ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2017. Том 24, № 4. С. 34–46

УДК 519.174 DOI: 10.17377/daio.2017.24.572

ОБ $(1, l)$-РАСКРАСКЕ ИНЦИДЕНТОРОВ МУЛЬТИГРАФОВ *)

М. О. Головачёв[2,a], *А. В. Пяткин*[1,2,b]

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
[2]Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: [a]mik-golovachev2@mail.ru, [b]artem@math.nsc.ru

Аннотация. Доказано, что если l больше или равно $\Delta/2 - 1$, то $(1, l)$-хроматическое число произвольного мультиграфа максимальной степени Δ не превосходит $\Delta + 1$. Кроме того, показано, что инциденторы любой ориентированной призмы можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы любые два смежных инцидентора были раскрашены различно, а разность цветов конечного и начального инциденторов каждой дуги была равна 1. Ил. 1, библиогр. 10.

Ключевые слова: раскраска инциденторов, $(1, l)$-раскраска, призма.

Введение

Все неопределяемые в работе термины можно найти в стандартных учебниках по теории графов, например, в [7, 10].

Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный мультиграф без петель с множеством вершин V и множеством дуг E. Если дуга $e \in E$ инцидентна вершине $v \in V$, то упорядоченная пара (v, e) называется *инцидентором.* Инцидентор (v, e) удобно трактовать как половину дуги e, инцидентную вершине v. Будем также говорить, что инцидентор (v, e) *примыкает* к вершине v. Два инцидентора называются *смежными*, если они примыкают к одной вершине. Каждая дуга $e = uv$ имеет два инцидентора: *начальный* инцидентор (u, e) и *конечный* инцидентор (v, e). Два инцидентора называем *однотипными*, если оба они являются либо начальными, либо конечными. Множество всех инциденторов мультиграфа G обозначим через I. *Раскраской инциденторов* называется произвольное отображение $f : I \to Z_+$, где Z_+ — множество целых положительных чисел

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15–01–00976, 17–01–00170) и Президиума СО РАН (программа 227).

(*цветов*). Иногда удобно задавать раскраску инциденторов как раскраску дуг парой цветов. В этом случае пишем $f(e) = (a, b)$, если начальный инцидентор дуги e раскрашен цветом a, а конечный — цветом b. Раскраска инциденторов называется *правильной*, если любые два смежных инцидентора окрашены в разные цвета. Правильная раскраска инциденторов называется (k, l)-*раскраской*, если разность цветов конечного и начального инциденторов каждой дуги лежит в интервале $[k, l]$. Наименьшее число цветов, необходимое для (k, l)-раскраски инциденторов мультиграфа G, называется (k, l)-*хроматическим числом* и обозначается через $\chi_{k,l}(G)$. Очевидно, что $\chi_{k,l}(G) \geqslant \Delta(G)$.

Задача раскраски инциденторов была впервые сформулирована в [4] как удобная модель для проблемы передачи сообщений в локальной сети связи. Понятие (k, l)-раскраски было впервые введено в [3], где был полностью исследован случай $k = 0$, а именно, показано, что при $l > 0$ выполняется равенство $\chi_{0,l}(G) = \Delta$ (заметим, что $\chi_{0,0}(G)$ есть в точности рёберное хроматическое число мультиграфа G).

В [1] доказано, что при $l \geqslant \Delta - 1$ имеет место соотношение

$$\chi_{k,l}(G) = \chi_{k,\infty}(G) = \max\{\Delta(G), k + \Delta^+(G), k + \Delta^-(G)\},$$

где $\Delta^+(G)$ и $\Delta^-(G)$ — максимальные исходящая и входящая полустепени мультиграфа G (отметим, что второе равенство было ранее доказано для $k = 1$ в [8]). Также в [1] построен пример, показывающий, что при $l \leqslant \Delta - 2$ указанное равенство не имеет места. В [5] введено обозначение $\chi_{k,l}(\Delta)$ для минимального числа цветов, в которое можно (k, l)-раскрасить инциденторы любого мультиграфа максимальной степени Δ. Там же было доказано, что при $l \geqslant \lceil \Delta/2 \rceil$ выполняется

$$\chi_{k,l}(\Delta) = \chi_{k,\infty}(\Delta) = \Delta + k,$$

однако вопрос о точности данной оценки относительно l оставался открытым. В настоящей статье показано, что при $k = 1$ оценку на l можно улучшить, а именно, что указанное равенство имеет место при $k = 1$ и $l \geqslant \lceil \Delta/2 \rceil - 1$.

