ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2017. Том 24, № 4. С. 77–94

УДК 519.8 DOI: 10.17377/daio.2017.24.562

ЗАДАЧА ПОТОКОВОГО РАВНОВЕСИЯ СО СМЕШАННЫМ СПРОСОМ *)

О. В. Пинягина
Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, 420008 Казань, Россия
E-mail: Olga.Piniaguina@kpfu.ru

Аннотация. Сформулирована задача потокового равновесия со смешанным спросом, обобщающая задачи потокового равновесия с фиксированным и эластичным спросом. Доказаны условия равновесия для данной задачи, приведены условия существования решения, опирающиеся на свойство коэрцитивности. Показана взаимосвязь задачи потокового равновесия со смешанным спросом и задачи аукционного равновесия. Приведены результаты тестовых расчетов на модельном примере. Ил. 1, библиогр. 15.

Ключевые слова: задача потокового равновесия, смешанный спрос, условия равновесия, аукционное равновесие.

Введение

Задачи потокового равновесия возникают в разных областях человеческой деятельности, в том числе в транспортных и телекоммуникационных сетях (см., например, [6, 7, 11–13]). Их изучение началось ещё в 50-х гг. прошлого века [2], а в форме вариационных неравенств эти задачи были сформулированы в начале 1980-х гг. в работах [4, 15] для фиксированного спроса и в [5] для эластичного спроса. Удивительно, что за последующие 35 лет, насколько известно автору, не предпринималось попыток объединить две задачи потокового равновесия — с фиксированным и эластичным спросом — под общей формулировкой. Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы заполнить этот пробел.

Предлагается задача потокового равновесия со смешанным спросом, содержащая постоянные и переменные компоненты. Показано, что она является обобщением задач потокового равновесия с фиксированным

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16–01–00109).

и эластичным спросом. Сформулированы и доказаны условия равновесия и условия существования решения, установлена взаимосвязь с задачей аукционного равновесия. Результаты были анонсированы в материалах конференции [14].

1. Задачи потокового равновесия с фиксированным и эластичным спросом

Напомним формулировку задачи потокового равновесия с *фиксированным* спросом. Пусть V — множество узлов сети, A — множество направленных дуг сети, W — множество пар узлов источник-адресат (origin-destination, или кратко O/D-пар) (i, j), $i, j \in V$. Для каждой $w \in W$ заданы множество P_w простых путей, соединяющих w, и величина фиксированного спроса $d_w > 0$. Для удобства пронумеруем последовательно все пути индексами $p = 1, 2, \ldots, \sum\limits_{w\in W} |P_w|$.

Задача состоит в том, чтобы распределить фиксированный спрос d_w для каждой O/D-пары $w \in W$ среди заданного множества путей P_w, используя равновесный критерий. Обозначим через x_p переменную величину потока, проходящего по пути $p \in P_w$, $w \in W$. Допустимое множество задачи

$$X = \Big\{x \mid \sum_{p\in P_w} x_p = d_w,\ x_p \geqslant 0,\ p \in P_w,\ w \in W\Big\}$$

представляет собой декартово произведение симплексов и имеет размерность $\sum\limits_{w\in W} |P_w|$. Здесь x — вектор с компонентами x_p, $p \in P_w$, $w \in W$.

Взаимосвязь путей и дуг сети представлена матрицей инцидентности с элементами

$$\alpha_{pa} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } a \text{ входит в путь } p, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Величина потока по дуге определяется как сумма величин потоков по путям, проходящим через эту дугу: $f_a = \sum\limits_{w\in W} \sum\limits_{p\in P_w} \alpha_{pa} x_p$, $a \in A$. Для каждой дуги a задана непрерывная функция затрат C_a, в общем случае эта функция может зависеть от всех потоков по дугам. Тогда функция затрат для каждого пути p имеет вид $G_p(x) = \sum\limits_{a\in A} \alpha_{pa} C_a(f)$, где f — вектор с компонентами f_a, $a \in A$.

Равновесное состояние для этой сети представляет такой элемент $x^* \in X$, что для любых $w \in W$, $q \in P_w$

$$x_q^* > 0 \Longrightarrow G_q(x^*) = \min_{p\in P_w} G_p(x^*),$$

т. е. ненулевые потоки проходят только по путям с минимальной стоимостью. Здесь действует «пользовательско-оптимизационный» принцип: потоковое равновесие в сети достигнуто, если ни один из участников (в нашем случае — ни одна из O/D-пар) не может уменьшить свои затраты, принимая единоличное решение об изменении распределения своих потоков по путям.

Известно (см., например, [12, теорема 4.5] или [13, теорема 3.14]), что эта задача эквивалентна вариационному неравенству: найти элемент $x^* \in X$ такой, что

$$\langle G(x^*), x - x^* \rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in X, \tag{1}$$

где вектор G составлен из компонент G_p, $p \in P_w$, $w \in W$, соответственно.

Заметим, что в общем случае отображение G не является потенциальным и задача (1) не может быть сведена к оптимизационной задаче.

В отличие от задачи потокового равновесия с фиксированным спросом в задаче с эластичным спросом величины спроса являются переменными. Тогда допустимое множество имеет вид

$$K = \Big\{(x, d) \mid \sum_{p \in P_w} x_p = d_w,\ x_p \geqslant 0,\ p \in P_w,\ w \in W\Big\},$$

где d — вектор с компонентами d_w, $w \in W$.

В этой задаче для каждой O/D-пары $w \in W$ задана функция λ_w допустимых затрат (англ. disutility function), непрерывно зависящая от спроса. Она показывает, какие затраты согласна нести O/D-пара для обеспечения заданной величины спроса. В общем случае функция может зависеть от всего вектора спроса d.

