ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2017. Том 24, № 4. С. 60–76

УДК 519.716 DOI: 10.17377/daio.2017.24.558

ОБ ОПЕРАЦИЯХ ОГРАНИЧЕННОГО СУФФИКСНОГО СУММИРОВАНИЯ И МУЛЬТИПЛИЦИРОВАНИЯ $^{*)}$

С. С. Марченков

Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, 119991 Москва, Россия
E-mail: ssmarchen@yandex.ru

Аннотация. Вводятся операции ограниченного суффиксного суммирования и ограниченного суффиксного мультиплицирования. На основе этих операций определяется класс BSSM полиномиально вычислимых функций. Доказывается, что класс BSSM включает класс BPC, определяемый на основе операции ограниченной префиксной конкатенации, и имеет конечный базис по суперпозиции. Библиогр. 13.

Ключевые слова: ограниченное суффиксное суммирование, ограниченное суффиксное мультиплицирование.

Введение

В теории рекурсивных функций существует целый ряд классов «элементарных» рекурсивных функций [11]. По-видимому, наиболее известным здесь является класс K функций, элементарных по Кальмару [13]. В индуктивных определениях класса K используются различные наборы простых арифметических функций и порождающие операции: суперпозиция и некоторые «ограниченные» варианты примитивной рекурсии. Широкое распространение получило определение, в котором помимо суперпозиции применяются операции ограниченного суммирования и ограниченного мультиплицирования. С использованием именно этого определения удалось доказать существование в классе K конечного базиса по суперпозиции, состоящего из «крайне» простых арифметических функций [7, 8].

В вопросе построения конечных базисов по суперпозиции для других известных классов элементарных рекурсивных функций этот результат служит ориентиром как по используемым определениям исследуемых

$^{*)}$Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16–01–00593).

классов, так и по применяемым в доказательствах техническим приёмам. Однако для ряда классов, близких к классу K (класс функций, элементарных по Сколему, класс $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика, класс P полиномиально вычислимых функций), методы, используемые в [7,8], не применимы в принципе. Поэтому для данных классов либо вообще не удаётся доказать существование конечных базисов по суперпозиции, либо с использованием других методов получаются базисы, которые состоят из сложно устроенных функций [1,4–6,12]. Не исключено, что определённый прогресс в этом направлении будет возможен при задании классов с помощью операций, близких к операциям ограниченного суммирования и ограниченного мультиплицирования.

С этой точки зрения интерес представляют класс P и некоторые его подклассы. Для класса P нетрудно дать индуктивное определение на основе варианта ограниченной словарной рекурсии [9] и доказать существование конечного базиса по суперпозиции с использованием так называемых квазиуниверсальных функций [12]. Вместе с тем функции базиса из работы [12] нельзя признать простыми.

В работе [10] был введён вариант ограниченной словарной рекурсии — ограниченная префиксная конкатенация. На основе этой операции в [10] определён класс BPC «элементарных» словарных функций, который целиком входит в класс P. По-видимому, класс BPC отличен от класса P (вопрос пока открыт). В связи с этим представляет интерес введение новых операций, более сильных и более «арифметических», нежели операция ограниченной префиксной конкатенации. Цель здесь состоит в том, чтобы с помощью новых операций расширить класс BPC (возможно, до класса P) и доказать существование «простого» конечного базиса по суперпозиции в полученном расширении.

В настоящей работе в качестве таких операций предлагаются операции ограниченного суффиксного суммирования и ограниченного суффиксного мультиплицирования. Эти операции близки к обычным арифметическим операциям ограниченного суммирования и ограниченного мультиплицирования. На основе данных операций (и операции суперпозиции) определяется класс BSSM «элементарных» рекурсивных функций, который целиком входит в класс P. Доказано (теорема 1), что справедливо включение BPC $\subseteq$ BSSM и класс BSSM имеет конечный базис по суперпозиции (теорема 2).

1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. Рассматриваем всюду определённые функции на $\mathbb{N}$. Для любых i, n $(1 \leqslant i \leqslant n,\ n \geqslant 1)$ через $I_i^n(x_1, \ldots, x_n)$ обозначаем

селекторную функцию, значения которой совпадают со значениями переменной x_i. Множество всех селекторных функций обозначаем через I. Функцию $x_1 \dot{-} x_2$ определяем как $\max(0, x_1 - x_2)$.

Между множеством всех слов в алфавите $\{1, 2\}$ (включая пустое слово Λ) и множеством $\mathbb{N}$ определим взаимно однозначное соответствие. Произвольному непустому слову $a_k \dots a_0$, состоящему из символов 1 и 2, сопоставим натуральное число

$$\nu(a_k \dots a_0) = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 2^i.$$

Пустому слову Λ сопоставим число 0. Слово $a_k \dots a_0$ будем называть *диадическим представлением* числа $\nu(a_k \dots a_0)$.

Отображение ν позволяет говорить о словарных функциях над алфавитом $\{1, 2\}$ как о числовых функциях на множестве $\mathbb{N}$, и наоборот. Поэтому в дальнейшем будем часто определять числовые либо словарные функции, имея в виду, что одноимённые им словарные или числовые функции получаются с использованием взаимно однозначного соответствия ν. Длину диадического представления числа x (а также длину слова x в алфавите $\{1, 2\}$) обозначаем через $l(x)$, полагая $l(0) = l(\Lambda) = 0$.