Отметим, что примеры мультиграфов, у которых $\chi_{k,l}(G) > \Delta(G) + k$, известны [5] лишь для $k = l = 1$ и нечётного Δ. Причём во всех построенных в [5] примерах мультиграфы не имеют совершенного паросочетания. В связи с этим авторы высказывают гипотезу, что $\chi_{1,1}(G) = \Delta(G) + 1$ для любого мультиграфа G нечётной степени с совершенным паросочетанием. Авторам удалось доказать эту гипотезу для призм. Отметим, что для чётных Δ известно [6], что $\chi_{1,1}(4) = 5$. Вопрос о значении $\chi_{1,1}(2t)$ при $t \geqslant 3$ остаётся открытым.

Работа организована следующим образом. В разд. 1 будет доказана формула

$$\chi_{1,\lceil \Delta/2\rceil-1}(\Delta) = \Delta + 1, \tag{1}$$

а в разд. 2 показано, что для любой ориентированной призмы G имеет место соотношение $\chi_{1,1}(G) = 4$.

1. $(1,l)$-Раскраска мультиграфов произвольной степени

Нам потребуется несколько определений и фактов из теории графов. Однородный подграф степени 2 в мультиграфе называется 2-*фактором*. *Линейным фактором* в ориентированном мультиграфе называется подграф, в котором входящая и исходящая полустепени каждой вершины не превосходят 1. Линейный фактор L *покрывает* множество вершин $A \subseteq V$, если степень любой вершины из A в L больше нуля. Говорим, что линейный фактор *минимальный*, если каждая его компонента является либо изолированной вершиной или дугой, либо ориентированным путём длины 2. Известны следующие результаты.

Теорема Петерсена [9]. *В любом однородном мультиграфе чётной степени есть 2-фактор.*

Теорема Визинга [2]. *В любом ориентированном мультиграфе существует минимальный линейный фактор, покрывающий все вершины степени Δ.*

Поскольку мультиграф, имеющий источник или сток степени Δ, требует не менее $\Delta + 1$ цветов, неравенство $\chi_{1,\lceil \Delta/2\rceil-1}(\Delta) \geqslant \Delta + 1$ очевидно. Докажем обратное нравенство. Отдельно рассмотрим случаи чётного и нечётного Δ.

Теорема 1. *Пусть G — ориентированный мультиграф максимальной степени $\Delta = 2t \geqslant 4$. Тогда $\chi_{1,t-1}(G) \leqslant 2t + 1$.*

Доказательство. Можно считать, что G — однородный мультиграф степени Δ. Применим индукцию по t. При $t = 2$ имеем $\chi_{1,1}(G) \leqslant 5$, что доказано в [6]. Пусть $t \geqslant 3$ и теорема верна для мультиграфов степени $2t - 2$. По теореме Петерсена [9] мультиграф G разбивается на 2-фактор F и мультиграф G' степени $2t - 2$. По индукции получаем $\chi_{1,t-2}(G') \leqslant 2t - 1$. Обозначим такую раскраску инциденторов через f' и построим раскраску f по правилу

$$f(i)=\begin{cases} f'(i), & \text{если } f'(i)\leqslant t-1,\\ f'(i)+1, & \text{если } f'(i)\in[t,2t-2],\\ 2t+1, & \text{если } f'(i)=2t-1.\end{cases}$$

Покажем, что имеет место

Свойство 1. 1) *Раскраска f является $(1,t-1)$-раскраской мультиграфа G', причём при каждой вершине свободны цвета t и $2t$.*

2) *Пусть I_1 и I_2 — некоторые подмножества инцидентов, имеющих в раскраске f цвета $t+1$ и $2t+1$ соответственно. Тогда после перекраски всех инцидентов из I_1 в цвет t, а всех инцидентов из I_2 в цвет $2t$ раскраска f останется $(1,t-1)$-раскраской мультиграфа G'.*