Таким образом, задача потокового равновесия с *эластичным* спросом состоит в том, чтобы найти такой элемент $(x^*, d^*) \in K$, что

$$\langle G(x^*), x - x^* \rangle - \langle \lambda(d^*), d - d^* \rangle \geqslant 0 \quad \forall (x, d) \in K. \tag{2}$$

Известно (см., например, [12, теорема 4.1] или [13, теорема 3.15]), что условия равновесия для этой задачи имеют следующий вид: вектор $(x^*, d^*) \in K$ является решением задачи (2), если для всех $p \in P_w$, $w \in W$ выполняются соотношения

$$G_p(x^*) \begin{cases} = \lambda_w(d^*), & \text{если } x_p^* > 0, \\ \geqslant \lambda_w(d^*), & \text{если } x_p^* = 0. \end{cases}$$

Иными словами, в точке равновесия достигнутые затраты по путям (для ненулевых потоков) равны значению функции допустимых затрат

для этой O/D-пары. Таким образом, функции допустимых затрат влияют на выбор величин спроса, которые в данной задаче являются переменными и вычисляются, наряду с величинами потоков по путям, как компоненты равновесного состояния $(x^*, d^*) \in K$.

Попробуем объединить эти две задачи под общей формулировкой.

2. Задача со смешанным спросом

Пусть в задаче потокового равновесия одновременно присутствуют и постоянные, и переменные компоненты спроса, обозначим их через d_w^{const} и d_w, $w \in W$, соответственно. Предполагаем, что $d_w^{\mathrm{const}} \geqslant 0$ для любого $w \in W$. Тогда допустимое множество примет вид

$$K_M = \Big\{(x,d) \mid \sum_{p \in P_w} x_p = d_w^{\mathrm{const}} + d_w, x_p \geqslant 0,\ d_w \geqslant 0,\ p \in P_w,\ w \in W\Big\}.$$

Формулировка вариационного неравенства для этой задачи очень похожа на задачу с эластичным спросом, отличается лишь допустимое множество: найти такой элемент $(x^*, d^*) \in K_M$, что

$$\langle G(x^*), x - x^* \rangle - \langle \lambda(d^*), d - d^* \rangle \geqslant 0 \quad \forall (x,d) \in K_M. \tag{3}$$

Прежде всего сформулируем условия равновесия для задачи (3).

Теорема 1. *Вектор $(x^*, d^*) \in K_M$ является решением задачи (3) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия.*

1°. *Если $x_p^* > 0$ для $p \in P_w$, $w \in W$, то $G_p(x^*) = \min\limits_{q \in P_w} G_q(x^*) = \overline{G}_w(x^*)$ (ненулевые потоки проходят только по путям с минимальными затратами).*

2°. *Если $x_p^* > 0$ и $d_w^* > 0$ для $p \in P_w$, $w \in W$, то $G_p(x^*) = \lambda_w(d^*)$ (для ненулевых потоков и ненулевых значений переменного спроса величины затрат по путям равны значению функции допустимых затрат для этой O/D-пары).*

3°. *Если $x_p^* = 0$ или $d_w^* = 0$ для $p \in P_w$, $w \in W$, то $G_p(x^*) \geqslant \lambda_w(d^*)$ (значение функции допустимых затрат не может превышать величину затрат по путям для этой O/D-пары).*

Доказательство. Пусть вектор $(x^*, d^*) \in K_M$ удовлетворяет условиям 1°–3°. Докажем, что он является решением задачи (3). Для этого разобьём множество W на две части $W_1^* = \{w \in W \mid d_w^* > 0\}$ и $W_2^* = \{w \in W \mid d_w^* = 0\}$. Очевидно, что $W_1^* \cup W_2^* = W$. Из условия 2° следует, что

$$(G_p(x^*) - \lambda_w(d^*))x_p^* = 0 \quad \forall p \in P_w,\ w \in W_1^*. \tag{4}$$

Из условия 1° имеем $G_p(x^*) = \overline{G}_w(x^*)$ для всех $p \in P_w$ таких, что $x_p^* > 0$. Кроме того, $d_w^* = \sum\limits_{p \in P_w} x_p^* - d_w^{\text{const}} = 0$ для $w \in W_2^*$. В силу этого для всех $w \in W_2^*$ получим

$$\sum_{p \in P_w} (G_p(x^*) - \lambda_w(d^*))x_p^* - (\overline{G}_w(x^*) - \lambda_w(d^*))d_w^{\text{const}}$$
$$= (\overline{G}_w(x^*) - \lambda_w(d^*))\Big(\sum_{p \in P_w} x_p^* - d_w^{\text{const}}\Big) = 0. \quad (5)$$

Далее, из условий 2° и 3° следует, что

$$(G_p(x^*) - \lambda_w(d^*))x_p \geqslant 0 \quad \forall p \in P_w,\ w \in W_1^*,\ (x, d) \in K_M. \quad (6)$$

Наконец, в силу того, что имеют место неравенства $G_p(x^*) \geqslant \overline{G}_w(x^*)$ (следует из условия 1°), $\overline{G}_w(x^*) \geqslant \lambda_w(d^*)$ (следует из условий 1° и 3°) и $d_w = \sum\limits_{p \in P_w} x_p - d_w^{\text{const}} \geqslant 0$, для всех $p \in P_w$, $w \in W_2^*$, $(x, d) \in K_M$ получим

$$\sum_{p \in P_w} (G_p(x^*) - \lambda_w(d^*))x_p - (\overline{G}_w(x^*) - \lambda_w(d^*))d_w^{\text{const}}$$
$$\geqslant (\overline{G}_w(x^*) - \lambda_w(d^*))\Big(\sum_{p \in P_w} x_p - d_w^{\text{const}}\Big) \geqslant 0. \quad (7)$$

Суммируя равенства (4) по $p \in P_w$ и $w \in W_1^*$, имеем

$$\sum_{w \in W_1^*} \sum_{p \in P_w} (G_p(x^*) - \lambda_w(d^*))x_p^* = 0. \quad (8)$$

