ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2017. Том 24, № 4. С. 95–110

УДК 519.8 DOI: 10.17377/daio.2017.24.563

О НЕРАВЕНСТВАХ, ПОРОЖДАЮЩИХ ФАСЕТЫ КОМБИНАТОРНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Р. Ю. Симанчёв[1,2]
[1]Омский научный центр СО РАН,
пр. Карла Маркса, 15, 644024 Омск, Россия
[2]Омский гос. университет им. Ф. М. Достоевского,
пр. Мира, 55А, 644077 Омск, Россия
E-mail: osiman@rambler.ru

Аннотация. Одним из центральных вопросов полиэдральной комбинаторики является вопрос об алгоритмической взаимосвязи вершинного и фасетного описаний выпуклых многогранников. С точки зрения комбинаторной оптимизации основной причиной актуальности этого вопроса является возможность применения методов выпуклого анализа к решению экстремальных комбинаторных задач. В настоящей работе рассматриваются комбинаторные многогранники достаточно общего вида. Получен ряд необходимых и достаточное условия фасетности опорных к многограннику неравенств, дана иллюстрация применения разработанной техники к многограннику задачи аппроксимации графа. Библиогр. 20.

Ключевые слова: многогранник, фасета, M-граф, опорное неравенство.

1. Основные понятия и обозначения

Пусть E — конечное множество. С множеством E свяжем $|E|$-мерное евклидово пространство R^E посредством взаимно однозначного соответствия между элементами множества E и осями координат пространства R^E. Иначе говоря, R^E есть множество вектор-столбцов, компоненты которых индексированы элементами множества E. *Многогранником* в пространстве R^E будем называть выпуклую оболочку конечного числа точек из R^E. *Аффинной оболочкой многогранника* P называется множество $\operatorname{aff} P$ всех аффинных комбинаций точек из P. Аффинная оболочка $\operatorname{aff} P$ является аффинным подпространством в R^E, и, следовательно, существует такая система линейных уравнений, что

$$\operatorname{aff} P = \{x \in R^E \mid A^T x = \alpha\},$$

где A — $(|E| \times n)$-матрица, α — n-вектор и без ограничения общности $\operatorname{rank} A = n$. *Размерностью* $\dim P$ многогранника P называется уменьшенная на единицу мощность максимального по включению аффинно независимого семейства точек из P.

Пусть $a \in R^E$ и $a_0 \in R$. Линейное неравенство $a^T x \leqslant a_0$ называется *правильным к многограннику* P, если оно выполняется для всех точек из P. Правильное неравенство называется *опорным*, если существуют такие $x', x'' \in P$, что $a^T x' < a_0$ и $a^T x'' = a_0$. Всякое опорное к P неравенство $a^T x \leqslant a_0$ порождает множество $\{x \in P \mid a^T x = a_0\}$, которое называется *гранью* многогранника P. Грани размерности 0 будем называть *вершинами*, а грани размерности $\dim P - 1$ — *фасетами* многогранника P. Опорные неравенства, порождающие фасеты, назовём *фасетными.*

Фасетные неравенства играют особую роль в полиэдральной комбинаторике. Это обусловлено возможностью применения методов выпуклого анализа к решению комбинаторных задач [3, 8, 13, 18]. Согласно теореме Вейля — Минковского [3] для описания многогранника как множества решений системы линейных уравнений и неравенств помимо аффинной оболочки необходимо и достаточно знать все его фасетные неравенства (с точностью до эквивалентности). Соответствующие полиэдры являются базой для алгоритмов ветвей и границ, методов понижения размерности задач [2]. Построение фасет комбинаторных многогранников, соответствующих NP-трудным задачам, является актуальным направлением в полиэдральной комбинаторике (см., например, [10, 12, 15, 16, 19, 20] и др.). Кроме того, фасетные неравенства активно используются в качестве отсекающих плоскостей при решении задач комбинаторной оптимизации большой размерности (см. [6, 9–11, 17]).

Перейдём к описанию объекта, являющегося предметом настоящей статьи. Для каждого $R \subseteq E$ определим его вектор инциденций $x^R \in R^E$ как вектор с координатами $x_e^R = 1$ при $e \in R$ и $x_e^R = 0$ при $e \notin R$. Таким образом, множеству всех подмножеств можества E, включая пустое, ставится во взаимно однозначное соответствие множество всех вершин единичного куба в R^E. На основании этого соответствия в дальнейшем там, где это не вызовет недоразумений, $(0,1)$-вектор $x \in R^E$ будем одновремено понимать как подмножество множества E.

Пусть $\mathcal{H} \subseteq 2^E$ — семейство подмножеств множества E. Комбинаторным многогранником, ассоциированным с $\mathcal{H}$, является множество

$$P_{\mathcal{H}} = \operatorname{conv}\{x^H \in R^E \mid H \in \mathcal{H}\},$$

где $\operatorname{conv} X$ обозначает выпуклую оболочку множества X. Перечислим некоторые очевидные, но важные свойства многогранника $P_{\mathcal{H}}$:

1) каждая вершина многогранника $P_{\mathcal{H}}$ является $(0,1)$-вектором;

2) вершины и только они соответствуют множествам семейства $\mathcal{H}$;

3) многогранник $P_{\mathcal{H}}$ не имеет целочисленных точек, отличных от вершин.

