вектора $l(x)$ и $r(x)$ не лежат на луче λ, то векторы p_1 и p_2 расположены по одну сторону от прямой, ортогональной x, поэтому знак скалярного произведения $\langle p_2, x\rangle$ совпадает со знаком $\langle p_1, x\rangle$. Следовательно, $S(p_2, X) = (S(p_1, X) \cup L(\lambda)) \setminus R(\lambda)$, что эквивалентно утверждению леммы. Лемма 3 доказана.

Лемма 3 позволяет путём последовательного движения от одного луча λ к следующему построить все множества вида $S(C, X)$, $C \in A_G(X)$, перестраивая эти множества в соответствии с формулой (2). Формализуем это в виде следующей пошаговой записи.

Алгоритм 1

Шаг 1. Строим ортонормированный базис E линейной оболочки X.

Шаг 2. Если $|E| = 1$, то возвращаем одно из двух множеств $S(\pm e_1, X)$ с максимальным значением f.

Шаг 3. Для каждого $x \in X$ определяем векторы $l(x)$ и $r(x)$.

Шаг 4. Сортируем последовательность лучей вида $[\mathbf{0}, l(x))$, $[\mathbf{0}, r(x))$ в порядке уменьшения угла относительно вектора e_1; удаляем совпадающие лучи. Обозначим получившуюся последовательность лучей через $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ и для каждого $i = 1, \ldots, t$ формируем множества $L(\lambda_i)$ и $R(\lambda_i)$.

Шаг 5. Пусть $v_1 = \sum\limits_{x \in S(p,X)} x$, где p — любой ненулевой вектор на биссектрисе угла между лучами λ_1 и λ_2; для каждого $i = 2, \ldots, t$ полагаем

$$v_i = v_{i-1} + \sum_{x \in L(\lambda_i)} x - \sum_{x \in R(\lambda_i)} x.$$

Шаг 6. Возвращаем множество $S(v_{i^*}, X)$, где $i^* = \arg\max\limits_i \|v_i\|$.

Теорема 1. *Алгоритм* 1 *находит оптимальное решение плоской задачи* LVS *за время* $O(n(d + \log n))$.

Доказательство. Согласно лемме 3 векторы v_i, $i = 1, \dots, t$, являются суммарными векторами множеств $S(C_i, X)$, где C_i — ячейка конфигурации $A_G(X)$ между лучами λ_i и λ_{i+1} (здесь $\lambda_{t+1} = \lambda_1$). Отсюда и из лемм 2 и 1 следует оптимальность получаемого решения.

Оценим трудоёмкость алгоритма. Поскольку векторы множества X лежат в одной плоскости, базис E может быть построен за время $O(dn)$. Векторы $l(x)$, $r(x)$ вычисляются по формулам $l(x) = -\langle x, e_2\rangle e_1 + \langle x, e_1\rangle e_2$, $r(x) = -l(x)$, тем самым шаг 3 выполняется за время $O(dn)$. Каждый луч вида $[\mathbf{0}, p)$, $p = l(x), r(x)$, определяется значением угла вектора p относительно вектора e_1, поэтому сортировка лучей на шаге 4 сводится к вычислению и сортировке соответствующих углов и занимает время $O(dn + n \log n)$. Совпадающие лучи выявляются путём сравнения соседних элементов в полученной упорядоченной последовательности углов за время $O(n)$. То же самое относится к построению множеств $L(\lambda_i)$ и $R(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, t$. Шаг 5 выполняется за время $O(dn)$, поскольку общее количество сложений и вычитаний векторов на этом шаге не превосходит $3n$. Таким образом, трудоёмкость алгоритма равна $O(n(d+\log n))$. Теорема 1 доказана.

4. Алгоритм для произвольной размерности

Рассмотрим произвольное векторное пространство G, являющееся пересечением некоторого набора гиперплоскостей $H(x)$, $x \in X$, либо совпадающее с $\mathbb{R}^d$. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — векторы множества X и $g_1, \dots, g_n$ — их ортогональные проекции в пространство G. Для каждого $m = 1, \dots, n$ положим $X(G, m) = \{g_1, \dots, g_m\}$ и $A(G, m) = A_G(X(G, m) \setminus \{\mathbf{0}\})$, т. е. $A(G, m)$ — конфигурация гиперплоскостей для множества ненулевых векторов из $X(G, m)$ в пространстве G.