Аналогично, суммируя равенства (5) по $w \in W_2^*$, выводим

$$\sum_{w \in W_2^*} \sum_{p \in P_w} (G_p(x^*) - \lambda_w(d^*))x_p^* - \sum_{w \in W_2^*} (\overline{G}_w(x^*) - \lambda_w(d^*))d_w^{\text{const}} = 0. \quad (9)$$

Суммируя неравенства (6) по $p \in P_w$ и $w \in W_1^*$, для любых $(x, d) \in K_M$ получаем

$$\sum_{w \in W_1^*} \sum_{p \in P_w} (G_p(x^*) - \lambda_w(d^*))x_p \geqslant 0. \quad (10)$$

Суммируя неравенства (7) по $w \in W_2^*$, для всех $(x, d) \in K_M$ имеем

$$\sum_{w \in W_2^*} \sum_{p \in P_w} (G_p(x^*) - \lambda_w(d^*))x_p - \sum_{w \in W_2^*} (\overline{G}_w(x^*) - \lambda_w(d^*))d_w^{\text{const}} \geqslant 0. \quad (11)$$

Наконец, сложим неравенства (10), (11) и вычтем из них равенства (8), (9). С учётом того, что для любых $w \in W$ и $(x,d) \in K_M$ имеет место $\sum\limits_{p \in P_w} x_p = d_w + d_w^{\mathrm{const}}$, получим

$$\sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} G_p(x^*)(x_p - x_p^*) - \sum_{w \in W} \lambda_w(d^*)(d_w - d_w^*) \geqslant 0 \quad \forall (x,d) \in K_M.$$

Таким образом доказано, что если вектор $(x^*, d^*) \in K_M$ удовлетворяет условиям 1°–3°, то он будет решением задачи (3).

Обратно, пусть вектор $(x^*, d^*) \in K_M$ является решением задачи (3). Покажем, что он удовлетворяет условиям 1°–3°.

Докажем 1° от противного. Пусть найдутся индексы $\overline{p}, q \in P_w$, $\overline{p} \neq q$, для некоторого $w \in W$ такие, что $x_{\overline{p}}^* > 0$ и $G_{\overline{p}}(x^*) > G_q(x^*)$. Зададим вектор $(x^\varepsilon, d^\varepsilon) \in K_M$ по следующим правилам: $d^\varepsilon = d^*$, $0 < \varepsilon \leqslant x_{\overline{p}}^*$,

$$x_p^\varepsilon = \begin{cases} x_p^* & \text{при } p \neq \overline{p},\ p \neq q, \\ x_{\overline{p}}^* - \varepsilon & \text{при } p = \overline{p}, \\ x_q^* + \varepsilon & \text{при } p = q. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle G(x^*), x^\varepsilon - x^* \rangle - \langle \lambda(d^*), d^\varepsilon - d^* \rangle \\ = G_{\overline{p}}(x^*)(x_{\overline{p}}^\varepsilon - x_{\overline{p}}^*) + G_q(x^*)(x_q^\varepsilon - x_q^*) \\ = \varepsilon(G_q(x^*) - G_{\overline{p}}(x^*)) < 0. \end{aligned}$$

Получим противоречие тому, что вектор (x^*, d^*) является решением задачи (3). Значит, условие 1° выполняется.

Докажем, что 3° выполняется при более широких условиях: для любых x_p^* и d_w^* при $p \in P_w$ и $w \in W$. Предположим противное — пусть найдутся индексы $\overline{p} \in P_{\overline{w}}$, $\overline{w} \in W$ такие, что $G_{\overline{p}}(x^*) < \lambda_{\overline{w}}(d^*)$. Зададим вектор $(x^\varepsilon, d^\varepsilon) \in K_M$ по следующим правилам: $\varepsilon > 0$,

$$x_p^\varepsilon = \begin{cases} x_p^* & \text{при } p \neq \overline{p}, \\ x_{\overline{p}}^* + \varepsilon & \text{при } p = \overline{p}, \end{cases} \qquad d_w^\varepsilon = \begin{cases} d_w^* & \text{при } w \neq \overline{w}, \\ d_{\overline{w}}^* + \varepsilon & \text{при } w = \overline{w}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle G(x^*), x^\varepsilon - x^* \rangle - \langle \lambda(d^*), d^\varepsilon - d^* \rangle \\ = G_{\overline{p}}(x^*)(x_p^\varepsilon - x_{\overline{p}}^*) - \lambda_{\overline{w}}(d^*)(d_w^\varepsilon - d_{\overline{w}}^*) \\ = \varepsilon(G_{\overline{p}}(x^*) - \lambda_{\overline{w}}(d^*)) < 0; \end{aligned}$$

противоречие тому, что вектор (x^*, d^*) является решением задачи (3). Значит, условие 3° выполняется.

Наконец, докажем 2°. Заметим, что уже показано, что значение функции допустимых затрат для O/D-пары в точке равновесия не может превышать величины затрат по путям для этой O/D-пары. Осталось доказать, что в равновесной точке для ненулевого переменного спроса величины затрат по путям с ненулевыми потоками не могут быть больше значения функции допустимых затрат для этой O/D-пары. Предположим противное — пусть найдутся индексы $\overline{p} \in P_{\overline{w}}$, $\overline{w} \in W$ такие, что $x^*_{\overline{p}} > 0$, $d^*_{\overline{w}} > 0$ и $G_{\overline{p}}(x^*) > \lambda_{\overline{w}}(d^*)$. Зададим вектор $(x^\varepsilon, d^\varepsilon) \in K_M$ по следующим правилам: $0 < \varepsilon \leqslant \min\{x^*_{\overline{p}}, d^*_{\overline{w}}\}$,

$$x^\varepsilon_p = \begin{cases} x^*_p & \text{при } p \neq \overline{p}, \\ x^*_{\overline{p}} - \varepsilon & \text{при } p = \overline{p}, \end{cases} \quad d^\varepsilon_w = \begin{cases} d^*_w & \text{при } w \neq \overline{w}, \\ d^*_{\overline{w}} - \varepsilon & \text{при } w = \overline{w}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\langle G(x^*), x^\varepsilon - x^* \rangle - \langle \lambda(d^*), d^\varepsilon - d^* \rangle \\ &\qquad = G_{\overline{p}}(x^*)(x^\varepsilon_p - x^*_{\overline{p}}) - \lambda_{\overline{w}}(d^*)(d^\varepsilon_w - d^*_{\overline{w}}) \\ &\qquad\qquad = \varepsilon(\lambda_{\overline{w}}(d^*) - G_{\overline{p}}(x^*)) < 0; \end{aligned}$$