В разд. 2 настоящей статьи описан ряд необходимых, а в разд. 3 — достаточных условий фасетности линейных неравенств, опорных к многограннику $P_{\mathcal{H}}$. Описанная в разд. 2 и 3 техника является обобщением метода из [5], разработанного для многогранника связных k-факторов. В разд. 4 иллюстрируется применение данной техники к одному классу неравенств для многогранника M-графов [7].

Основные результаты данной работы будут основаны на следующем широко известном в выпуклом анализе критерии фасетности опорных неравенств.

Теорема 1 [18]. *Пусть $P \subset R^E$ — многогранник, матрица A имеет полный ранг и $\operatorname{aff} P = \{x \in R^E \mid A^T x = \alpha\}$. Опорное к P неравенство $a^T x \leqslant a_0$ является фасетным тогда и только тогда, когда для любого опорного к P неравенства $c^T x \leqslant c_0$, удовлетворяющего условию*

$$\{x \in P \mid a^T x = a_0\} \subseteq \{x \in P \mid c^T x = c_0\},$$

имеет место разложение $c = \mu a + A\lambda$, $c_0 = \mu a_0 + \alpha^T \lambda$, где μ — неотрицательное число и $\lambda \in R^{\operatorname{rank} A}$.

Будем рассматривать так называемые комбинаторно полные семейства подмножеств $\mathcal{H} \subseteq 2^E$, т. е. семейства, удовлетворяющие следующей аксиоме:

для любых $e_1, e_2 \in E$ найдётся такое $H \in \mathcal{H}$, что $e_1 \in H$ и $e_2 \notin H$.

Комбинаторно полными являются, например, семейства подграфов полного графа на более чем четырёх вершинах такие, как паросочетания, гамильтоновы циклы, M-графы [7] и многие другие комбинаторные объекты.

2. Необходимые условия фасетности

В этом разделе рассмотрим некоторые свойства, которыми должны обладать неравенства, порождающие фасеты комбинаторных многогранников вида $P_{\mathcal{H}}$ на комбинаторно полных семействах $\mathcal{H}$.

Теорема 2. *Пусть неравенство $a^T x \leqslant a_0$ опорно к $P_{\mathcal{H}}$ и множество вершин порождаемой им грани есть $\{x^1, x^2, \ldots, x^t\}$. Если выполняется любое из следующих условий:*

1) $\left|\bigcap\limits_{i=1}^{t} x^i\right| \geqslant 2$ *или* $\left|E \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{t} x^i\right| \geqslant 2$;

2) $\bigcap\limits_{i=1}^{t} x^i = \{e_0\}$ (*или* $E \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{t} x^i = \{e_0\}$) *и существует такое* $\bar{x} \in \mathcal{H}$, *что* $e_0 \in \bar{x}$ (*или* $e_0 \notin \bar{x}$ *соответственно*) *и* $a^T\bar{x} < a_0$,
то неравенство $a^T x \leqslant a_0$ *не является фасетным к многограннику* $P_{\mathcal{H}}$.

Доказательство. Обозначим через F_a грань многогранника $P_{\mathcal{H}}$, порождённую неравенством $a^T x \leqslant a_0$.

1. Пусть $e_1, e_2 \in \bigcap\limits_{i=1}^{t} x^i$ и $e_1 \neq e_2$. Тогда все точки $x^1, x^2, \ldots, x^t$ лежат на гранях $F_j = \{x \in P_{\mathcal{H}} \mid x_{e_j} = 1\}$, $j = 1, 2$, порождаемых опорными неравенствами $x_{e_j} \leqslant 1$, $j = 1, 2$, соответственно. Следовательно, вся грань F_a лежит в пересечении граней F_1 и F_2. Из комбинаторной полноты семейства $\mathcal{H}$ следует, что F_1 и F_2 — собственные грани многогранника $P_{\mathcal{H}}$. Кроме того, заметим, что $F_1 \neq F_2$, ибо в противном случае любое множество $H \in \mathcal{H}$, содержащее один из элементов e_1 и e_2, непременно содержит и второй, что противоречит комбинаторной полноте семейства $\mathcal{H}$. Таким образом, имеем

$$\dim F_a \leqslant \dim(F_1 \cap F_2) < \min\{\dim F_1, \dim F_2\} \leqslant \dim P_{\mathcal{H}} - 1,$$

откуда следует, что F_a не фасета.

При $e_1, e_2 \in E \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{t} x^i$ рассуждения совершенно аналогичны, если взять $F_j = \{x \in P_{\mathcal{H}} \mid x_{e_j} = 0\}$, $j = 1, 2$.