Определение 3. Семейство представителей конфигурации $A(G, m)$ будем называть *нормальным*, если его элементы не ортогональны ни одному ненулевому вектору из множества $X(G, n)$.

Обозначим через $P(G, m)$ задачу вычисления векторов вида

$$v(p, X) = \sum_{x \in S(p, X)} x, \quad p \in \mathcal{M},$$

где $\mathcal{M}$ — любое (заранее неизвестное) нормальное семейство представителей конфигурации $A(G, m)$.

Отметим, что вычисление векторов самого семейства $\mathcal{M}$ в данной задаче не требуется: имеют значение лишь векторы вида $v(p, X)$. При $m < n$ решение задачи $P(G, m)$ может быть не единственным, поскольку в этом случае одной ячейке конфигурации $A(G, m)$ могут принадлежать такие точки p, для которых векторы $v(p, X)$ отличаются.

Лемма 4. *Пусть k — размерность пространства G, $k \geqslant 2$, и все векторы множества $X(G, n)$ известны. Тогда задача $P(G, m)$ разрешима за время*

$$\mathrm{Time}(G, m) \leqslant cn(d + \log n) \min\{k, 3\}\, m^{k-2},$$

где c — некоторая константа, не зависящая от k, d, m, n.

Для доказательства леммы 4 понадобятся следующие свойства ортогональных проекций.

Свойство 1. *Если $x \in G$, $y \in \mathbb{R}^d$ и y_G — проекция вектора y в пространство G, то*

$$\langle x, y\rangle = \langle x, y_G\rangle. \tag{3}$$

Доказательство. По определению проекции вектор $y - y_G$ ортогонален пространству G. Отсюда $\langle x, y\rangle = \langle x, y_G\rangle + \langle x, y - y_G\rangle = \langle x, y_G\rangle$. Свойство 1 доказано.

Свойство 2. *Пусть $g_m \neq \mathbf{0}$, $H = G \cap H(g_m)$ и h_j — проекция вектора g_j в пространство H, где $m, j \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда*

$$h_j = g_j - z_m\langle z_m, g_j\rangle, \quad \text{где } z_m = g_m/\|g_m\|. \tag{4}$$

Доказательство. Если $h = g_j - z_m\langle z_m, g_j\rangle$, то $h \in G$ и

$$\langle g_m, h\rangle = \langle g_m, g_j\rangle - \|g_m\|\langle z_m, g_j\rangle = 0.$$

Следовательно, $h \in H$. С другой стороны, для любого $p \in H$ имеем равенства $\langle p, g_j - h\rangle = \langle p, z_m\rangle\langle z_m, g_j\rangle = 0$, так как $H \subseteq H(z_m)$. Отсюда следует, что вектор $g_j - h$ ортогонален пространству H, и тем самым вектор h является проекцией вектора g_j в H. Но тогда с учётом единственности проекции имеем $h = h_j$. Свойство 2 доказано.

Свойство 3. *Пусть выполнены условия свойства 2. Тогда вектор g_j коллинеарен с g_m в том и только том случае, если $h_j = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Коллинеарность векторов означает, что $g_j = \alpha g_m$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$, что с учётом (4) эквивалентно равенству $h_j = \mathbf{0}$. Свойство 3 доказано.

Свойство 4. *Пусть выполнены условия свойства 2. Тогда вектор h_j является проекцией вектора x_j в пространство H.*

Доказательство. По определению проекции вектор $x_j - g_j$ ортогонален пространству G, а вектор $g_j - h_j$ ортогонален пространству H. Отсюда для любого $p \in H$ имеем $\langle p, x_j - h_j\rangle = \langle p, x_j - g_j\rangle + \langle p, g_j - h_j\rangle = 0$. Тем самым вектор $x_j - h_j$ ортогонален пространству H, следовательно, вектор h_j является проекцией вектора x_j в H. Свойство 4 доказано.

Доказательство леммы 4 будем проводить индукцией по k и m.