противоречие тому, что вектор (x^*, d^*) является решением задачи (3). Значит, условие 2° также выполняется. Теорема 1 доказана.

Заметим, что по сравнению с задачей с эластичным спросом здесь функция допустимых затрат имеет несколько другой смысл. В задаче с эластичным спросом, как уже было упомянуто ранее, для ненулевых потоков реальные величины затрат по путям всегда равны значению функции допустимых затрат для этой O/D-пары. В то же время в задаче со смешанным спросом, как видно из условия 3° теоремы 1, если ресурсов сети хватает только для реализации фиксированной компоненты спроса (т. е. $d_w = 0$), то величины реальных затрат по путям в равновесной точке могут быть больше значения функции допустимых затрат. Примеры численных расчётов для разных видов функций допустимых затрат, иллюстрирующие данное утверждение, приведены в разд. 4.

Далее покажем, что задача потокового равновесия со смешанным спросом (3) обобщает задачи потокового равновесия с фиксированным и эластичным спросом (1) и (2).

Утверждение 1. 1. *В задаче потокового равновесия со смешанным спросом* (3) *положим* $d^{\text{const}}_w = 0$ *для всех* $w \in W$. *Получим задачу потокового равновесия с эластичным спросом* (2).

2. *Пусть в задаче потокового равновесия со смешанным спросом* (3) *функции затрат заданы таким образом, что* $G_p(x) > 0$ *при* $x_p > 0$, *для всех* $p \in P_w$, $w \in W$ *и* $(x, d) \in K_M$. *Положим функции допустимых затрат* λ_w *тождественно равными нулю для всех* $w \in W$. *Получим задачу потокового равновесия с фиксированным спросом* (1).

Доказательство п. 1 очевидно. П. 2 следует из теоремы 1. Утверждение 1 доказано.

Доказательство условий существования решения для рассматриваемой задачи опирается на результаты, полученные в [9] для задачи потокового равновесия с эластичным спросом. Будем использовать условие коэрцитивности следующего вида [9].

(C1) *Существует вещественное число* $r > 0$ *такое, что для любого вектора* $(x, d) \in K_M$ *и любого* $w \in W$ *выполнено*

$$d_w > r \Longrightarrow \exists p \in P_w \text{ такой, что } x_p > 0,\ G_p(x) \geqslant \lambda_w(d).$$

Условия коэрцитивности (лат. coercitio — удерживание, захватывание), как правило, используются для формулировки условий существования решения задач (оптимизации, равновесия, вариационного неравенства), поскольку обеспечивают наличие этого решения в ограниченном множестве.

Теорема 2. *Пусть допустимое множество* K_M *непусто, а функции* C_a *и* λ_w *непрерывны для всех* $a \in A$ *и* $w \in W$. *Если выполняется условие* (C1), *то задача* (3) *имеет решение.*

Доказательство следует доказательству теоремы 2 из [9].

3. Взаимосвязь с задачей аукционного равновесия

В [9,10] показана эквивалентность задач аукционного равновесия и потокового равновесия с фиксированным и эластичным спросом. Что касается задачи потокового равновесия со смешанным спросом, покажем, что она эквивалентна двустороннему многопродуктовому аукциону, в котором каждый продукт связан с одним покупателем и множеством продавцов, объёмы аукционных заявок и для продавцов, и для покупателей ограничены снизу нулём и не ограничены сверху и на каждый продукт может существовать внешний спрос.

Напомним постановку задачи аукционного равновесия [9]. Рассматривается модель аукциона для n бесконечно делимых продуктов. Обозначим через I и J конечные множества индексов продавцов и покупателей, положим $N = 1, 2, \dots, n$. Для каждого продукта $s \in N$ и каждого

продавца $i \in I$ имеется некоторая ценовая функция g_{is}, а величина предложения x_{is} может выбираться из допустимого интервала $[\alpha'_{is}, \alpha''_{is}]$. Аналогично для каждого продукта $s \in N$ и каждого покупателя $j \in J$ имеется некоторая ценовая функция h_{js}, а величина спроса y_{is} выбирается из допустимого интервала $[\beta'_{js}, \beta''_{js}]$. Предполагаем, что ценовые функции в общем случае могут зависеть от всех величин спроса и предложения всех продуктов. Обозначим $x_{(s)} = (x_{is})_{i \in I}$, $x = (x_{(s)})_{s \in N}$, $y_{(s)} = (y_{js})_{j \in J}$, $y = (y_{(s)})_{s \in N}$, $z = (x, y)$. Тогда $g_{is} = g_{is}(w)$ и $h_{js} = h_{js}(w)$. Обозначим через b_s величину внешнего спроса для продукта s, тогда $b = (b_s)_{s \in N}$. Допустимое множество задачи представлено уравнениями баланса по каждому продукту

$$Z = \prod_{s \in N} Z(s),$$

где для $s \in N$

$$Z(s) = \Big\{ z_{(s)} = (x_{(s)}, y_{(s)}) \mid \sum_{i \in I} x_{is} - \sum_{j \in J} y_{js} = b_s, \\ x_{is} \in [\alpha'_{is}, \alpha''_{is}],\ i \in I,\ y_{js} \in [\beta'_{js}, \beta''_{js}],\ j \in J \Big\}.$$