2. Пусть $F_0 = \{x \in P_{\mathcal{H}} \mid x_{e_0} = 1\}$. В силу комбинаторной полноты семейства $\mathcal{H}$ грань F_0 является собственной гранью многограника $P_{\mathcal{H}}$. Кроме того, из условия теоремы очевидно, что $F_a \subseteq F_0$. Покажем, что $F_a \neq F_0$. Если $F_a = F_0$, то для любого $x' \in \mathcal{H}$, содержащего e_0, непременно выполняется включение $x' \in F_a$, что противоречит условию. Таким образом, $F_a \subset F_0$. Тем самым

$$\dim F_a < \dim F_0 \leqslant \dim P_{\mathcal{H}} - 1,$$

следовательно, F_a вновь не фасета.

В случае, когда $E \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{t} x^i = \{e_0\}$, рассуждения аналогичны, если взять $F_0 = \{x \in P_{\mathcal{H}} \mid x_{e_0} = 0\}$. Теорема 2 доказана.

Следующее необходимое условие фасетности имеет место для опорных неравенств с коэффициентами 0 и 1 в левой части. Класс таких

неравенств индуцируется множеством всех подмножеств множества E следующим образом. Пусть $W \subseteq E$. Величина

$$r_{\mathcal{H}}(W) = \max\{|W \cap H| \mid H \in \mathcal{H}\}$$

называется *рангом множества* W (*относительно* $\mathcal{H}$). Соответствующее неравенство

$$\sum_{e \in W} x_e \leqslant r_{\mathcal{H}}(W)$$

называется *ранговым неравенством, индуцированным множеством* W. В силу определения величины $r_{\mathcal{H}}$ всякое ранговое неравенство является опорным к многограннику $P_{\mathcal{H}}$.

Теорема 3. *Пусть $W \subseteq E$ и $|W| \geqslant 2$. Если существует $H \in \mathcal{H}$ такое, что $W \subset H$, то ранговое неравенство $\sum\limits_{e \in W} x_e \leqslant r_{\mathcal{H}}(W)$ не является фасетным к многограннику $P_{\mathcal{H}}$.*

Доказательство. Действительно, из определения ранга множества имеем $r_{\mathcal{H}}(W) = |W|$. Следовательно, если для какого-либо $\bar{x} \in \mathcal{H}$ выполняется равенство $\sum\limits_{e \in W} \bar{x}_e = r_{\mathcal{H}}(W)$, то непременно $W \subseteq \bar{x}$. Теперь требуемое следует из теоремы 2. Теорема 3 доказана.

3. Достаточные условия фасетности

Отличительной чертой описанных в этом разделе достаточных условий фасетности опорных неравенств является их комбинаторный характер.

Пусть $\mathcal{H} \subseteq 2^E$ — комбинаторно полное семейство подмножеств множества E и

$$\operatorname{aff} P_{\mathcal{H}} = \{x \in R^E \mid A^T x = \alpha\},$$

причём матрица A меет полный ранг. Каждая строка матрицы A соответствует ровно одному элементу $e \in E$, и наоборот. Поэтому множество строк матрицы A будем обозначать через E. Множество столбцов обозначим буквой V и положим $|V| = n$. Ясно, что $\operatorname{rank} A = |V| \leqslant |E|$. Согласно введённым обозначениям для коэффициента матрицы A, находящегося в строке $e \in E$ и столбце $u \in V$, будем использовать запись a_{eu}. Если $c \in R^E$, то через $(c \,|\, A)$ (соответственно $(A \,|\, c)$) обозначим матрицу, полученную приписыванием к матрице A слева (соответственно справа) столбца c, а через $A(c, \widetilde{E})$ — подматрицу матрицы $(c \,|\, A)$, образованную строками $\widetilde{E} \subseteq E$. Если матрица A пустая, то под $(c \,|\, A)$ (или $(A \,|\, c)$) будем понимать просто столбец c.

Пусть $b^T x \leqslant b_0$ — опорное к $P_{\mathcal{H}}$ неравенство. Через $H_1 \triangle H_2$ обозначим симметрическую разность множеств H_1 и H_2, т. е.

$$H_1 \triangle H_2 = (H_1 \setminus H_2) \cup (H_2 \setminus H_1).$$

Определение 1. Непустое множество $S \subset E$ назовём *$b\mathcal{H}$-переключением*, если существуют такие $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, что
1) $S = H_1 \triangle H_2$,
2) $b^T x^{H_1} = b^T x^{H_2} = b_0$.

Определение 2. Подмножество $\widetilde{E} \subset E$ называется *$b\mathcal{H}$-базисом*, если выполняются следующие условия:
1°) $|\widetilde{E}| = n + 1$;
2°) матрица $A(b, \widetilde{E})$ имеет полный ранг;
3°) для всякого $e \in E \setminus \widetilde{E}$ существует упорядоченная последовательность $e_1, e_2, \dots, e_t = e$ элементов из E такая, что любой её элемент e_i, $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, принадлежит некоторому $b\mathcal{H}$-переключению, лежащему в $\widetilde{E} \cup \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$.

Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть* $\operatorname{aff} P_{\mathcal{H}} = \{x \in R^E \mid A^T x = \alpha\}$, $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ — *пара различных множеств и* $S = H_1 \triangle H_2$. *Тогда для каждого* $u \in V$ *имеет место соотношение*

$$\sum_{e \in S \setminus H_1} a_{eu} = \sum_{e \in S \setminus H_2} a_{eu}.$$

Доказательство. Пусть $a^T x = \alpha_u$ — уравнение из системы, определяющей $\operatorname{aff} P_{\mathcal{H}}$, соответствующее $u \in V$. Ясно, что векторы x^{H_1} и x^{H_2} удовлетворяют этому уравнению. Заметив, что $S \setminus H_2 = H_1 \setminus H_2$ и $S \setminus H_1 = H_2 \setminus H_1$, получаем

$$\begin{aligned} 0 = a^T x^{H_1} - a^T x^{H_2} = a^T (x^{H_1} - x^{H_2}) = a^T (x^{H_1 \setminus H_2} - x^{H_2 \setminus H_1}) \\ = a^T (x^{S \setminus H_2} - x^{S \setminus H_1}) = \sum_{e \in S \setminus H_2} a_{eu} - \sum_{e \in S \setminus H_1} a_{eu}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Теорема 4. *Для того чтобы опорное к $P_{\mathcal{H}}$ неравенство $b^T x \leqslant b_0$ было фасетным, достаточно существования $b\mathcal{H}$-базиса $\widetilde{E} \subset E$.*

Доказательство основано на теореме 1. Пусть $c^T x \leqslant c_0$ — опорное к $P_{\mathcal{H}}$ неравенство, удовлетворяющее условию

$$\{x \in P \mid b^T x = b_0\} \subseteq \{x \in P \mid c^T x = c_0\}. \tag{1}$$

Покажем, что тогда система линейных уравнений

$$\mu b + A\lambda = c \tag{2}$$

относительно неизвестных $\mu \in R$, $\lambda \in R^n$ совместна, причём $\mu \geqslant 0$. Всякое уравнение системы (2) соответствует единственному $e \in E$. Обозначим уравнения системы (2) через $\gamma(e)$, $e \in E$, имея в виду и правые, и левые их части, т. е.

$$\gamma(e): \quad b_e\mu + \sum_{u \in V} a_{eu}\lambda_u = c_e.$$

Пусть $S = H_1 \triangle H_2$ — $b\mathcal{H}$-переключение, где $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ — множества, указанные в определении 1. По определению $b^T x^{H_1} = b^T x^{H_1} = b_0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = b^T x^{H_1} - b^T x^{H_2} = b^T(x^{H_1} - x^{H_2}) = b^T(x^{H_1 \setminus H_2} - x^{H_2 \setminus H_1}) \\ = b^T(x^{S \setminus H_2} - x^{S \setminus H_1}) = \sum_{e \in S \setminus H_2} b_e - \sum_{e \in S \setminus H_1} b_e. \end{aligned} \tag{3}$$

Так как в силу условия (1) $c^T x^{H_1} = c^T x^{H_1} = c_0$, из аналогичных выкладок получаем

$$0 = \sum_{e \in S \setminus H_2} c_e - \sum_{e \in S \setminus H_1} c_e. \tag{4}$$

Заметим, что в лемме 1 фигурируют такие же, как в (3) и (4), комбинации элементов остальных столбцов системы (2). Следовательно, в матрице $(b \,|\, A \,|\, c)$ сумма строк с именами из $S \setminus H_2$ минус сумма строк с именами из $S \setminus H_1$ даёт нулевую строку. Иначе говоря, уравнения $\gamma(e)$, $e \in S$, связаны следующим линейным соотношением:

$$0 = \sum_{e \in S \setminus H_2} \gamma(e) - \sum_{e \in S \setminus H_1} \gamma(e), \tag{5}$$

что означает их линейную зависимость. Таким образом, если множество $S \subset E$ является $b\mathcal{H}$-переключением, то одно любое уравнение семейства $\{\gamma(e), e \in S\}$ может быть отброшено из системы (2) без ущерба для её совместности.

Покажем, что указанное свойство позволяет отбросить из системы (2) все уравнения $\gamma(e)$ с именами $e \in E \setminus \widetilde{E}$. Возьмём $e \in E \setminus \widetilde{E}$, и пусть $e_1, e_2, \ldots, e_t = e$ — соответствующая последовательность из условия 3°.