Для слов x, y в алфавите $\{1, 2\}$ используем стандартное понятие «слово x есть суффикс слова y» (обозначение $y \sqsupseteq x$), считая слова Λ и y суффиксами слова y. Операции *ограниченного суффиксного суммирования* и *ограниченного суффиксного мультиплицирования* определяем для числовой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ формулами

$$\sum_{x_n \sqsupseteq z} f(x_1, \dots, x_{n-1}, z), \qquad \prod_{x_n \sqsupseteq z} f(x_1, \dots, x_{n-1}, z),$$

полагая, что (арифметические) сумма и произведение распространяются по всем суффиксам z диадического представления числа x_n.

Через BSSM обозначаем наименьший класс функций, который включает исходные функции $x + 1, x_1 \dot{-} x_2, I$ и замкнут относительно операций суперпозиции, ограниченного суффиксного суммирования и ограниченного суффиксного мультиплицирования. Индукцией по построению функций в классе BSSM нетрудно показать, что для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из этого класса найдётся такой полином p с натуральными коэффициентами, что

$$f(x_1, \dots, x_n) \leqslant 2^{p(l(x_1), \dots, l(x_n))}.$$

На множестве всех слов в алфавите $\{1, 2\}$ определяем операцию конкатенации $x_1 * x_2$, считая, что слово $x_1 * x_2$ получается из слова x_1 приписыванием справа слова x_2. Определим (словарную) функцию $\mathrm{subtr}(x_1, x_2)$ соотношениями

$$\mathrm{subtr}(x_1, x_2) = \begin{cases} y, & \text{если } y \text{ — такое (единственное) слово,} \\ & \text{что } x_1 = y * x_2; \\ \Lambda & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так же, как для суффикса, вводим отношение «слово x есть префикс слова y» (обозначение $x \sqsubseteq y$). На основе операции конкатенации определяем операцию *ограниченной префиксной конкатенации*

$$\operatorname*{Con}_{z \sqsubseteq x_n} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, z),$$

где данная формула есть сокращение для выражения

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}, \Lambda) * g(x_1, \ldots, x_{n-1}, z_1) * \cdots * g(x_1, \ldots, x_{n-1}, z_l),$$

$l = l(x_n)$, $z_1, \ldots, z_l$ — все непустые префиксы слова x_n в порядке возрастания их длин и $z_l = x_n$.

Обозначим через BPC класс всех функций, которые можно получить с помощью операций суперпозиции и ограниченной префиксной конкатенации из множества функций $\{1,\ 2,\ x_1 * x_2,\ \mathrm{subtr}(x_1, x_2),\ I\}$.

2. Построение простейших функций

Ниже определим некоторые необходимые арифметические функции в классе BSSM.

Имеем $0 = x \dot{-} x$. Из функций 0 и $x + 1$ получаем все остальные функции-константы. Далее определяем

$$\overline{\mathrm{sg}}(x) = 1 \dot{-} x, \quad \mathrm{sg}(x) = \overline{\mathrm{sg}}(\overline{\mathrm{sg}}(x)),$$
$$x \cdot (l(y) + 1) = \sum_{y \sqsupseteq z} I_1^2(x, z), \quad x^{l(y)+1} = \prod_{y \sqsupseteq z} I_1^2(x, z),$$
$$x \cdot l(y) = x \cdot (l(y) + 1) \dot{-} x, \quad l(x) = 1 \cdot l(x),$$
$$x \cdot \mathrm{sg}(y) = x \cdot l(\mathrm{sg}(y)), \quad x \cdot \overline{\mathrm{sg}}(y) = x \cdot l(\overline{\mathrm{sg}}(y)).$$

Поскольку $x + y \leqslant (x + 2)^{l(y)+1}$, получаем равенства

$$x + y = (x + 2)^{l(y)+1} \dot{-} (((x + 2)^{l(y)+1} \dot{-} x) \dot{-} y),$$
$$|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x), \quad 2xy = ((x + y)^2 \dot{-} x^2) \dot{-} y^2,$$

где функция x^2 получается из $x^{l(y)+1}$ подстановкой константы 1 вместо y.

Имея константы и функции $x \cdot \mathrm{sg}(y)$, $x \cdot \overline{\mathrm{sg}}(y)$, $x + y$, $|x - y|$, можно изменить значения произвольной функции f в конечном числе точек. Например, чтобы изменить значение функции $f(x)$ в точке a на значение b, следует образовать функцию

$$b \cdot \overline{\mathrm{sg}}\,|x - a| + f(x) \cdot \mathrm{sg}\,|x - a|.$$

Обозначим через $g_1(x)$ функцию, которая получена из функции-константы 2 заменой её значений в точках $0, 1, 2$ на значение 1. Положив

$$g_2(x) = \prod_{x \sqsupseteq z} g_1(z),$$

имеем

$$g_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 2^{l(x)-1}, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Если теперь определить $g_3(x, y) = 2 \cdot x \cdot g_2(y)$, то функция $g_3(x, y)$ будет отличаться от функции $x \cdot 2^{l(y)}$ только при $y = 0$. Следовательно, функция $x \cdot 2^{l(y)}$ входит в класс BSSM.

3. Соотношение между классами BSSM и BPC

Теорема 1. *Имеет место включение* BPC $\subseteq$ BSSM.