База индукции. Случай $k = 2$. Воспользуемся методом решения плоской задачи LVS, описанным в разд. 3. Если ортонормированный базис E линейной оболочки множества $X(G, n)$ состоит из единственного элемента e_1, то векторы $v(\pm e_1, X)$ образуют решение задачи $P(G, m)$. В противном случае выполним шаги 3 и 4 алгоритма 1 применительно к множеству ненулевых векторов из $X(G, n)$ и выберем произвольные ненулевые векторы p_i, лежащие на биссектрисах углов между полученными лучами λ_i и λ_{i+1}, $i = 1, \dots, t$ (где $\lambda_{t+1} = \lambda_1$). Очевидно, что векторы $p_1, \dots, p_t$ образуют нормальное семейство представителей конфигурации $A(G, n)$.

В силу равенств (3) и (2) имеем

$$\begin{aligned} S(p_i, X) &= \{x_j \mid g_j \in S(p_i, X(G, n))\} \\ &= (S(p_{i-1}, X) \cup \{x_j \mid g_j \in L(\lambda_i)\}) \setminus \{x_j \mid g_j \in R(\lambda_i)\} \end{aligned}$$

для построенных ранее множеств $L(\lambda_i)$ и $R(\lambda_i)$. Это даёт быстрый способ вычисления векторов $v(p_i, X)$, аналогичный шагу 5 алгоритма 1.

Шаг 5′. Полагаем $v_1 = \sum\limits_{x \in S(p_1, X)} x$; для каждого $i = 2, \dots, t$ определяем

$$v_i = v_{i-1} + \sum_{g_j \in L(\lambda_i)} x_j - \sum_{g_j \in R(\lambda_i)} x_j.$$

Из вышесказанного следует, что $v_i = v(p_i, X)$, $i = 1, \dots, t$, тем самым полученный набор векторов является решением задачи $P(G, n)$, а следовательно, и задачи $P(G, m)$. Однако в дальнейшем нам потребуется решение, содержащее не более чем $2m$ векторов. Определим множество I_m, состоящее из индексов i, для которых луч λ_i совпадает с одним из лучей вида $[\mathbf{0}, l(x))$, $[\mathbf{0}, r(x))$, где x — ненулевой вектор из $X(G, m)$. Поскольку такие лучи являются границами ячеек конфигурации $A(G, m)$, векторы p_i, $i \in I_m$, образуют нормальное семейство её представителей и $|I_m| \leqslant 2m$. Таким образом, множество векторов v_i, $i \in I_m$, является искомым решением задачи $P(G,m)$.

Базис E может быть построен за время $O(dn)$, шаги 3 и 4 алгоритма 1, а также шаг $5'$ выполняются за суммарное время $O(n(d+\log n))$. Определение множества I_m требует $O(n)$ операций. Следовательно, время решения задачи $P(G,m)$ не превосходит величины $cn(d+\log n)$ для некоторой константы c.

Случай $m = 1$. Обозначим через $\alpha(x)$ значение первой ненулевой координаты вектора x, через $\beta(x)$ — отношение его максимальной по модулю координаты к $\alpha(x)$ (считаем, что $\alpha(\mathbf{0}) = 0$, $\beta(\mathbf{0}) = 1$). Определим вектор $p = (b^{d-1}, b^{d-2}, \ldots, 1)$, где $b = \max\limits_{j=1,\ldots,n} |\beta(g_j)| + 1$. Тогда для каждого $j = 1,\ldots,n$ знак скалярного произведения $\langle p, g_j\rangle$ равен знаку величины $\alpha(g_j)$. При этом согласно (3) имеем $\langle p, g_j\rangle = \langle q, g_j\rangle = \langle q, x_j\rangle$, где q — проекция вектора p в пространство G. Тем самым, во-первых, вектор q не ортогонален ненулевым векторам из $X(G,n)$, а следовательно, векторы $\pm q$ образуют нормальное семейство представителей конфигурации $A(G,1)$, во-вторых, справедливы равенства

$$v(q,X) = \sum\{x_j \mid \alpha(g_j) > 0\}, \quad v(-q,X) = \sum\{x_j \mid \alpha(g_j) < 0\}.$$

Значит, задача $P(G,1)$ может быть решена за время $O(dn)$.