Заметим, что условие 3° выполняется для каждого элемента этой последовательности. Пусть $S_t \subseteq \widetilde{E} \cup \{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$ — $b\mathcal{H}$-переключение и $e_t \in S_t$ (существование такого S_t следует из условия 3°). Тогда в силу (5) $\gamma(e_t)$ является линейной комбинацией уравнений из множества $\{\gamma(e), e \in \widetilde{E} \cup \{e_1, e_2, \ldots, e_{t-1}\}\}$. Рассуждая аналогично, легко увидеть, что $\gamma(e_{t-1})$ является линейной комбинацией уравнений из множества $\{\gamma(e), e \in \widetilde{E} \cup \{e_1, e_2, \ldots, e_{t-2}\}\}$. Следовательно, $\gamma(e_t)$ является линейной комбинацией уравнений $\{\gamma(e), e \in \widetilde{E} \cup \{e_1, e_2, \ldots, e_{t-2}\}\}$. Продолжая эти рассуждения в порядке убывания номеров элементов e_i, приходим к выводу о том, что уравнение $\gamma(e_t) = \gamma(e)$ является линейной комбинацией уравнений множества $\{\gamma(e), e \in \widetilde{E}\}$, т. е. может быть отброшено из системы (2) без ущерба для её совместности.

Таким образом, в силу произвольности элемента $e \in E \setminus \widetilde{E}$ система (2) эквивалентна системе

$$A(b, \widetilde{E})\overline{\lambda} = \widetilde{c}, \tag{6}$$

где $\widetilde{c} = \{c_e, e \in \widetilde{E}\}$, $\overline{\lambda} = (\mu, \lambda^T)^T \in R^{n+1}$. Из условий 1° и 2° имеем $\operatorname{rank} A(b, \widetilde{E}) = n + 1$. Следовательно, ранг расширенной матрицы системы (6) равен рангу основной. Значит, система (6), а вместе с ней и система (2), совместна. При этом решение системы (2) нетривиально, ибо в противном случае $c = 0$.

Остаётся показать, что $\mu \geqslant 0$. Так как $b^T x \leqslant b_0$ опорно к $P_{\mathcal{H}}$, существуют такие $x^1, x^2 \in \mathcal{H}$, что $b^T x^1 = b_0$ $b^T x^2 < b_0$. Тогда в силу (1) $c^T x^1 = c_0$ и $c^T x^2 \leqslant c_0$. Отсюда

$$\begin{aligned} 0 \leqslant c^T(x^1 - x^2) = (\mu b^T + \lambda^T A^T)(x^1 - x^2)& \\ = \mu(b^T x^1 - b^T x^2) + \lambda^T \alpha - \lambda^T \alpha.& \end{aligned}$$

Поскольку $b^T x^1 - b^T x^2 > 0$, то $\mu \geqslant 0$. Теорема 4 доказана.

4. Класс фасетных неравенств для многогранника M-графов

Рассмотрим введённые в [7] неравенства, опорные к многограннику M-графов. Эти неравенства индуцируются так называемыми 1-парашютами. Фасетность этих неравенств доказана в [7], однако в этой работе приводится другое доказательство их фасетности, основанное на технике из разд. 3, представляющей основное содержание настоящей работы. Таким образом, разд. 4 можно рассматривать как пример применения техники $b\mathcal{H}$-базисов к конкретному комбинаторному могограннику. Кроме того, эта техника позволила получить три класса фасетных неравенств для многогранника связных k-факторов полного графа [5].

Граф H называется *M-графом*, если каждая его компонента связности (возможно, одновершинная) является кликой. Семейство M-графов будет множеством допустимых решений задачи аппроксимации графа. Достаточно подробно с учётом алгоритмических аспектов эта задача описана в работах $[1, 4, 7, 14]$. Мы опишем класс фасетных неравенств для многогранника M-графов. Доказательство фасетности будет приведено в терминах $b\mathcal{H}$-базисов.

В дополнение к понятиям и обозначениям, уже использовавшимся в данной статье, оговорим следующее.

Пусть $K_n = (V, E)$ — полный неориентированный n-вершинный граф без петель и кратных рёбер. Для любого графа D, отличного от K_n, через VD и ED будем обозначать множества его вершин и рёбер соответственно. Для ребра $e \in E$ будем также использовать запись uv, где u, v — вершины из V, инцидентные ребру e. Каждое множество $R \subset E$ индуцирует некоторый подграф T, в котором $ET = R$ и VT — множество вершин из V, инцидентных рёбрам из R. Граф, индуцированный множеством рёбер R, иногда будем обозначать через R. Для подграфов D, F из K_n положим $D \cup F = (VD \cup VF, ED \cup EF)$, $D \cap F = ED \cap EF$ и, если $F \subseteq D$, то $D \setminus F = (VD, ED \setminus EF)$. Через $\delta(u)$ обозначим множество рёбер графа K_n, инцидентных вершине u.

Будем рассматривать множество E рёбер графа K_n в качестве основного множества в смысле разд. 1 настоящей статьи. В качестве семейства подмножеств $\mathcal{H} \subseteq 2^E$ возьмём семейство всех M-графов в графе K_n. Иными словами, подмножество рёбер $EH \subseteq E$ принадлежит семейству $\mathcal{H}$, если оно индуцирует M-граф $H \subseteq K_n$. Тем самым $P_\mathcal{H}$ — многогранник M-графов. Сразу отметим, что так как пустой граф и графы $\{e\}$, где $e \in E$, являются M-графами, то $\dim P_\mathcal{H} = \frac{n^2-n}{2}$, т. е. $P_\mathcal{H}$ является многогранником полной размерности.