Условие равновесия для этой задачи выглядит следующим образом. Вектор спроса-предложения $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ представляет собой точку аукционного равновесия, если существует такой вектор $\overline{p} = (\overline{p}_s)_{s \in N}$, что

$$g_{is}(\overline{w}) \begin{cases} \geqslant \overline{p}_s, & \text{если } \bar{x}_{is} = \alpha'_{is}, \\ = \overline{p}_s, & \text{если } \bar{x}_{is} \in (\alpha'_{is}, \alpha''_{is}), \\ \leqslant \overline{p}_s, & \text{если } \bar{x}_{is} = \alpha''_{is}, \end{cases} \tag{12}$$

$$h_{js}(\overline{w}) \begin{cases} \leqslant \overline{p}_s, & \text{если } \bar{y}_{js} = \beta'_{is}, \\ = \overline{p}_s, & \text{если } \bar{y}_{js} \in (\beta'_{is}, \beta''_{is}), \\ \geqslant \overline{p}_s, & \text{если } \bar{y}_{js} = \beta''_{is}. \end{cases} \tag{13}$$

Вектор $\overline{p}$ представляет собой вектор равновесных цен.

В [9, утверждение 1] показано, что условия равновесия (12)–(13) для некоторой точки $\bar{z} \in Z$ выполняются тогда и только тогда, когда эта точка является решением следующего вариационного неравенства: найти точку $\bar{z} \in Z$ такую, что

$$\sum_{s \in N} \Big[\sum_{i \in I} g_{is}(\bar{z})(x_{is} - \bar{x}_{is}) - \sum_{j \in J} h_{js}(\bar{z})(y_{js} - \bar{y}_{js}) \Big] \geqslant 0 \quad \forall z \in Z. \tag{14}$$

Таким образом, аукционист (управляющий аукционом) должен решить задачу (14) и найти вектор равновесных цен $\overline{p} = (\overline{p}_s)_{s\in N}$ и объёмы покупок-продаж $\bar{z} \in Z$.

Условия равновесия 1°–3° для задачи (3) потокового равновесия со смешанным спросом можно переформулировать следующим образом (см. в [9] условия равновесия (15)–(16) для задачи с эластичным спросом): точка $(x^*, d^*) \in K_M$ является решением задачи (3) тогда и только тогда, когда для любого $w \in W$ найдётся μ_w такое, что

$$G_p(x^*) \begin{cases} \geqslant \mu_w, & \text{если } x_p^* = 0, \\ = \mu_w, & \text{если } x_p^* > 0; \end{cases} \quad p \in P_w, \tag{15}$$

$$\lambda_w(d^*) \begin{cases} \leqslant \mu_w, & \text{если } d_w^* = 0, \\ = \mu_w, & \text{если } d_w^* > 0. \end{cases} \tag{16}$$

Эквивалентность условий 1°–3° и (15)–(16) легко показать, если положить $\mu_w = \overline{G}_w(x^*) = \min\limits_{q\in P_w} G_q(x^*)$ для всех $w \in W$.

Сравнивая теперь вариационные неравенства (3) и (14) и их соответствующие условия равновесия (15)–(16) и (12)–(13), видим, что задача потокового равновесия со смешанным спросом эквивалентна двустороннему многопродуктовому аукциону, обладающему следующими свойствами:

1) каждый продукт $w \in W$ связан с множеством продавцов $p \in P_w$ и одним покупателем;

2) объёмы аукционных заявок для продавцов ограничены снизу нулём и не ограничены сверху;

3) объёмы аукционных заявок для покупателей ограничены снизу нулём и не ограничены сверху, на каждый продукт $w \in W$ может существовать внешний спрос d_w^{const}.

Заметим, что если в задаче (3) интерпретировать каждую переменную d_w как общую величину спроса для O/D-пары, то допустимое множество примет вид

$$K'_M = \Big\{(x, d) \mid \sum_{p\in P_w} x_p = d_w,\ x_p \geqslant 0,\ d_w \geqslant d_w^{\text{const}},\ p \in P_w, w \in W\Big\},$$

и свойство 3 может быть переформулировано следующим образом:

3а) объёмы аукционных заявок для покупателей ограничены снизу неотрицательной величиной и не ограничены сверху.

4. Тестовые расчёты

Когда в задаче потокового равновесия со смешанным спросом для некоторых O/D-пар одновременно присутствует и постоянный, и переменный спрос, можно интерпретировать величину постоянного спроса как некоторую гарантированную нижнюю границу, которая в любом случае должна быть удовлетворена. Таким образом система может обеспечивать потоки по наиболее важным направлениям.

С другой стороны, задача потокового равновесия со смешанным спросом может рассматриваться как некоторый компромисс между интересами отдельных O/D-пар и системой в целом. Тогда величины постоянного спроса могут задаваться «снизу» как потребности O/D-пар, а функции допустимых затрат — «сверху» как некоторый регулирующий механизм для системы в целом.

Для решения тестовых примеров был использован один из вариантов комбинированного релаксационного метода из [1] (см. также [8]).

Обозначим для краткости оператор проектирования на K_M через π, $u = (x, d) \in K_M$, отображение H состоит из компонент G_p, $p \in P_w$, $w \in W$, $-\lambda_w, w \in W$.

Алгоритм 1

Шаг 0. Пусть заданы точность вычислений $\varepsilon > 0$, параметры алгоритма $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$, $\gamma \in (0,2)$ и начальная точка $u^0 \in K_M$. Положим $k = 0$.

Шаг 1. Если $\|u^k - \pi(u^k - H(u^k))\| \leqslant \varepsilon$, то достигнута заданная точность, процесс вычислений останавливается.