Доказательство. Для конкатенации $x * y$ справедлива формула

$$x * y = x \cdot 2^{l(y)} + y.$$

Пусть $\mathrm{first}(x)$ есть первый (старший) разряд диадического представления x, если $x \neq 0$, и $\mathrm{first}(0) = 0$. Имеем

$$\mathrm{first}(x) = \sum_{x \sqsupseteq z} (\overline{\mathrm{sg}}\,|1 * z - x| + 2 \cdot \overline{\mathrm{sg}}\,|2 * z - x|).$$

Если положить

$$\mathrm{suff}(x, y) = \sum_{x \sqsupseteq z} z \cdot \overline{\mathrm{sg}}\,|l(y) + l(z) - l(x)|,$$

то значением функции $\mathrm{suff}(x, y)$ будет суффикс слова x длины $l(x) - l(y)$, если $l(x) \geqslant l(y)$, и Λ в противном случае.

Пусть функция $\mathrm{inv}(x)$ обращает диадическое представление числа x. Имеем

$$\mathrm{inv}(x) = \sum_{x \sqsupseteq z} \mathrm{first}(z) \cdot 2^{l(\mathrm{suff}(x,z))}.$$

Для функции $\operatorname{subtr}(x, y)$ получим

$$\operatorname{subtr}(x, y) = \sum_{\operatorname{inv}(x) \sqsupseteq z} \operatorname{inv}(z) \cdot \overline{\operatorname{sg}}\,|\operatorname{inv}(y) * \operatorname{inv}(z) - \operatorname{inv}(x)|.$$

Остаётся рассмотреть операцию ограниченной префиксной конкатенации. Поскольку уже имеем функцию $\operatorname{inv}(x)$, операцию ограниченной префиксной конкатенации можно заменить операцией ограниченной суффиксной конкатенации, причём конкатенацию следует проводить в обратном порядке. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция класса BSSM и

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname*{Con}_{x_n \sqsupseteq z} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, z).$$

Положим

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{x_n \sqsupseteq z} 2^{l(f(x_1, \ldots, x_{n-1}, z))} = 2^{\sum\limits_{x_n \sqsupseteq z} l(f(x_1, \ldots, x_{n-1}, z))}.$$

Тогда длина диадического представления числа $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ равна сумме длин диадических представлений чисел $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, z)$ по всем таким z, для которых $x_n \sqsupseteq z$, т. е. равна длине диадического представления числа $g(x_1, \ldots, x_n)$. Тем самым

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \\ &\quad + \sum_{x_n \sqsupseteq z} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, z) \cdot \operatorname{sg}(z) \cdot 2^{l(g_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(z)))}. \end{aligned}$$

Здесь функция $h(z)$ при $z \neq 0$ даёт число, длина диадического представления которого на 1 меньше длины диадического представления числа z. Эту функцию можно получить, например, в виде

$$h(z) = \operatorname{inv}(\operatorname{subtr}(\operatorname{inv}(z), \operatorname{first}(z))).$$

Теорема 1 доказана.

Определим в классе BSSM ещё несколько функций, которые понадобятся в дальнейшем. По аналогии с функцией $\operatorname{first}(x)$ зададим функцию $\operatorname{last}(x)$:

$$\operatorname{last}(x) = \operatorname{first}(\operatorname{inv}(x)).$$

Далее, нетрудно получить функцию $[x/2]$:

$$[x/2] = \operatorname{subtr}(x, \operatorname{last}(x)) + \overline{\operatorname{sg}}\,|\operatorname{last}(x) - 2|.$$

Суперпозицией функций $2xy$ и $[x/2]$ приходим к функции xy.

Пусть функция $\mathrm{doub}(x)$ даёт число, диадическое представление которого получается из диадического представления x одновременным удвоением каждого символа, при этом $\mathrm{doub}(0) = 0$. Имеем

$$\mathrm{doub}(x) = \underset{z \sqsubseteq x}{\mathrm{Con}}\, \mathrm{last}(z) * \mathrm{last}(z).$$

Функцию, «обратную» к $\mathrm{doub}(x)$, обозначим через $\mathrm{compress}(x)$, иначе говоря, $\mathrm{compress}(\mathrm{doub}(x)) = x$. Для функции $\mathrm{compress}(x)$ справедливо равенство

$$\mathrm{compress}(x) = \underset{z \sqsubseteq x}{\mathrm{Con}}\, \mathrm{last}(z) \cdot \overline{\mathrm{sg}}\, |l(z) - 2[l(z)/2]|.$$

Используя функцию $\mathrm{doub}(x)$, можно определить инъективное отображение из множества $\mathbb{N}^n$, $n \geqslant 2$, в множество $\mathbb{N}$ с помощью функции

$$\mathrm{doub}(x_1) * 12 * \mathrm{doub}(x_2) * 12 * \cdots * 12 * \mathrm{doub}(x_n). \tag{1}$$

«Извлечение» чисел $x_1, \ldots, x_n$ из числа x вида (1) происходит с использованием функции $\mathrm{left}(x)$, которая выделяет в слове x префикс $\mathrm{doub}(x_1)$. Для функции $\mathrm{left}(x)$ имеем

$$\mathrm{left}(x) = \underset{z \sqsubseteq x}{\mathrm{Con}}(\mathrm{last}(z) * \mathrm{last}(z)) \cdot \overline{\mathrm{sg}}\, |z - \mathrm{doub}(\mathrm{compress}(z))|.$$

Далее получаем $x_1 = \mathrm{compress}(\mathrm{left}(x))$. Чтобы получить x_2, сначала с помощью функции $\mathrm{inv}(\mathrm{subtr}(\mathrm{inv}(x), 21 * \mathrm{inv}(\mathrm{left}(x))))$ удаляем префикс $\mathrm{doub}(x_1) * 12$ из слова x, а затем применяем к полученному слову функции left, compress и т. д.