В [7] показано, что $(0, 1)$-вектор $x \in R^E$ является вектором инциденций M-графа тогда и только тогда, когда он является решением системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} -x_{uv} + x_{uw} + x_{vw} &\leqslant 1, \\ x_{uv} - x_{uw} + x_{vw} &\leqslant 1, \\ x_{uv} + x_{uw} - x_{vw} &\leqslant 1, \end{aligned} \tag{7}$$

где $u, v, w \in V$ — всевозможные тройки попарно различных вершин,

$$x_{uv} \geqslant 0 \quad \text{для всех } uv \in E. \tag{8}$$

Легко убедиться что неравенства вида (8) порождают фасеты многогранника $P_{\mathcal{H}}$. Для этого достаточно заметить, что начало координат и единичные орты в R^E (кроме орта, соответствующего ребру uv из (8)), будучи векторами инциденций M-графов, образуют аффинно независимое семейство мощности $\frac{n^2-n}{2}$. Как убедимся далее, неравенства (7) тоже являются фасетными для $P_{\mathcal{H}}$, однако они принадлежат более широкому классу фасетных неравенств, индуцированных подграфами специального вида. Этот класс определяется следующим образом.

Пусть $W = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ — подмножество множества V, $p \geqslant 2$. Через K_p обозначим клику на множестве вершин W, а через F — звезду в K_n с центром в вершине $u \notin W$ и лучами uv_j, $j = 1, 2, \ldots, p$. Граф $F \cup K_p$ назовём 1-*парашютом*. С 1-парашютом свяжем линейное неравенство

$$\sum_{j=1}^{p} x_{uv_j} - \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{p} x_{v_iv_j} \leqslant 1,$$

или, что то же самое,

$$(x^F - x^{K_p})^T x \leqslant 1. \qquad (9)$$

Опорность этого неравенства к многограннику $P_{\mathcal{H}}$ доказана в [7]. Используя технику, описанную в разд. 3, докажем его фасетность.

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{H}$ — семейство всех M-графов в графе K_n, $b^T x \leqslant b_0$ — неравенство вида* (9), *индуцированное* 1*-парашютом $F \cup K_p$ с центром u. Следующие множества рёбер являются $b\mathcal{H}$-переключениями:*

(1) *одноэлементные множества рёбер $\{st\}$ при $st \notin \delta(u) \cup EK_p$;*

(2) $\{ut, vt\}$, *где* $t \notin VF$, $v \in VK_p$;

(3) $\{uv, vw\}$, *где $v, w \in VK_p$ — пара различных вершин из купола.*

Доказательство. (1) Так как $st \notin \delta(u) \cup EK_p$, выберем произвольно вершину $v \in VK_p$, не инцидентную ребру st, и положим $H_1 = \{uv\}$, $H_2 = \{uv, st\}$. Нетрудно видеть, что в этом случае H_1, H_2 — M-графы, $(x^F - x^{K_p})^T x^{H_1} = (x^F - x^{K_p})^T x^{H_2} = 1$ и $H_1 \triangle H_2 = \{st\}$.

Легко проверить, что в случае (2) требованиям определения 1 удовлетворяют графы $H_1 = \{uv\}$ и $H_2 = \{uv, ut, vt\}$, а в случае (3) — графы $H_1 = \{uw\}$ и $H_2 = \{uv, vw, uw\}$. Утверждение 1 доказано.

Теорема 5 [7]. *Неравенства* (9), *индуцированные* 1*-парашютами, порождают фасеты многогранника M-графов.*

Доказательство. Так как многогранник $P_{\mathcal{H}}$ имеет полную размерность, его аффинная оболочка совпадает со всем пространством R^E. Зна-

чит, условие 1° из определения 2 примет вид $|\widetilde{E}| = 1$, а условие 2° будет означать, что матрица $A(b, \widetilde{E})$ является ненулевым скаляром.

Используя обозначения из формулировки утверждения 1, покажем, что $b\mathcal{H}$-базисом может являться любой луч uv звезды F. Зафиксируем луч uv. Условия 1° и 2° выполняются. Для проверки условия 3° выпишем для каждого $e \neq uv$ требуемую последовательность рёбер. Разобьём множество $E \setminus \{uv\}$ на непересекающиеся подмножества

$$E \setminus \{uv\} = (E \setminus (\delta(u) \cup EK_p)) \cup (\delta(u) \setminus EF) \cup (EF \setminus \{uv\}) \cup EK_p.$$

Если $st \in E \setminus (\delta(u) \cup EK_p)$, то с использованием $b\mathcal{H}$-переключений вида (1) из утверждения 1 требуемой последовательностью будет uv, st. Если $ut \in \delta(u) \setminus EF$, то, начиная с $b\mathcal{H}$-базиса uv, включаем в последовательность ребро vt (используя $b\mathcal{H}$-переключение $\{vt\}$ вида (1)), а затем — ребро ut (используя $b\mathcal{H}$-переключение $\{vt, ut\}$ вида (2)). Если $uw \in EF \setminus \{uv\}$, то с помощью $b\mathcal{H}$-переключений вида (3) строится последовательность uv, vw, uw. Наконец, для всякого ребра $wt \in EK_p$ с помощью $b\mathcal{H}$-переключений вида (3) строится последовательность uv, vw, uw, wt. Теорема 5 доказана.