Доказательство. Действительно, нетрудно заметить, что при переходе от f' к f у каждой дуги либо цвета обоих инцидентов останутся неизменными, либо цвет конечного инцидента увеличится на 1, либо цвета обоих инцидентов увеличатся на 1, либо цвет начального инцидента увеличится на 1, а цвет конечного на 2. В любом из этих случаев $(1,t-2)$-раскраска f' преобразуется в $(1,t-1)$-раскраску f. Отсутствие при каждой вершине цветов t и $2t$ очевидно. Поскольку в раскраске f' дуга не может содержать одновременно инциденты цветов t и $2t-1$, каждая дуга содержит не более одного инцидента из $I_1\cup I_2$. Пусть $i\in I_1\cup I_2$. Обозначим через i' сопряжённый к i инцидент, и пусть $f(i')=a$. Если $f(i)=2t+1$, то $f'(i)=2t-1$, инцидент i конечный и $f'(i')\in[t+1,2t-2]$. Но тогда $a\in[t+2,2t-1]$, а значит, $2t-a\in[1,t-2]$. Пусть $f(i)=t+1$. Если i конечный, то при его перекраске в цвет t дуга получает ту же раскраску, что и в f', т. е. $t-a\in[1,t-2]$. Если же i является начальным, то $f'(i)=t$, $f'(i')\in[t+1,2t-2]$, а значит, $a\in[t+2,2t-1]$ и $a-t\in[2,t-1]$. Таким образом, при указанной перекраске инцидентов из $I_1\cup I_2$ раскраска остаётся $(1,t-1)$-раскраской мультиграфа G'. Свойство 1 доказано.

Для раскраски 2-фактора F представим его в виде объединения минимального линейного фактора L и паросочетания P. Сначала раскрасим линейный фактор L. Его компонентами являются изолированные дуги и пути длины 2. Пусть $e=xy$ — изолированная дуга в L. Перекрасим инцидент цвета $t+1$, примыкающий к y (если таковой имеется), в цвет t и положим $f(e)=(t,t{+}1)$. Пусть $e_1=xy$ и $e_2=yz$ образуют путь длины 2 в L. Если при вершинах x и z имеются инциденты цвета $t+1$, то перекрасим их в цвет t. Положим $f(e_1)=(t+1,2t)$, $f(e_2)=(t,t+1)$. Из свойства 1 следует, что f будет $(1,t-1)$-раскраской мультиграфа

$G' \cup L$. Более того, цвет $2t$ использован лишь при вершинах, имеющих в L степень 2, т. е. при каждой вершине, инцидентной дуге из P, цвет $2t$ остаётся свободным. Пусть $e = xy$ — дуга из паросочетания P. Перекрасим инцидентор цвета $2t+1$, примыкающий к y (если таковой имеется), в цвет $2t$ и положим $f(e) = (2t, 2t+1)$. Из свойства 1 следует, что построенная раскраска f является $(1, t-1)$-раскраской мультиграфа G в $2t+1$ цветов. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть G — ориентированный мультиграф максимальной степени $\Delta = 2t+1 \geqslant 5$. Тогда $\chi_{1,t}(G) \leqslant 2t+2$.*

Доказательство. По теореме Визинга [2] в G существует минимальный линейный фактор L, покрывающий все вершины степени Δ. Тогда мультиграф $G' = G \setminus L$ имеет максимальную степень $\Delta - 1 = 2t$ и из теоремы 1 получаем $\chi_{1,t-1}(G') \leqslant 2t+1$. Обозначим такую раскраску инциденторов через f' и построим раскраску f, перекрасив инциденторы цвета j в $j+1$ при $j \in [t+1, 2t+1]$. Как и в теореме 1, нетрудно убедиться в выполнении следующего свойства.

Свойство 2. 1) *Раскраска f является $(1,t)$-раскраской мультиграфа G', причём при каждой вершине свободен цвет $t+1$.*

2) *Пусть I — некоторое подмножество инциденторов, раскрашенных в f цветом $t+2$. Тогда после перекраски всех инциденторов из I в цвет $t+1$ раскраска f останется $(1,t)$-раскраской мультиграфа G'.*

Компонентами линейного фактора L являются изолированные дуги и пути длины 2. Пусть $e = xy$ — изолированная дуга в L. Перекрасим инцидентор цвета $t+2$, примыкающий к y (если таковой имеется), в цвет $t+1$ и положим $f(e) = (t+1, t+2)$. Пусть $e_1 = xy$ и $e_2 = yz$ образуют путь длины 2 в L. Тогда при вершине y свободны хотя бы три цвета, один из которых не совпадает ни с $t+1$, ни с $2t+2$. Обозначим его через a. Рассмотрим два случая.

а) Если $a \in [1, t]$, то перекрасим инцидентор цвета $t+2$, примыкающий к y (если таковой имеется), в цвет $t+1$ и положим

$$f(e_1) = (t+1, t+2), \quad f(e_2) = (a, t+1).$$

б) Если $a \in [t+2, 2t+1]$, то перекрасим инцидентор цвета $t+2$, примыкающий к z (если таковой имеется), в цвет $t+1$ и положим

$$f(e_1) = (t+1, a), \quad f(e_2) = (t+1, t+2).$$

Нетрудно проверить, что f будет $(1,t)$-раскраской мультиграфа G в $2t+2$ цветов. Теорема 2 доказана.