Индуктивный переход. Случай $k \geqslant 3$, $m \geqslant 2$. Пусть $q_1,\ldots,q_s$ — нормальное семейство представителей конфигурации $A(G,m-1)$, соответствующее решению задачи $P(G,m-1)$. Если $g_m = \mathbf{0}$ либо g_m коллинеарен одному из ненулевых векторов из множества $X(G,m-1)$, то конфигурация $A(G,m)$ совпадает с конфигурацией $A(G,m-1)$, следовательно, набор векторов $v(q_1,X),\ldots,v(q_s,X)$ является решением задачи $P(G,m)$. Предположим, что $g_m \neq \mathbf{0}$ и g_m не коллинеарен ненулевым векторам из $X(G,m-1)$.

Рассмотрим $(k-1)$-мерное подпространство $H = G \cap H(g_m)$. Легко видеть, что конфигурация $A(G,m)$ может быть получена из конфигурации $A(G,m-1)$ разбиением каждой ячейки C, пересекающейся с H, на две части: C^+ и C^-. В первой из них скалярное произведение с вектором g_m положительно, в другой отрицательно. Обозначим через h_j проекцию вектора g_j в пространство H, $j = 1,\ldots,n$. Тогда согласно свойству 4 имеем $X(H,n) = \{h_1,\ldots,h_n\}$, а из свойств 3 и 1 следует, что если вектор g_j не коллинеарен g_m, то $h_j \neq \mathbf{0}$ и $H \cap H(g_j) = H \cap H(h_j)$. Отсюда получаем, что пересечениями ячеек конфигурации $A(G,m-1)$ с пространством H являются ячейки конфигурации $A(H,m-1)$.

Пусть $p_1, \dots, p_t$ — нормальное семейство представителей конфигурации $A(H, m-1)$, соответствующее решению задачи $P(H, m-1)$. Тогда для каждого $i = 1, \dots, t$ точка p_i ортогональна только тем векторам из g_j, $j = 1, \dots, n$, которые коллинеарны вектору g_m. Действительно, если $\langle p_i, g_j \rangle = 0$, то согласно (3) имеем $\langle p_i, h_j \rangle = 0$, откуда в силу нормальности семейства $p_1, \dots, p_t$ вытекает, что $h_j = \mathbf{0}$ и тем самым по свойству 3 вектор g_j коллинеарен g_m. Определим минимальную по модулю величину δ, для которой точка $p_i + \delta g_m$ ортогональна одному из векторов g_j, не коллинеарных g_m (если таких точек нет, то полагаем $\delta = 1$). Тогда $\delta \neq 0$ и точки $p_i^+ = p_i + \varepsilon g_m$ и $p_i^- = p_i - \varepsilon g_m$, где $\varepsilon = |\delta|/2$, не ортогональны ни одному ненулевому вектору из $X(G, n)$. При этом по выбору δ и ε точки p_i, p_i^+ и p_i^- не разделены ни одним пространством вида $H(g_j)$, не совпадающим с $H(g_m)$ (рис. 2). Следовательно, они принадлежат одной ячейке C конфигурации $A(G, m-1)$ и тем самым $p_i^+ \in C^+$, $p_i^- \in C^-$. Отсюда получаем, что множество $\{q_1, \dots, q_s\} \cup \{p_i^+, p_i^- \mid i = 1, \dots, t\}$ является нормальным семейством представителей конфигурации $A(G, m)$.

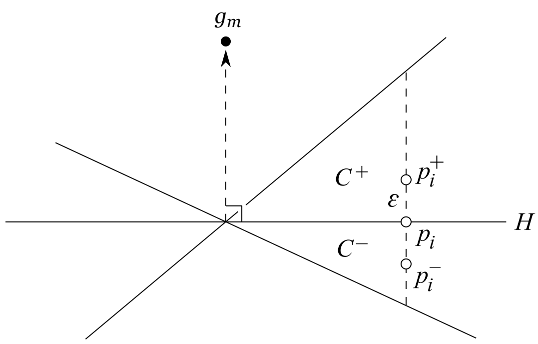

Рис. 2

Выведем простые соотношения для вычисления векторов $v(p_i^+, X)$ и $v(p_i^-, X)$. Вначале покажем, что