Заключение

В статье описана техника доказательства фасетности опорного неравенства для широкого класса комбинаторных многогранников. Предлагаемая техника довольно громоздка, но при конкретизации семейства $\mathcal{H}$, аффинной оболочки соответствующего комбинаторного многогранника и опорного неравенства она позволяет получать конструктивные результаты. Помимо описания фасет многогранника M-графов, выполненного в настоящей работе, с помощью данной техники в [5] получены три класса фасетных неравенств для многогранника связных k-факторов полного графа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агеев А. А., Ильев В. П., Кононов А. В., Талевнин А. С.** Вычислительная сложность задачи аппроксимации графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2006. Т. 13, № 1. С. 3–15.
2. **Бастраков С. И., Золотых Н. Ю.** Быстрый способ проверки правила Черникова в методе исключения Фурье — Моцкина // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 1. С. 165–172.
3. **Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К.** Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука, 1981.

4. **Ильев В. П., Ильева С. Д., Навроцкая А. А.** Приближённые алгоритмы для задач аппроксимации графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 1. С. 41–60.
5. **Симанчёв Р. Ю.** О ранговых неравенствах, порождающих фасеты многогранника связных k-факторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 84–110.
6. **Симанчёв Р. Ю., Уразова И. В.** Целочисленная модель задачи минимизации общего времени обслуживания параллельными приборами единичных требований с предшествованиями // Автоматика и телемеханика. 2010. № 10. С. 100–106.
7. **Симанчёв Р. Ю., Уразова И. В.** О гранях многогранника задачи аппроксимации графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 2. С. 86–101.
8. **Шевченко В. Н.** Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Физматлит, 1995.
9. **Crowder H., Johnson E. L., Padberg M. W.** Solving large-scale zero-one linear programming problems // Oper. Res. 1983. Vol. 31, No. 5. P. 803–834.
10. **Gottlieb E. S., Rao M. R.** The generalized assignment problem: Valid inequalities and facets // Math. Program. 1990. Vol. 46, No. 1–3. P. 31–52.
11. **Grötschel M., Holland O.** Solution of large-scale symmetric traveling salesman problems // Math. Program. 1991. Vol. 51, No. 1–3. P. 141–202.
12. **Grötschel M., Pulleyblank W. R.** Clique tree inequalities and the symmetric traveling salesman problem // Math. Oper. Res. 1986. Vol. 11, No. 4. P. 537–569.
13. **Korte B., Vygen J.** Combinatorial optimization: Theory and algorithms. Heidelberg: Springer, 2006.
14. **Křivánek M., Morávek J.** NP-hard problems in hierarchical-tree clustering // Acta Inf. 1986. V. 23, No. 3. P. 311–323.
15. **Padberg M. W.** $(1, k)$-Configurations and facets for packing problems // Math. Program. 1980. Vol. 18. P. 94–99.
16. **Padberg M. W., Rinaldi G.** Facet identification for the symmetric traveling salesman polytope // Math. Program. 1990. Vol. 47. P. 219–257.
17. **Padberg M. W., Rinaldi G.** A branch and cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems // SIAM Rev. 1991. Vol. 33. P. 60–100.
18. **Schrijver A.** Combinatorial optimization. Polyhedra and efficiency. Heidelberg: Springer, 2004. (Algorithms Comb.; Vol. 24).
19. **Simanchev R. Yu., Urazova I. V.** On the facets of combinatorial polytopes // Discrete Optimization and Operations Research. Proc. 9th Int. Conf. (Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016). P. 233–243. Cham: Springer, 2016. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 9869).

20. **Wolsey L. A.** Valid inequalities for 0-1 knapsacks and MIPs with generalised upper bound constraints // Discrete App. Math. 1990. Vol. 29, No. 2–3. P. 251–261.

Симанчёв Руслан Юрьевич

Статья поступила
18 января 2017 г.
Исправленный вариант —
12 мая 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2017. Volume 24, No. 4. P. 95–110

UDC 519.8 DOI: 10.17377/daio.2017.24.563

ON FACET-INDUCING INEQUALITIES FOR COMBINATORIAL POLYTOPES

R. Yu. Simanchev[1,2]
[1]Omsk Scientific Center SB RAS,
15 Karl Marx Ave., 644024 Omsk, Russia
[2]Dostoevsky Omsk State University,
55A Mira Ave., 630077 Omsk, Russia
E-mail: osiman@rambler.ru

Abstract. One of the central questions of polyhedral combinatorics is the question of the algorithmic relationship between the vertex and facet descriptions of convex polytopes. From the standpoint of combinatorial optimization, the main reason for the actuality of this question is the possibility of applying the methods of convex analysis to solving the extremal combinatorial problems. In this paper, we consider the combinatorial polytopes of a sufficiently general form. We obtain a few of necessary conditions and a sufficient condition for a supporting inequality of a polytope to be a facet inequality and give an illustration of the use of the developed technology to the polytope of some graph approximation problem. Bibliogr. 20.