2. Раскраска призм

Призмой будем называть граф, состоящий из двух циклов одинаковой длины $C = v_1v_2\ldots v_kv_1$ и $C' = v'_1v'_2\ldots v'_kv'_1$ и *боковых рёбер* $v_iv'_i$ для $i = 1,2,\ldots,k$. Рёбра v_iv_{i+1} и $v'_iv'_{i+1}$ называются *параллельными*. *Блоком* назовём множество рёбер вида $\{v_iv_{i+1}, v'_iv'_{i+1}, v_iv'_i\}$, где $i = 1,2\ldots,k$ и $v_{k+1} = v_1$. В ориентированной призме будем различать три типа блоков. *Блоком 0-го типа* назовём блок, в котором параллельные рёбра имеют разное направление (т. е. v_iv_{i+1} и $v'_{i+1}v'_i$ или наоборот). Если обе параллельные дуги направлены от i-й вершины цикла к $(i+1)$-й, то имеем *блок 1-го типа*, а если от $(i+1)$-й вершины цикла к i-й, то *блок 2-го типа*.

Теорема 3. *Для любой ориентированной призмы G выполняется равенство $\chi_{1,1}(G) = 4$.*

Доказательство. Заметим, что меньше четырёх цветов для раскраски недостаточно, поскольку тогда любая из $3n/2$ дуг должна содержать инцидентор, раскрашенный цветом 2, а в графе есть не более n таких инциденторов. Покажем, что любая призма раскрашиваема в четыре цвета.

Случай 1. В призме нет блоков 1-го и 2-го типов.

В этом случае в цикле C дуги вида v_iv_{i+1} красим $(1,2)$, а дуги вида $v_{i+1}v_i$ красим $(3,4)$; в цикле C', наоборот, дуги вида $v'_iv'_{i+1}$ красим $(3,4)$, а дуги вида $v'_{i+1}v'_i$ красим $(1,2)$. Таким образом, в каждом блоке оба параллельных рёбра раскрашены либо $(1,2)$, либо $(3,4)$. Рассмотрим прозвольную боковую дугу. Можно считать, что она имеет вид uu'. Возможны следующие 4 варианта.

1) При u и u' использованы цвета 1 и 2. Тогда полагаем $f(uu') = (3,4)$.

2) При u и u' использованы цвета 3 и 4. Тогда красим $f(uu') = (1,2)$.

3) При u использованы цвета 1 и 3, а при u' — цвета 2 и 4. Тогда положим $f(uu') = (2,3)$.

4) При u использованы цвета 2 и 4, а при u' — цвета 1 и 3. Тогда раскрасим $f(uu') = (3,4)$.

Раскрасив все боковые дуги по этому правилу, получим (1,1)-раскраску инциденторов призмы в 4 цвета.

Случай 2. В призме есть блоки 1-го или 2-го типа.

Ключевую роль в доказательстве теоремы играет

Лемма 1. *Пусть блок призмы состоит из дуги uu' и каким-то образом ориентированных параллельных рёбер $e = uv$ и $e' = u'v'$. Предположим, что не входящие в этот блок инциденторы при вершинах u'*

и u раскрашены цветами x и y соответственно, причём 1°) ни x, ни y не равны 1; 2°) если один из цветов x или y равен 4, то второй равен 3. Тогда существует $(1,1)$-раскраска инцидентов блока, в которой цвета инцидентов (v, e) и (v', e') также удовлетворяют условиям 1° и 2°.

Доказательство. Рассмотрим все возможные варианты цветов x и y и ориентации рёбер e и e'. Они представлены на рис. 1.