Заметим ещё, что в классе BSSM определимы все функции вида

$$2^{p(l(x_1),\ldots,l(x_n))},$$

где p — полином с натуральными коэффициентами. В самом деле, поскольку классу BSSM принадлежат функции 2, xy и $2^{l(x)}$, достаточно лишь установить, что в класс BSSM входят все функции вида $2^{(l(x))^k}$, где k — натуральное число. Однако если взять функцию h, определённую в конце доказательства теоремы 1, то придём к следующему соотношению:

$$2^{(l(x))^{k+1}} = \overline{\mathrm{sg}}(x) + \mathrm{sg}(x) \cdot \Bigl(\prod_{h(x) \sqsupseteq z} 2^{(l(x))^k}\Bigr).$$

4. Конечный базис по суперпозиции

Если $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ — предикат на множестве $\mathbb{N}$, то *характеристической функцией* предиката ρ называем функцию $\chi_\rho(x_1, \ldots, x_m)$, которая принимает лишь значения $0, 1$ и при этом ρ совпадает с предикатом $\chi_\rho(x_1, \ldots, x_m) = 1$. Обозначим через BSSM_* класс всех предикатов, характеристические функции которых принадлежат классу BSSM. Заметим, что если предикаты ρ и σ принадлежат классу BSSM_*, то классу BSSM_* принадлежат также предикаты $\neg\rho$ и $\rho \,\&\, \sigma$, поскольку соответствующие характеристические функции определяются формулами $\overline{\mathrm{sg}}(\chi_\rho)$ и $\chi_\rho \cdot \chi_\sigma$. Таким образом, класс BSSM_* замкнут относительно операций логики высказываний.

Рассмотрим предикаты $B(x, y) \equiv$ (диадическое представление числа x есть префикс диадического представления числа y),
$E(x, y) \equiv$ (диадическое представление числа x есть суффикс диадического представления числа y),
$C(x, y) \equiv$ (диадическое представление числа x входит в диадическое представление числа y).

Покажем, что они принадлежат классу BSSM_*. Для предикатов B и E это следует из эквивалентностей

$$B(x, y) \equiv (y = x * \mathrm{inv}(\mathrm{subtr}(\mathrm{inv}(y), \mathrm{inv}(x)))),$$
$$E(x, y) \equiv B(\mathrm{inv}(x), \mathrm{inv}(y)).$$

Характеристическая функция предиката $C(x, y)$ представима в виде

$$\operatorname*{Con}_{z_1 \sqsubseteq y} \operatorname*{Con}_{z_2 \sqsubseteq y} \overline{\mathrm{sg}}\, |z_1 - z_2 * x|.$$

Используя это представление, по аналогии с операциями $\mathrm{Con}_{z \sqsubseteq x}$ и $\mathrm{Con}_{x \sqsupseteq z}$ определяем операцию $\mathrm{Con}_{C(z,x)}$ (операция ограниченной конкатенации, распространённая по всем словам z, входящим в слово x).

Известно [2, 3], что произвольную суперпозицию функций (исключая введение фиктивных переменных) можно представить в виде последовательного выполнения следующих четырёх простых операций (далее g, h — данные функции, а f получается применением рассматриваемой операции).

1. Операция циклической перестановки переменных, при $n \geqslant 2$ определяемая равенством

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_2, \ldots, x_n, x_1).$$

2. Операция транспозиции первых двух переменных, при $n \geqslant 2$ определяемая равенством

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n).$$

3. Операция отождествления первых двух переменных, при $n \geqslant 2$ определяемая равенством

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = g(x_1, x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}).$$

4. Операция подстановки одной функции вместо первой переменной другой функции, которая при любых $m, n \geqslant 1$ определяется равенством

$$f(x_1, \ldots, x_{m+n-1}) = h(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}).$$

Используя этот факт, класс BSSM будем рассматривать как наименьший класс функций, который включает исходные функции $x+1$, $x_1 \dot{-} x_2$, $I_1^2(x_1, x_2)$ и замкнут относительно операций суперпозиции 1–4, ограниченного суффиксного суммирования и ограниченного суффиксного мультиплицирования (функция I_1^2 необходима для введения фиктивных переменных).

Теорема 2. *Класс* BSSM *имеет конечный базис по суперпозиции.*

Доказательство. Для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ положим

$$\hat{f}(x) = 1212 * \underset{C(z_1,x)}{\mathrm{Con}} \ldots \underset{C(z_n,x)}{\mathrm{Con}} \mathrm{doub}(z_1+1) * 12 * \cdots * 12$$
$$* \mathrm{doub}(z_n+1) * 12 * \mathrm{doub}(f(z_1, \ldots, z_n)+1) * 1212. \quad (2)$$

Заметим, что если взять, например, $x = x_1 * \ldots * x_n$, то в диадическое представление числа $\hat{f}(x)$ будут «входить», в частности, все величины $f(z_1, \ldots, z_n)+1$, где $z_1 \sqsubseteq x_1, \ldots, z_n \sqsubseteq x_n$.