$$S(p_i, X) \subseteq S(p_i^+, X). \tag{5}$$

Действительно, если $j = 1, \dots, n$ и $x_j \in S(p_i, X)$, то с учётом (3) имеем $\langle p_i, g_j \rangle > 0$. Отсюда $\langle p_i^+, g_j \rangle \geqslant 0$, поскольку в противном случае между p_i и p_i^+ существует точка, ортогональная g_j, что противоречит выбору p_i^+. При этом случай $\langle p_i^+, g_j \rangle = 0$ также невозможен по выбору p_i^+. Следовательно, $\langle p_i^+, g_j \rangle > 0$ и тем самым $x_j \in S(p_i^+, X)$.

Далее покажем, что

$$S(p_i^+, X) \setminus S(p_i, X) \subseteq \mathrm{Dir}(g_m), \tag{6}$$

где $\mathrm{Dir}(x) = \{x_j \mid g_j \neq \mathbf{0}$ и g_j сонаправлен с $x, j = 1, \ldots, n\}$. Предположим, что $x_j \in S(p_i^+, X) \setminus S(p_i, X)$. Тогда в силу (3) имеем $\langle p_i^+, g_j \rangle > 0$ и $\langle p_i, g_j \rangle \leqslant 0$. При этом случай $\langle p_i, g_j \rangle < 0$ невозможен, так как по выбору p_i^+ между p_i и p_i^+ не существует точек, ортогональных g_j. Следовательно, $\langle p_i, g_j \rangle = 0$, что согласно (3) приводит к равенству $\langle p_i, h_j \rangle = 0$. Отсюда и из нормальности семейства $p_1, \ldots, p_t$ вытекает, что $h_j = \mathbf{0}$. Тем самым по свойству 3 векторы g_j и g_m коллинеарны, откуда с учётом соотношений $\langle \varepsilon g_m, g_j \rangle = \langle p_i^+, g_j \rangle - \langle p_i, g_j \rangle = \langle p_i^+, g_j \rangle > 0$ следует, что $x_j \in \mathrm{Dir}(g_m)$.

Наконец, покажем, что

$$\mathrm{Dir}(g_m) \subseteq S(p_i^+, X) \setminus S(p_i, X). \tag{7}$$

Действительно, если $x_j \in \mathrm{Dir}(g_m)$, то согласно (3) получаем, что

$$\langle p_i, x_j \rangle = \langle p_i, g_j \rangle = 0,$$
$$\langle p_i^+, x_j \rangle = \langle p_i^+, g_j \rangle = \langle p_i, g_j \rangle + \langle \varepsilon g_m, g_j \rangle = \langle \varepsilon g_m, g_j \rangle > 0.$$

Отсюда следует, что $x_j \notin S(p_i, X)$ и $x_j \in S(p_i^+, X)$.

Из соотношений (5)–(7) вытекает равенство

$$v(p_i^+, X) = v(p_i, X) + v(g_m), \tag{8}$$

где $v(x)$ — сумма векторов из $\mathrm{Dir}(x)$. Аналогично доказывается, что

$$v(p_i^-, X) = v(p_i, X) + v(-g_m). \tag{9}$$

Отметим, что векторы $v(p, X)$, где $p = p_i^+, p_i^-$, вычисляются без использования соответствующих векторов p. Поэтому для решения задачи $P(G, m)$ вычисления векторов p_i^+, p_i^- не требуется.

Таким образом, решение задачи $P(G, m)$ сводится к решению задач $P(G, m-1)$ и $P(H, m-1)$. Для того чтобы воспользоваться индукцией, остаётся вычислить векторы множества $X(H, n)$. Согласно свойству 2 это может быть выполнено с помощью равенства (4).

Оценим трудоёмкость получившегося алгоритма.