Шаг 2. Найдём наименьшее неотрицательное целое число m, удовлетворяющее условию

$$\langle H(u^k) - H(z^{k,m}), u^k - z^{k,m}\rangle \leqslant (1-\alpha)\beta^{-m}\|z^{k,m} - u^k\|^2,$$

где $z^{k,m}$ — решение вариационного неравенства

$$\langle H(u^k) + \beta^{-m}(z^{k,m} - u^k), u - z^{k,m}\rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in K_M.$$

Полагаем $\theta_k = \beta^m$, $v^k = z^{k,m}$.

Шаг 3. Если $u^k = v^k$, то останов. Иначе положим

$$d^k = H(v^k) - H(u^k) - \theta_k^{-1}(v^k - u^k),$$
$$\sigma_k = \langle H(v^k), u^k - v^k\rangle/\|d^k\|^2, \quad u^{k+1} = \pi(u^k - \gamma\sigma_k d^k).$$

Положим $k := k + 1$ и перейдём на шаг 1.

Заметим, что размерность задач потокового равновесия (число возможных путей для всех O/D-пар) для больших сетей может быть очень большой, но решение часто содержит много нулевых значений. Поэтому на практике будем использовать следующий приём. На начальном шаге выбираем некоторое непустое подмножество $P_w^0 \subset P_w$ для каждого $w \in W$, затем на каждой итерации ищем новые кратчайшие пути и включаем их в текущие подмножества. После некоторого числа итераций подмножества P_w^k перестают увеличиваться.

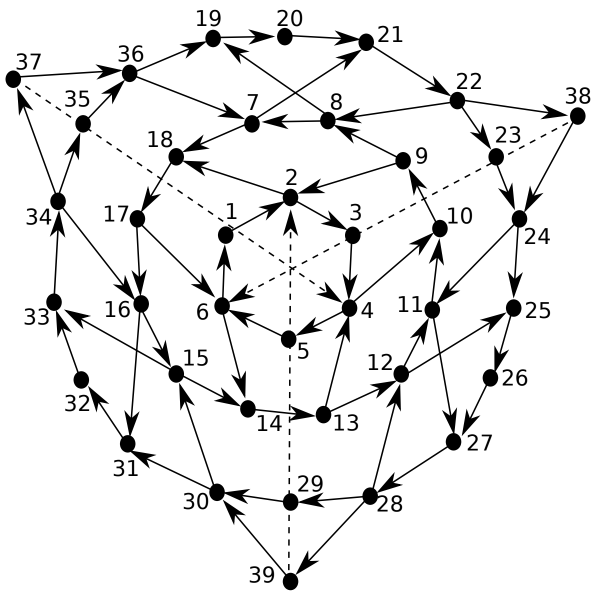

Рис. 1. Пример сети: 39 узлов, 55 дуг, 3 O/D-пары

Будем использовать модельный пример из [3] для непотенциального отображения H, но на другой структуре сети (рис. 1). Представим, что это упрощённая городская транспортная сеть. Она состоит из трёх вложенных колец с разным направлением движения, с переходами между кольцами (среднее кольцо считается главным) и со съездами в три жилых района на окраине города.

Множество дуг A разбивается на четыре подмножества, а именно $A = A_h \cup A_x \cup A_e \cup A_b$, где

$A_h = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,1), (8,7), (9,8), (10,9), (11,10), (12,11), (13,12), (14,13), (15,14), (16,15), (17,16), (18,17), (7,18), (19,20), (20,21), (21,22), (24,25), (25,26), (26,27), (27,28), (30,31), (31,32), (32,33), (33,34), (36,19)\}$ — магистральные дуги,

$A_x = \{(22,38), (28,39), (34,37), (7,21), (8,19), (11,27), (12,25), (15,33), (16,31), (9,2), (13,4), (17,6)\}$ — выходные дуги,

$A_e = \{(37,36), (38,24), (39,30), (22,8), 24,11), (28,12), (30,15), (34,16), (36,7), (2,18), (4,10), (6,14)\}$ — входные дуги,

$A_b = \{(22,23), (23,24), (28,29), (29,30), (34,35), (35,36)\}$ — обходные дуги.

Пусть задана функция $t\colon R \to R$ и масштабирующий коэффициент $\tau > 0$. Функции затрат C_a по дугам $a = (i,j)$ зависят от вектора потоков по дугам f и имеют вид

$$C_a = \begin{cases} t(f_a), & \text{если } a \in A_x \cup A_b, \\ 10t(f_a) + 2\tau t(f_{\tilde{a}}), & \text{если } a \in A_h, \text{ где } \tilde{a} \in A_x,\ \tilde{a} = (j,s), \\ t(f_a) + \tau t(f_{\tilde{a}}), & \text{если } a \in A_e, \text{ где } \tilde{a} \in A_b,\ \tilde{a} = (s,j). \end{cases}$$

Приведём результаты расчётов для разных примеров задач при точности $\varepsilon = 0.0001$. Во всех примерах, если не оговорено иное, предполагаем, что $t(f_a) = 1 + 0,5f_a$ (затраты по дугам являются возрастающими функциями от потоков по дугам), а также заданы коэффициенты $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1.8$, $\tau = 0.5$. Рассмотрим для начала самый простой вид функции допустимых затрат — пусть она является постоянной $\lambda_w(d_w) = 100$ для всех $w \in W$. Иными словами, нас интересуют величины спроса, которые можно передать по сети при данной фиксированной величине затрат. При таком выборе функций условие коэрцитивности (C1) выполняется.

Пусть множество O/D-пар $W = \{(37,4), (38,6), (39,2)\}$ задаёт транспортные потоки, направляющиеся утром из окраинных районов города в центр.