В дальнейшем хотелось бы иметь дело только с функциями вида $\hat{f}(x)$. Однако в некоторых случаях определение (2) может оказаться слишком узким. Поэтому расширим понятие функции $\hat{f}(x)$, сохранив в целом структуру правой части формулы (2). От функции $\hat{f}(x)$ далее потребуем, чтобы диадическое представление значения $\hat{f}(x)$ начиналось и заканчивалось словом 1212, для любых $z_1 \sqsubseteq x, \ldots, z_n \sqsubseteq x$ включало (в любом порядке) слова вида

$$\mathrm{doub}(z_1+1) * 12 * \cdots * 12 * \mathrm{doub}(z_n+1) * 12 * \mathrm{doub}(f(z_1, \ldots, z_n)+1),$$

отделённые друг от друга словами 1212, и, возможно, ещё некоторые слова такого же типа для других значений $z_1, \ldots, z_n$. Эти условия можно

было бы формализовать средствами класса BSSM, однако соответствующие построения будут довольно громоздкими и по существу не окажут влияния на дальнейшие рассуждения. Отметим лишь, что при конструировании одних функций вида $\hat{f}(x)$ через другие функции этого вида нужные условия будут выполняться почти «автоматически».

Будем придерживаться следующего плана доказательства теоремы. Сначала определим функции вида $\hat{f}(x)$ для исходных функций $x+1$, $x_1 \dot{-} x_2$, $I_1^2(x_1, x_2)$ класса BSSM. Затем для каждой из порождающих операций класса BSSM определим в классе BSSM функцию, которая позволяет из функций вида $\hat{f}(x)$, построенных для входящих в операцию функций, получить функцию вида $\hat{f}(x)$, отвечающую результату применения операции. Наконец, покажем, как с помощью функции класса BSSM из величины $\hat{f}(x)$ «извлекается» значение $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Начнём с определения функций вида $\hat{f}(x)$ для исходных функций класса BSSM:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}(x) &= 1212 * \operatorname*{Con}_{C(z,x)} \mathrm{doub}(z+1) * 12 * \mathrm{doub}(z+2) * 1212,\\
\mathrm{Subtr}(x) &= 1212 * \operatorname*{Con}_{C(z_1,x)} \operatorname*{Con}_{C(z_2,x)} \mathrm{doub}(z_1+1) * 12\\
&\qquad * \mathrm{doub}(z_2+1) * 12 * \mathrm{doub}((z_1 \dot{-} z_2)+1) * 1212,\\
\mathrm{Id}(x) &= 1212 * \operatorname*{Con}_{C(z_1,x)} \operatorname*{Con}_{C(z_2,x)} \mathrm{doub}(z_1+1) * 12\\
&\qquad * \mathrm{doub}(z_2+1) * 12 * \mathrm{doub}(z_1+1) * 1212.
\end{aligned}$$

Далее построим в классе BSSM функцию $\mathrm{Yield}(y, v)$, которая обладает следующим свойством: если

$$v = \mathrm{doub}(z_1+1) * 12 * \cdots * 12 * \mathrm{doub}(z_n+1)$$

(параметр n здесь не фиксирован) и значение $f(z_1, \ldots, z_n)$ «содержится» в $\hat{f}(x)$, то

$$\mathrm{Yield}(\hat{f}(x), v) = f(z_1, \ldots, z_n).$$

Понятно, что в слове y необходимо отыскать такое подслово w, что слово $1212 * v * 12 * w * 1212$ входит в слово y и слово w имеет вид $\mathrm{doub}(w')$. Тогда

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \mathrm{compress}(w) \dot{-} 1.$$

В соответствии с этим замечанием определяем

$$\mathrm{Yield}(y, v) = \operatorname*{Con}_{C(w,y)} (\mathrm{compress}(w) \dot{-} 1) \cdot \chi(y, v, w),$$

где $\chi(y, v, w)$ — характеристическая функция предиката

$$(w = \mathrm{doub}(\mathrm{compress}(w)))\ \&\ C(1212 * v * 12 * w * 1212, y).$$

Перейдём к операциям суперпозиции 1–4. Заметим, что для операций 1 и 2 в качестве функции $\hat{f}(x)$ можно взять $\hat{g}(x)$. Это сразу следует из определения функции $\hat{g}(x)$: если $\hat{g}(x)$ «содержит» значение $g(z_1, \ldots, z_n)$, то $\hat{g}(x)$ содержит также значения $g(z_2, \ldots, z_{n-1}, z_1)$ и $g(z_2, z_1, z_3, \ldots, z_n)$.