Keywords: polytope, facet, M-graph, supporting inequality.

REFERENCES

1. **A. A. Ageev, V. P. Il'ev, A. V. Kononov,** and **A. S. Talevnin,** Computational complexity of the graph approximation problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **13**, No. 1, 3–15, 2006 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **1**, No. 1, 1–8, 2007.
2. **S. I. Bastrakov** and **N. Yu. Zolotykh,** Fast method for verifying Chernikov rules in Fourier — Motzkin elimination, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **55**, No. 1, 165–172, 2015 [Russian]. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.,* **55**, No. 1, 160–167, 2015.
3. **V. A. Emelichev, M. M. Kovalev,** and **M. K. Kravtsov,** *Mnogogranniki. Grafy. Optimizatsiya*, Nauka, Moscow, 1981 [Russian]. Translated under the title *Polytopes, Graphs and Optimization,* Camb. Univ. Press, New York, 1984.

4. **V. P. Il'ev, S. D. Il'eva,** and **A. A. Navrotskaya,** Approximation algorithms for graph approximation problems, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **18**, No. 1, 41–60, 2011 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **5**, No. 4, 569–581, 2011.
5. **R. Yu. Simanchev,** On rank inequalities that generate facets of the connected k-factors polytope, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **3**, No. 3, 84–110, 1996 [Russian].
6. **R. Yu. Simanchev** and **I. V. Urazova,** An integer-valued model for the problem of minimizing the total servicing time of unit claims with parallel devices with precedences, *Avtom. Telemekh.,* No. 10, 100–106, 2010 [Russian]. Translated in *Autom. Remote Control,* **71**, No. 10, 2102–2108, 2010.
7. **R. Yu. Simanchev** and **I. V. Urazova,** On the polytope faces of the graph approximation problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **22**, No. 2, 86–101, 2015 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **9**, No. 2, 283–291, 2015.
8. **V. N. Shevchenko,** *Kachestvennye voprosy tselochislennogo programmirovaniya,* Fizmatlit, Moscow, 1995 [Russian]. Translated under the title *Qualitative Topics in Integer Linear Programming,* AMS, Providence, RI, 1997 (Transl. Math. Monogr., Vol. 156).
9. **H. Crowder, E. L. Johnson,** and **M. W. Padberg,** Solving large-scale zero-one linear programming problems, *Oper. Res.,* **31**, No. 5, 803–834, 1983.
10. **E. S. Gottlieb** and **M. R. Rao,** The generalized assignment problem: Valid inequalities and facets, *Math. Program.,* **46**, No. 1–3, 31–52, 1990.
11. **M. Grötschel** and **O. Holland,** Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems, *Math. Program.,* **51**, No. 1–3, 141–202, 1991.
12. **M. Grötschel** and **W. R. Pulleyblank,** Clique tree inequalities and the symmetric traveling salesman problem, *Math. Oper. Res.,* **11**, No. 4, 537–569, 1986.
13. **B. Korte** and **J. Vygen,** *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithm,* Springer, Heidelberg, 2006 (Algorithms Comb., Vol. 21).
14. **M. Křivánek** and **J. Morávek,** NP-hard problems in hierarchical-tree clustering, *Acta Inform.,* **23**, No. 3, 311–323, 1986.
15. **M. W. Padberg,** $(1, k)$-configurations and facets for packing problems, *Math. Program.,* **18**, 94–99, 1980.
16. **M. W. Padberg** and **G. Rinaldi,** Facet identification for the symmetric traveling salesman polytope, *Math. Program.,* **47**, 219–257, 1990.
17. **M. W. Padberg** and **G. Rinaldi,** A branch and cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems, *SIAM Rev.,* **33**, 60–100, 1991.
18. **A. Schrijver,** *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency,* Springer, Heidelberg, 2004 (Algorithms Comb., Vol. 24).

19. R. Yu. Simanchev and **I. V. Urazova,** On the facets of combinatorial polytopes, in *Discrete Optimization and Operations Research* (Proc. 9th Int. Conf. DOOR, Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016), pp. 159–170, Springer, Cham, 2016 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9869).

20. L. A. Wolsey, Valid inequalities for 0-1 knapsacks and MIPs with generalised upper bound constraints, *Discrete Appl. Math.,* **29**, No. 2–3, 251–261, 1990.

Ruslan Yu. Simanchev

Received
18 January 2017

Revised
12 May 2017