Лемма 5. *Пусть $N(G, m)$ — количество представителей конфигурации $A(G, m)$, определяемых описанным выше способом. Тогда*

$$N(G, m) \leqslant 2m^{k-1}.$$

Доказательство будем проводить индукцией по k и m. Если $k = 2$ либо $m = 1$, то семейство представителей конфигурации $A(G, m)$, полученное в этих базовых случаях, состоит из не более чем $2m$ векторов. Следовательно, доказываемая оценка верна. Предположим, что $k \geqslant 3$ и $m \geqslant 2$. Тогда $N(G, m) \leqslant N(G, m-1) + 2N(H, m-1)$, что по индукции не превосходит величины $2(m-1)^{k-1} + 4(m-1)^{k-2}$. Далее заметим, что для любых целых положительных чисел a и b справедливо биномиальное неравенство $(a+1)^b \geqslant a^b + ba^{b-1}$. Заменив a на $a-1$, получим

$$(a-1)^b \leqslant a^b - b(a-1)^{b-1}. \tag{10}$$

Отсюда

$$N(G, m) \leqslant 2(m^{k-1} - (k-1)(m-1)^{k-2}) + 4(m-1)^{k-2} \leqslant 2m^{k-1}.$$

Лемма 5 доказана.

По построению векторов $v(q_i, X)$, $v(p_i, X)$, $v(p_i^+, X)$ и $v(p_i^-, X)$ имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Time}(G, m) \leqslant \mathrm{Time}(G, m-1) &+ \mathrm{Time}(H, m-1)\\ &+ c_1 dn + c_2 d N(H, m-1),\end{aligned} \tag{11}$$

где $c_1 dn$ — верхняя оценка времени проверки неколлинеарности вектора g_m, вычисления векторов $v(\pm g_m)$ и построения множества $X(H, n)$ по формуле (4), а $c_2 d$ — оценка времени вычисления одной пары векторов $v(p_i^+, X)$, $v(p_i^-, X)$ по формулам (8), (9). В силу предположения индукции и леммы 5 правая часть (11) не превосходит величины

$$\begin{aligned}cn(d + \log n)\big[\min\{k, 3\}(m-1)^{k-2} + \min\{k-1, 3\}(m-1)^{k-3}\big]&\\ + c_1 dn + 2c_2 d(m-1)^{k-2}&.\end{aligned}$$

Согласно (10) первое слагаемое выражения в квадратных скобках оценивается сверху величиной

$$\min\{k, 3\}(m^{k-2} - (k-2)(m-1)^{k-3}).$$

Отсюда с учётом того, что $-\min\{k, 3\}(k-2) + \min\{k-1, 3\} \leqslant -1$ при $k \geqslant 3$, имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Time}(G, m) &\leqslant cn(d + \log n)\big[\min\{k, 3\}\, m^{k-2} - (m-1)^{k-3}\big]\\ &\quad + c_1 dn + 2c_2 d(m-1)^{k-2} \leqslant cn(d + \log n)\min\{k, 3\}\, m^{k-2}\end{aligned}$$

при $c \geqslant c_1 + 2c_2$. Лемма 4 доказана.

Описанный в доказательстве леммы 4 алгоритм для решения задачи $P(G, m)$ можно представить в виде следующей пошаговой записи.

Алгоритм $\mathcal{A}$

Вход: множество X, проекции $g_1, \ldots, g_n$ векторов из X в пространство G, размерность k пространства G, $k \geqslant 2$, и целое число $m \geqslant 1$.

Случай $k = 2$.

Шаг 1. Строим ортонормированный базис E линейной оболочки множества $\{g_1, \ldots, g_n\}$.

Шаг 2. Если E состоит из единственного элемента e_1, то вычисляем векторы $v^+ = v(e_1, X)$, $v^- = v(-e_1, X)$ и возвращаем множество $\{v^+, v^-\}$.

Шаг 3. Выполняем шаги 3 и 4 алгоритма 1, вычисляем векторы $v_i = v(p_i, X)$, $i = 1, \ldots, t$, с помощью шага $5'$ из доказательства леммы 4.

Шаг 4. Определяем множество индексов I_m и возвращаем множество $\{v_i \mid i \in I_m\}$.

Случай $m = 1$. Вычисляем векторы

$$v^+ = \sum\{x_j \mid \alpha(g_j) > 0\}, \quad v^- = \sum\{x_j \mid \alpha(g_j) < 0\}$$

и возвращаем множество $\{v^+, v^-\}$.