Рассмотрим операцию 3. Здесь вновь следует отметить, что если $\hat{g}(x)$ «содержит» значение $g(z_1, \ldots, z_n)$, то $\hat{g}(x)$ содержит также и значение $g(z_1, z_1, z_3, \ldots, z_n)$. Поэтому, чтобы получить из $\hat{g}(x)$ функцию $\hat{f}(x)$, необходимо все слова вида

$$1212 * \mathrm{doub}(z_1 + 1) * 12 * \mathrm{doub}(z_1 + 1) * 12 * \mathrm{doub}(z_3 + 1) * 12 \\ * \cdots * \mathrm{doub}(z_n + 1) * 12 * \mathrm{doub}(g(z_1, z_1, z_3, \ldots, z_n) + 1) * 1212$$

в диадическом представлении числа $\hat{g}(x)$ преобразовать в слова

$$1212 * \mathrm{doub}(z_1 + 1) * 12 * \mathrm{doub}(z_3 + 1) * 12 \\ * \cdots * \mathrm{doub}(z_n + 1) * 12 * \mathrm{doub}(g(z_1, z_1, z_3, \ldots, z_n) + 1) * 1212,$$

остальные слова следует опустить. Отсюда вытекает алгоритм получения слова $\hat{f}(x)$. Сначала образуем префикс 1212 формируемого слова $\hat{f}(x)$, а затем выполняем следующие преобразования.

1) Выбираем в слове $\hat{g}(x)$ произвольное подслово v, которое не содержит подслова 1212 и ограничено в слове $\hat{g}(x)$ с обеих сторон словом 1212.

2) Выбираем в слове v префикс v_1 максимальной длины, который является значением функции doub (это будет слово вида $\mathrm{doub}(z_1 + 1)$).

3) Удаляем из слова v слово $v_1 * 12$ и в полученном слове w находим префикс v_2 максимальной длины, который также является значением функции doub (это будет слово вида $\mathrm{doub}(z_2 + 1)$).

4) Проверяем, совпадают ли слова v_1 и v_2.

5) В случае отрицательного ответа вносим в формируемое слово $\hat{f}(x)$ пустое слово. В противном случае добавляем к формируемому слову $\hat{f}(x)$ слово $w * 1212$.

Покажем, как в классе BSSM можно реализовать пп. 1–5. Во-первых, выбор слов v, v_1, v_2 осуществляется с помощью операции Con, в которой связанные переменные пробегают по всем подсловам слова $\hat{g}(x)$. Далее, в п. 1 слово v выделяется предикатом

$$C(1212 * v * 1212, \hat{g}(x))\ \&\ \neg C(1212, v).$$

Слово v_1 в п. 2 имеет вид $\mathrm{left}(v)$. Слово w в п. 3 определяется по формуле $\mathrm{inv}(\mathrm{subtr}(\mathrm{inv}(v), 21 * \mathrm{inv}(v_1)))$. Для слова v_2 получаем $v_2 = \mathrm{left}(w)$. Сравнение слов v_1, v_2 проводится с помощью предиката $\overline{\mathrm{sg}}\,|v_1 - v_2| = 1$.

Реализация пп. 1–5 в классе BSSM приводит к функции $\mathrm{Sup}_1(y)$, которая переводит $\hat{g}(x)$ в $\hat{f}(x)$.

Рассмотрим операцию 4. Здесь следует учесть, что если имеет место $x = x_1 * \cdots * x_{m+n-1}$, то значение $\hat{h}(x)$, вообще говоря, не «содержит» значения $h(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1})$. Поэтому в дальнейшем в качестве x необходимо рассматривать «большее» слово, например, слово $x_1 * \cdots * x_{m+n-1} * g(x_1, \ldots, x_m)$. В свою очередь, величина $g(x_1, \ldots, x_m)$ будет получаться из $\hat{g}(x_1 * \ldots * x_{m+n-1})$ с помощью функции Yield.

Теперь перечислим преобразования, с помощью которых из функций $\hat{g}(x)$, $\hat{h}(x)$ получается функция $\hat{f}(x)$. Как и выше, образуем префикс 1212 и затем выполняем следующие действия.

1) Выбираем в слове $\hat{g}(x)$ произвольное подслово v, которое ограничено в $\hat{g}(x)$ словами 1212 и не содержит слова 1212.

2) Находим в слове v префикс v_1 максимальной длины, который имеет суффикс 12 (слово вида $\mathrm{doub}(z_1 + 1) * 12 * \cdots * 12 * \mathrm{doub}(z_m + 1) * 12$).

3) Определяем слово w, которое получается из слова v удалением префикса v_1 (это будет слово $\mathrm{doub}(g(z_1, \ldots, z_m) + 1)$).

4) Выбираем в слове $\hat{h}(x)$ подслово t, которое ограничено в слове $\hat{h}(x)$ словами 1212, не содержит подслова 1212 и имеет префикс $w * 12$.

5) Добавляем (справа) к формируемому слову $\hat{f}(x)$ слово $v_1 * t * 1212$.

Реализуем в классе BSSM перечисленные пп. 1–5 и получаем функцию $\mathrm{Sub}_2(y, z)$.

Перейдём к операциям ограниченного суффиксного суммирования и мультиплицирования. Прежде чем определить соответствующие функции класса BSSM, отметим некоторые особенности функций $\hat{f}(x)$. В общем случае значения $f(z_1, \ldots, z_n)$, «содержащиеся» в $\hat{f}(x)$, располагаются в слове $\hat{f}(x)$ в произвольном порядке и, возможно, повторяются. Если первая особенность не является существенной помехой при рассмотрении коммутативных операций сложения и умножения, то вторая особенность может исказить получение необходимого результата. Поэтому предварительно проведём «проектирование» слова $\hat{f}(x)$, освободившись в нём от повторяющихся значений функции f. В принципе, такая операция не является очень сложной в рамках класса BSSM: необходимо выделить в слове $\hat{f}(x)$ первые вхождения подслов вида

$$\mathrm{doub}(z_1 + 1) * 12 * \cdots * 12 * \mathrm{doub}(z_n + 1) * 12 * \mathrm{doub}(f(z_1, \ldots, z_n) + 1)$$

и затем удалить из слова $\hat{f}(x)$ все остальные вхождения этих слов.