Пример 1. Определим величины фиксированного спроса вектором $(5,5,5)$. Получим решение размерности 9 (по 3 пути для каждой O/D-пары): (0.94, 0.76, 3.3, 0.94, 0.76, 3.3, 0.94, 0.76, 3.3). Величины реальных затрат все одинаковы и равны 100.9 (заметим, что они превышают значения функций допустимых затрат, которые равны 100). Значения переменного спроса равны нулю. В этом примере задача фактически сведена к задаче с фиксированным спросом. Функции допустимых затрат никак не влияют на решение: тот же результат получится, если их положить тождественно равными нулю.

Пример 2. Попробуем уменьшить величины фиксированного спроса и зададим его вектором $(2,2,2)$. Получим решение размерности 9 (по 3 пути для каждой O/D-пары): (0.92, 3.27, 0.75, 0.92, 3.27, 0.75, 0.92,

3.27, 0.75). Величины реальных затрат все одинаковы, равны 100 и совпадают со значениями функций допустимых затрат. Общие величины спроса равны (4.94, 4.94, 4.94). В этом примере для всех O/D-пар удовлетворён фиксированный спрос и получены ненулевые величины переменного спроса. Задача фактически сведена к задаче с эластичным спросом. Величины фиксированного спроса никак не влияют на решение: тот же результат получится, если положить их равными нулю.

Пример 3. Предположим, что одно из направлений является приоритетным: зададим значения постоянного спроса вектором $(5, 2, 2)$. Получим решение размерности 12 (по 4 пути для каждой O/D-пары): (0.57, 0.67, 0.46, 3.3, 0.62, 0.43, 3.27, 0.6, 0.78, 0.38, 0.5, 3.26). Величины реальных затрат равны (100.22, 100, 100), а общие величины спроса — (5, 4.92, 4.92). В этом примере для первой O/D-пары удовлетворён только фиксированный спрос, поэтому значение реальных затрат превышает значение функции допустимых затрат, а для остальных пар получены ненулевые величины переменного спроса. Пример 3 иллюстрирует задачу со смешанным спросом, которая не сводится к частным случаям — задачам с фиксированным и эластичным спросом.

Направим теперь транспортные потоки обратно: вечером люди возвращаются из центра домой, так что в качестве множества O/D-пар примем $W = \{(4, 37), (6, 38), (2,\ 39)\}$.

Пример 4. Значения постоянного спроса, как и в предыдущем примере, задаются вектором $(5, 2, 2)$. Здесь получим решение размерности 12: (0.04, 0.17, 0.74, 0.86, 2.8, 0.39, 0.05, 2.12, 0.24, 0.42, 2.18, 0.02), но количество путей для разных O/D-пар неодинаково — $(6, 4, 2)$. Величины реальных затрат равны (117.3, 100, 100). Общие величины спроса равны (5, 2.83, 2.22). В этом примере для первой O/D-пары удовлетворён только фиксированный спрос, поэтому значение реальных затрат превышает значение функции допустимых затрат, а для остальных пар получены ненулевые величины переменного спроса. Полученное решение сильно отличается от предыдущего примера вследствие того, что в сети представлены только дороги с односторонним движением и пути с окраины в центр не совпадают с путями обратно.

Рассмотрим теперь другие виды функции допустимых затрат. Для выполнения условия коэрцитивности подходят, например, убывающие функции вида $\lambda_w(d_w) = 100 - 0.5\big(d_w + d_w^{\text{const}}\big)$ для всех $w \in W$. Интерпретировать такой вид функций можно следующим образом. Как сказано в начале разд. 4, функции допустимых затрат могут задаваться «сверху» как некоторый регулирующий механизм для системы в целом.

Тем самым сеть может допускать рост величин спроса, но только при условии уменьшения затрат. Это требование препятствует увеличению спроса до бесконечности и обеспечивает существование решения задачи.

Пример 5. Как и в примере 3, предположим, что одно из направлений является приоритетным: зададим значения постоянного спроса вектором $(5, 2, 2)$. Получим решение размерности 12 (по 4 пути для каждой O/D-пары): (0.57, 0.66, 3.29, 0.48, 0.58, 0.4, 3.18, 0.53, 0.74, 0.36, 3.14, 0.45). Величины реальных затрат равны (98.42, 97.66, 97.65), в то время как значения функций допустимых затрат — (97.5, 97.66, 97.65). Общие величины спроса равны (5, 4.685, 4.693). В этом примере для первой O/D-пары удовлетворён только фиксированный спрос, поэтому величины реальных затрат превышают значение функции допустимых затрат, а для остальных пар получены ненулевые величины переменного спроса.

Наконец, приведём пример возрастающей функции допустимых затрат $\lambda_w(d_w) = 95 + 0.25\big(d_w + d_w^{\text{const}}\big)$ для всех $w \in W$. Такой вид функции является более натуральным с точки зрения O/D-пары: при увеличении спроса растут затраты на его выполнение. Для существования решения задачи, т. е. для выполнения условия коэрцитивности требуется, чтобы функции допустимых затрат росли медленнее, чем функции затрат по дугам.

Пример 6. Как и в примере 3, предположим, что одно из направлений является приоритетным: зададим значения постоянного спроса вектором $(5, 2, 2)$. Получаем решение размерности 12 (по 4 пути для каждой O/D-пары): (0.54, 0.48, 0.7, 3.28, 0.54, 0.38, 3.12, 0.5, 0.72, 0.43, 0.33, 3.07). Величины реальных затрат равны (97.26, 96.13, 96.14). Значения функций допустимых затрат равны (96.25, 96.13, 96.14), общие величины спроса — (5, 4.54, 4.55). В этом примере для первой O/D-пары удовлетворён только фиксированный спрос, поэтому величины реальных затрат превышают значение функции допустимых затрат, а для остальных пар получены ненулевые величины переменного спроса.

В заключение следует отметить, что предложенная модель потокового равновесия со смешанным спросом выглядит перспективной для изучения и может быть использована в практических приложениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коннов И. В.** Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. Казань: Казан. ун-т, 2013. 508 с.
2. **Beckmann M. J., McGuire C. B., Winsten C. B.** Studies in the economics of transportation. New Haven, CT: Yale Univ. Press, 1956. 359 p.