Случай $k \geqslant 3$, $m \geqslant 2$.

Шаг 1. Вычисляем множество $V = \mathcal{A}(X, g_1, \ldots, g_n, k, m-1)$.

Шаг 2. Если $g_m = \mathbf{0}$ либо g_m коллинеарен одному из ненулевых векторов множества $\{g_1, \ldots, g_{m-1}\}$, то возвращаем множество V.

Шаг 3. Вычисляем по формуле (4) векторы $h_1, \ldots, h_n$ и находим множество $U = \mathcal{A}(X, h_1, \ldots, h_n, k-1, m-1)$.

Шаг 4. Определяем векторы $v^+ = v(g_m)$, $v^- = v(-g_m)$ и возвращаем множество $V \cup \{u + v^+, u + v^- \mid u \in U\}$.

Согласно лемме 2 для решения задачи LVS достаточно решить задачу $P(\mathbb{R}^d, n)$ и в полученном множестве векторов выбрать вектор v^* максимальной длины. С учётом леммы 1 соответствующее множество $S(v^*, X)$ является оптимальным решением задачи. При этом в силу леммы 4 имеем $\mathrm{Time}(\mathbb{R}^d, n) \leqslant 3cn^{d-1}(d + \log n)$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Оптимальное решение задачи* LVS *при* $d \geqslant 2$ *может быть найдено за время* $O(n^{d-1}(d + \log n))$.

Заключение

Полученный результат позволяет уменьшить время поиска подмножества векторов с суммой максимальной евклидовой длины. В частности, в наиболее интересных случаях $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ трудоёмкость предложенного алгоритма составляет $O(n \log n)$ и $O(n^2 \log n)$ соответственно. Однако с ростом размерности пространства актуальным становится вопрос FPT-разрешимости рассматриваемой задачи относительно параметра d, т. е. существования алгоритма с трудоёмкостью $O(F(d)\mathrm{Poly}(dn))$, где F — функция, зависящая только от d, а Poly — полином фиксированной степени. Этот вопрос до сих пор остаётся открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Пяткин А. В.** Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2007. Т. 14, № 1. С. 32–42.
2. **Бабурин А. Е., Пяткин А. В.** О полиномиальных алгоритмах решения одной задачи суммирования векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 2. С. 3–10.
3. **Гимади Э. Х., Глазков Ю. В., Рыков И. А.** О двух задачах выбора подмножества векторов с целочисленными координатами с максимальной нормой суммы в евклидовом пространстве // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15, № 4. С. 30–43.
4. **Гимади Э. Х., Кельманов А. В., Кельманова М. А., Хамидуллин С. А.** Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодического фрагмента при заданном числе повторов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 1. С. 55–74.
5. **Гимади Э. Х., Пяткин А. В., Рыков И. А.** О полиномиальной разрешимости некоторых задач выбора подмножества векторов в евклидовом пространстве фиксированной размерности // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15, № 6. С. 11–19.
6. **Пяткин А. В.** О сложности задачи выбора подмножества векторов максимальной суммарной длины // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 6. С. 68–73.
7. **Шенмайер В. В.** Решение евклидовых задач поиска подмножества векторов с использованием диаграмм Вороного // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23, № 4. С. 102–115.
8. **Buck R. C.** Partition of space // Am. Math. Mon. 1943. Vol. 50, No. 9. P. 541–544.
9. **Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C.** Introduction to algorithms. Cambridge, MA: MIT Press and McGraw-Hill, 2001. 1180 p.

10. **Edelsbrunner H., O'Rourke J., Seidel R.** Constructing arrangements of lines and hyperplanes with applications // SIAM J. Comput. 1986. Vol. 15, No. 2. P. 341–363.
11. **Hwang F. K., Onn S., Rothblum U. G.** A polynomial time algorithm for shaped partition problems // SIAM J. Optim. 1999. Vol. 10, No. 1. P. 70–81.
12. **Johnson D. S., Preparata F. P.** The densest hemisphere problem // Theor. Comp. Sci. 1978. Vol. 6, No. 1. P. 93–107.
13. **Onn S., Schulman L. J.** The vector partition problem for convex objective functions // Math. Oper. Res. 2001. Vol. 26, No. 3. P. 583–590.
14. **Onn S.** Private communication. Nov. 2016.