По аналогии с построением функций Sub_1 и Sub_2 укажем действия, которые позволят определить в классе BSSM функцию $\mathrm{Proj}(y)$, осуществляющую описанное выше «проектирование» функции $\hat{f}(x)$. Сначала, как и выше, образуем префикс 1212 формируемого слова $\mathrm{Proj}(y)$. Затем выполняем следующие действия.

1) Выбираем в слове y произвольное подслово v, которое ограничено в слове y словами 1212 и не содержит слова 1212.

2) Проверяем, что выбранное вхождение слова v в слово y является первым вхождением слова v в слово y.

Технически эту проверку в классе BSSM можно выполнить с использованием ограниченных префиксного и суффиксного кванторов $\forall_{z\sqsubseteq y}$, $\forall_{y\sqsupseteq z}$ [10], которые дают возможность проверять префикс (суффикс) слова y, предшествующий (следующий за) рассматриваемому вхождению слова v в слово y, на наличие в нём ещё одного слова v. Подробно выразимость кванторов $\forall_{z\sqsubseteq y}$, $\forall_{y\sqsupseteq z}$ через операцию ограниченной префиксной конкатенации изложена в [10].

3) В случае получения положительного ответа добавляем к определяемому слову $\mathrm{Proj}(y)$ слово v.

Далее можно предполагать, что к функции $\hat{f}(x)$ уже применена функция Proj. Поэтому будем считать, что каждое значение функции f присутствует в слове $\hat{f}(x)$ только один раз. Определим к классе BSSM функцию $\mathrm{Sum}(y)$, которая обладает следующим свойством: если для некоторых $x_1, \dots, x_n$ слово $\hat{f}(x)$ «содержит» все значения $f(x_1, \dots, x_{n-1}, z)$, где $x_n \sqsupseteq z$, то в слово $\mathrm{Sum}(\hat{f}(x))$ входит подслово

$$1212 * \mathrm{doub}(x_1 + 1) * 12 * \cdots * 12 * \mathrm{doub}(x_n + 1) * 12 \\ * \,\mathrm{doub}\Big(1 + \sum_{x_n \sqsupseteq z} f(x_1, \dots, x_{n-1}, z)\Big) * 1212.$$

Перечислим все действия, которые необходимы для вычисления значения $\mathrm{Sum}(y)$. Прежде всего, формируем префикс 1212 слова $\mathrm{Sum}(y)$.

1) Выбираем в слове y произвольное подслово v, которое ограничено в слове y словами 1212 и не содержит слова 1212.

2) Выбираем в слове v суффикс v_1 максимальной длины, который является значением функции doub, и образуем слово w, удаляя из слова v суффикс $12 * v_1$ (слово w будет иметь вид $\mathrm{doub}(x_1 + 1) * 12 * \cdots * 12 * \mathrm{doub}(x_n + 1)$).

3) Выбираем в слове w суффикс w_2 максимальной длины, который является значением функции doub, и образуем слово w_1, удаляя из слова w суффикс w_2 (при $n > 1$ слово w_1 имеет вид $\mathrm{doub}(x_1 + 1) * 12 * \cdots *$

$12*\mathrm{doub}(x_{n-1}+1)*12$, а слово w_2 — вид $\mathrm{doub}(x_n+1)$; при $n=1$ слово w_1 пусто).

4) Для всякого подслова t слова y, которое ограничено в слове y словами 1212 и не содержит слова 1212, по аналогии с пп. 2, 3 выбираем слова v_1, w_1, w_2, которые в этом случае обозначаем через p_1, q_1, q_2. Далее с помощью операции $\sum$ суммируем величины $\mathrm{compress}(p_1) \dot{-} 1$ для тех q_1, q_2, для которых $q_1 = w_1$ и $(\mathrm{compress}(w_2) \dot{-} 1) \sqsupseteq (\mathrm{compress}(q_2) \dot{-} 1)$. Получаем число r.

5) Добавляем к определяемому слову $\mathrm{Sum}(y)$ слово $w*12*\mathrm{doub}(r+1)$.

Аналогично определяем функцию $\mathrm{Prod}(y)$, соответствующую операции ограниченного суффиксного мультиплицирования.