3. **Bertsekas D. P, Gafni E. M.** Projection methods for variational inequalities with application to the traffic assignment problem // Nondifferential and Variational Techniques in Optimization. Amsterdam: North-Holland, 1982. P. 139–159. (Math. Program. Stud., Vol. 17).
4. **Dafermos S.** Traffic equilibrium and variational inequalities // Transp. Sci. 1980. Vol. 14, No. 1. P. 42–54.
5. **Dafermos S.** The general multimodal network equilibrium problem with elastic demand // Networks. 1982. Vol. 12, No. 1. P. 57–72.
6. **De Dios Ortúzar J., Willumsen L. G.** Modelling transport. Chichester: John Wiley & Sons, 2011. 588 p.
7. **Giannessi F., Maugeri A.** Variational inequalities and network equilibrium problems. New York: Plenum Press, 1995. 305 p.
8. **Konnov I. V.** Equilibrium models and variational inequalities. Amsterdam: Elsevier, 2007. 250 p.
9. **Konnov I. V.** On auction equilibrium models with network applications // Netnomics. 2015. Vol. 16, No. 1. P. 107–125.
10. **Konnov I. V.** An alternative economic equilibrium model with different implementation mechanisms // Adv. Model. Optim. 2015. Vol. 17, No. 2. P. 245–265. https://camo.ici.ro/journal/vol17/v17b7.pdf
11. **Maillé P., Tuffin B.** Telecommunication network economics: from theory to applications. New York: Camb. Univ. Press, 2014. 291 p.
12. **Nagurney A.** Network economics: a variational inequality approach. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. 444 p.
13. **Patriksson M.** The traffic assignment problem: models and methods. Mineola, NY: Dover Publ., 2015. 240 p.
14. **Pinyagina O. V.** On a network equilibrium problem with mixed demand // Discrete Optimization and Operations Research (Proc. 9th Int. Conf. DOOR, Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016). Cham: Springer, 2016. P. 578–583. (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9869).
15. **Smith M. J.** Existence, uniqueness, and stability of traffic equilibria // Transp. Res. Part B: Methodological. 1979. Vol. 13, No. 4. P. 259–304.

Пинягина Ольга Владиславовна

Статья поступила
11 января 2017 г.

Исправленный вариант —
3 марта 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2017. Volume 24, No. 4. P. 77–94

UDC 519.8 DOI: 10.17377/daio.2017.24.562

THE NETWORK EQUILIBRIUM PROBLEM WITH MIXED DEMAND

O. V. Pinyagina
Kazan Federal University,
18 Kremlevskaya St., 420008 Kazan, Russia
E-mail: Olga.Piniaguina@kpfu.ru

Abstract. We formulate the network equilibrium problem with mixed demand which generalizes the problems of network equilibrium with fixed and elastic demand. We prove the equilibrium conditions for this problem and propose some conditions of existence of a solution that are based on the coercivity property. We establish a connection between the problem of network equilibrium with mixed demand and the problem of auction equilibrium. The results of test calculations are presented for a model example. Illustr. 1, bibliogr. 15.

Keywords: network equilibrium problem, mixed demand, equilibrium conditions, auction equilibrium.

REFERENCES

1. **I. V. Konnov,** *Nelineinaya optimizatsiya i variatsionnye neravenstva* (Nonlinear Optimization and Variational Inequalities), Kazan. Univ., Kazan, 2013 [Russian].
2. **M. J. Beckmann, C. B. McGuire,** and **C. B. Winsten,** *Studies in the Economics of Transportation,* Yale Univ. Press, New Haven, CT, 1956.
3. **D. P Bertsekas** and **E. M. Gafni,** Projection methods for variational inequalities with application to the traffic assignment problem, in *Nondifferential and Variational Techniques in Optimization,* pp. 139–159, North-Holland, Amsterdam, 1982 (Math. Program. Stud., Vol. 17).
4. **S. Dafermos,** Traffic equilibrium and variational inequalities, *Transp. Sci.,* **14**, No. 1, 42–54, 1980.
5. **S. Dafermos,** The general multimodal network equilibrium problem with elastic demand, *Networks,* **12**, No. 1, 57–72, 1982.
6. **J. de Dios Ortúzar** and **L. G. Willumsen,** *Modelling Transport,* John Wiley & Sons, Chichester, 2011.
7. **F. Giannessi** and **A. Maugeri,** *Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems,* Plenum Press, New York, 1995.

8. **I. V. Konnov,** *Equilibrium Models and Variational Inequalities,* Elsevier, Amsterdam, 2007.
9. **I. V. Konnov,** On auction equilibrium models with network applications, *Netnomics,* **16**, No. 1, 107–125, 2015.
10. **I. V. Konnov,** An alternative economic equilibrium model with different implementation mechanisms, *Adv. Model. Optim.,* **17**, No. 2, 245–265, 2015. Available at http://camo.ici.ro/journal/vol17/v17b7.pdf (accessed Apr. 6, 2017).
11. **P. Maillé** and **B. Tuffin,** *Telecommunication Network Economics: From Theory to Applications,* Camb. Univ. Press, New York, 2014.
12. **A. Nagurney,** *Network Economics: A Variational Inequality Approach,* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
13. **M. Patriksson,** *The Traffic Assignment Problem: Models and Methods,* Dover Publ., Mineola, NY, 2015.
14. **O. V. Pinyagina,** On a network equilibrium problem with mixed demand, in *Discrete Optimization and Operations Research* (Proc. 9th Int. Conf. DOOR, Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016), pp. 578–583, Springer, Cham, 2016 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9869).
15. **M. J. Smith,** Existence, uniqueness, and stability of traffic equilibria, *Transp. Res. Part B,* **13**, No. 4. 295–304, 1979.

Olga V. Pinyagina

Received
11 January 2017

Revised
3 March 2017