Шенмайер Владимир Владимирович

Статья поступила
22 мая 2016 г.

Исправленный вариант —
10 мая 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2017. Volume 24, No. 4. P. 111–129

UDC 519.16 DOI: 10.17377/daio.2017.24.541

AN EXACT ALGORITHM FOR FINDING A VECTOR SUBSET WITH THE LONGEST SUM

V. V. Shenmaier
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: shenmaier@mail.ru

Abstract. We consider the problem: Given a set of n vectors in the d-dimensional Euclidean space, find a subset maximizing the length of the sum vector. We propose an algorithm that finds an optimal solution to this problem in time $O(n^{d-1}(d + \log n))$. In particular, if the input vectors lie in a plane then the problem is solvable in almost linear time. Illustr. 2, bibliogr. 14.

Keywords: sum vector, search for a vector subset, Euclidean space, polynomial-time algorithm, optimal solution.

REFERENCES

1. **A. E. Baburin, E. Kh. Gimadi, N. I. Glebov,** and **A. V. Pyatkin,** The problem of finding a subset of vectors with the maximum total weight, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **14**, No. 1, 32–42, 2007. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **2**, No. 1, 32–38, 2008.
2. **A. E. Baburin** and **A. V. Pyatkin**, Polynomial algorithms for solving the vector sum problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **13**, No. 2, 3–10, 2006. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **1**, No. 3, 268–272, 2007.
3. **E. Kh. Gimadi, Yu. V. Glazkov,** and **I. A. Rykov,** On two problems of choosing some subset of vectors with integer coordinates that has maximum norm of the sum of elements in Euclidean space, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **15**, No. 4, 30–43, 2008. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **3**, No. 3, 343–352, 2009.
4. **E. Kh. Gimadi, A. V. Kel'manov, M. A. Kel'manova,** and **S. A. Khamidullin,** A posteriori detection of a quasiperiodic fragment with a given number of repetitions in a numerical sequence, *Sib. Zh. Ind. Mat.,* **9**, No. 1, 55–74, 2006. Translated in *Pattern Recognit. Image Anal.,* **18**, No. 1, 30–42, 2008.

5. **E. Kh. Gimadi, A. V. Pyatkin,** and **I. A. Rykov,** On polynomial solvability of some problems of a vector subset choice in a Euclidean space of fixed dimension, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **15**, No. 6, 11–19, 2008. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **4**, No. 1, 48–53, 2010.
6. **A. V. Pyatkin,** On complexity of a choice problem of the vector subset with the maximum sum length, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **16**, No. 6, 68–73, 2009. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **4**, No. 4, 549–552, 2010.
7. **V. V. Shenmaier,** Solving some vector subset problems by Voronoi diagrams, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **23**, No. 4, 102–115, 2016. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **10**, No. 4, 560–566, 2016.
8. **R. C. Buck,** Partition of space, *Am. Math. Mon.,* **50**, No. 9, 541–544, 1943.
9. **T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest,** and **C. Stein,** *Introduction to algorithms,* MIT Press and McGraw-Hill, Cambridge, MA, 2001.
10. **H. Edelsbrunner, J. O'Rourke,** and **R. Seidel,** Constructing arrangements of lines and hyperplanes with applications, *SIAM J. Comput.,* **15**, No. 2, 341–363, 1986.
11. **F. K. Hwang, S. Onn,** and **U. G. Rothblum,** A polynomial time algorithm for shaped partition problems, *SIAM J. Optim.,* **10**, No. 1, 70–81, 1999.
12. **D. S. Johnson** and **F. P. Preparata,** The densest hemisphere problem, *Theor. Comp. Sci.,* **6**, No. 1. 93–107, 1978.
13. **S. Onn** and **L. J. Schulman,** The vector partition problem for convex objective functions, *Math. Oper. Res.,* **26**, No. 3, 583–590, 2001.
14. **S. Onn** (private communication, Nov. 2016).

Vladimir V. Shenmaier

Received
22 May 2016
Revised
10 May 2017