Таким образом заключаем, что базис по суперпозиции в классе BSSM образуют функции

$$1,\quad 2,\quad x*y,\quad \mathrm{S}(x),\quad \mathrm{Subtr}(x),\quad \mathrm{Id}(x),\quad \mathrm{Yield}(x),$$

$$\mathrm{Sup}_1(x),\quad \mathrm{Sup}_2(x),\quad \mathrm{Proj}(x),\quad \mathrm{Sum}(x),\quad \mathrm{Prod}(x).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Волков С. А.** Пример простой квазиуниверсальной функции в классе $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика // Дискрет. математика. 2006. Т. 18, № 4. С. 31–44.
2. **Мальцев А. И.** Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 2. С. 5–24.
3. **Мальцев А. И.** Итеративные алгебры Поста. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976. 100 с.
4. **Марченков С. С.** Устранение схем рекурсий в классе $\mathcal{E}^2$ Гжегорчика // Мат. заметки. 1969. Т. 5, № 5. С. 561–568.
5. **Марченков С. С.** Об ограниченных рекурсиях // Math. Balk. 1972. Т. 2. С. 124–142.
6. **Марченков С. С.** Базисы по суперпозиции в классах рекурсивных функций // Мат. вопросы кибернетики. 1991. Вып. 3. С. 115–139.
7. **Марченков С. С.** Суперпозиции элементарных арифметических функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 4. С. 33–48.
8. **Марченков С. С.** Элементарные арифметические функции. М.: Либроком, 2009. 47 с.
9. **Марченков С. С.** Ограниченная монотонная рекурсия и МГ-автоматы // Программирование. 2013. № 6. С. 3–11.
10. **Марченков С. С.** Об элементарных словарных функциях, получаемых на основе ограниченной префиксной конкатенации // Дискрет. математика. 2015. Т. 27, № 3. С. 44–55.

11. **Марченков С. С.** Классы элементарных рекурсивных функций. М.: Физматлит, 2016. 136 с.
12. **Осипов К. В.** О квазиуниверсальных словарных функциях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2016. № 1. С. 28–34.
13. **Kalmár L.** Egyszerü példa eldönthetetlen aritmetikai problémára // Mat. Fiz. Lapok. 1943. Köt. 50. Ol. 1–23.

Марченков Сергей Серафимович

Статья поступила
30 ноября 2016 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2017. Volume 24, No. 4. P. 60–76

UDC 519.716 DOI: 10.17377/daio.2017.24.558

ON THE OPERATIONS OF BOUNDED SUFFIX SUMMATION AND MULTIPLICATION

S. S. Marchenkov
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie gory, 119991 Moscow, Russia
E-mail: ssmarchen@yandex.ru

Abstract. The operations of bounded suffix summation and bounded suffix multiplication are introduced. Using these operations, we define the class BSSM of polynomially computable functions. It is proved that the class BSSM contains the class BPC defined by the operation of bounded prefix concatenation and has finite basis under superposition. Bibliogr. 13.

Keywords: bounded suffix summation, bounded suffix multiplication.

REFERENCES

1. **S. A. Volkov,** An example of a simple quasi-universal function in the class $\mathcal{E}^2$ of the Grzegorczyk hierarchy, *Diskretn. Mat.,* **18**, No. 4, 31–44, 2006 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.*, **16**, No. 5, 513–526, 2006.
2. **A. I. Maltsev,** Iterative algebras and Post manifolds, *Algebra Logika,* **5**, No. 2, 5–24, 1966 [Russian].
3. **A. I. Maltsev,** *Iterativnye algebry Posta* (Iterative Post Algebras), Izd. NGU, Novosibirsk, 1976 [Russian].
4. **S. S. Marchenkov,** Elimination of recursion schemas in the Grzegorczyk class $\mathcal{E}^2$, *Mat. Zamet.,* **5**, No. 5, 561–568, 1969 [Russian]. Translated in *Math. Notes Acad. Sci. USSR,* **5**, No. 5, 336–340, 1969.
5. **S. S. Marchenkov,** On bounded recursions, *Math. Balk.,* **2**, 124–142, 1972 [Russian].
6. **S. S. Marchenkov,** Bases under superposition in the classes of recursive functions, *Matematicheskie voprosy kibernetiki* (Mathematical Problems of Cybernetics), Vol. 3, pp. 115–139, Nauka, Moscow, 1991 [Russian].
7. **S. S. Marchenkov,** Superpositions of elementary arithmetical functions, *Disret. Anal. Issled. Oper.,* **13**, No. 4, 33–48, 2006 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **1**, No. 3, 351–360, 2007.
8. **S. S. Marchenkov,** *Elementarnye arifmeticheskie funktsii* (Elementary Arithmetical Functions), LIBROKOM, Moscow, 2009 [Russian].

9. **S. S. Marchenkov,** Bounded monotonic recursion and multihead automata, *Program.,* No. 6, 3–11, 2013 [Russian]. Traslated in *Program. Comput. Softw.,* **39**, No. 6, 301–308, 2013.
10. **S. S. Marchenkov,** On elementary word functions obtained by bounded prefix concatenation, *Diskretn. Mat.,* **27**, No. 3, 44–55, 2015 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **26**, No. 3, 155–163, 2016.
11. **S. S. Marchenkov,** *Klassy elementarnykh rekursivnykh funktsii* (Classes of Elementary Recursive Functions), FIZMATLIT, Moscow, 2016 [Russian].
12. **K. V. Osipov,** On quasi-universal word functions *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 15,* No. 1, 28–34, 2016 [Russian]. Translated in *Mosc. Univ. Comput. Math. Cybern.,* **40**, No. 1, 28–34, 2016.
13. **L. Kalmár,** Egyszerü példa eldönthetetlen aritmetikai problémára, *Mat. Fiz. Lapok,* **50**, 1–23, 1943 [Hungarian].

Sergey S. Marchenkov

Received
30 November 2016