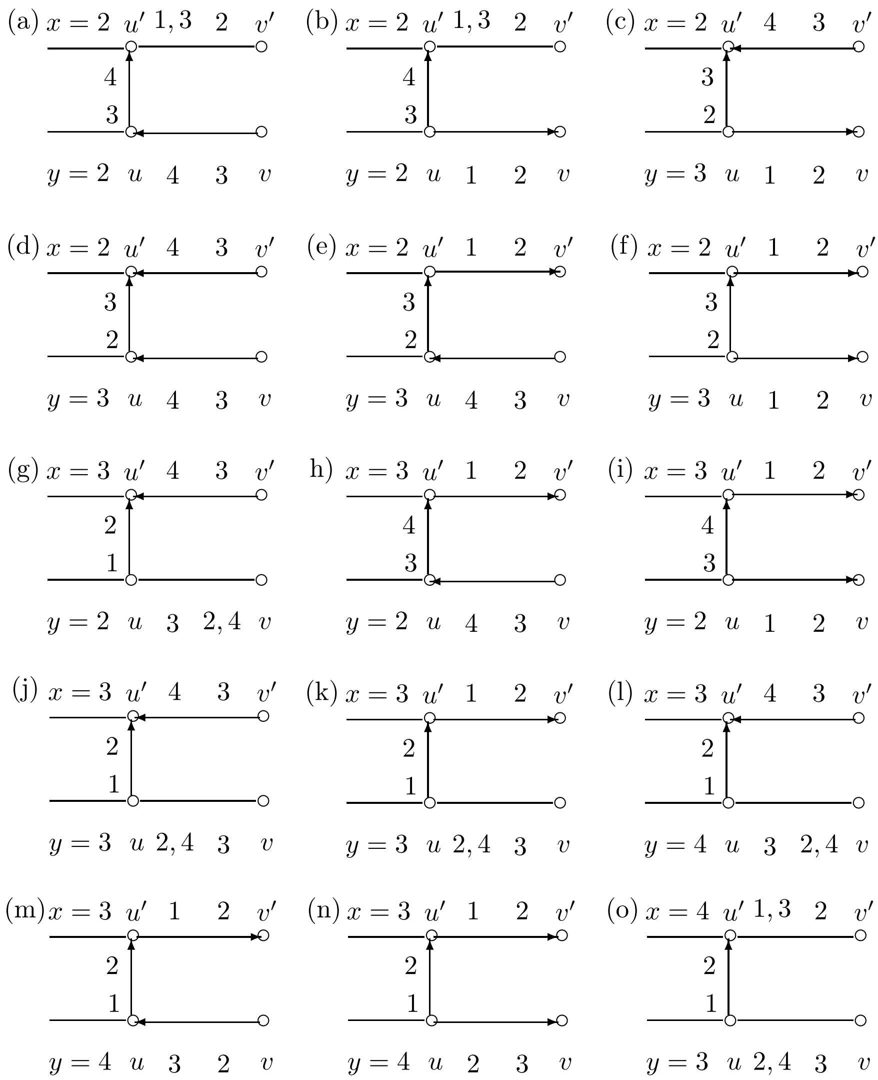

Рис. 1. Варианты раскраски блока в лемме 1

Пусть $x = y = 2$ (рис. 1(a),(b)). Положим $f(uu') = (3, 4)$. Если $e = uv$, красим $f(e) = (1, 2)$, иначе полагаем $f(e) = (3, 4)$. Инцидентор (v', e') красим цветом 2, а инцидентор (u', e') — цветом 1 или 3 в зависимости от направления дуги e'.

Пусть $x = 2,\ y = 3$ (рис. 1(c)–(f)). Положим $f(uu') = (2, 3)$. Если $e = uv$, красим $f(e) = (1, 2)$, иначе полагаем $f(e) = (3, 4)$. Дугу e' раскрашиваем по такому же правилу.

Пусть $x = 3,\ y = 2$ (рис. 1(g)–(i)). Если $e' = v'u'$, положим $f(e') = (3, 4),\ f(uu') = (1, 2),\ f(u, e) = 3$. Инцидентор (v, e) докрашивается цветом 2 или 4 в зависимости от направления дуги e. Если $e' = u'v'$, положим $f(e') = (1, 2),\ f(uu') = (3, 4)$. Если $e = uv$, красим $f(e) = (1, 2)$, иначе полагаем $f(e) = (3, 4)$.

Пусть $x = y = 3$ (рис. 1(j),(k)). Положим $f(uu') = (1, 2),\ f(v, e) = 3$. Инцидентор (u, e) красим цветом 2 или 4 в зависимости от направления дуги e. Если $e' = u'v'$, положим $f(e') = (1, 2)$, иначе — $f(e') = (3, 4)$.

Пусть $x = 3,\ y = 4$ (рис. 1(l)–(n)). Если $e' = v'u'$, положим $f(e') = (3, 4),\ f(uu') = (1, 2),\ f(u, e) = 3$ и докрасим инцидентор (v, e) цветом 2 или 4 в зависимости от направления дуги e. Если $e' = u'v'$, положим $f(e') = f(uu') = (1, 2),\ f(e) = (2, 3)$ независимо от направления дуги e.

Наконец, пусть $x = 4$, тогда $y = 3$ (рис. 1(o)). Красим $f(uu') = (1, 2)$, $f(v', e') = 2$, $f(v, e) = 3$. Инциденторы (u', e') и (u, e) докрашиваются цветами (1 или 3) и (2 или 4) соответственно в зависимости от направления дуг e' и e.

Нетрудно проверить, что во всех случаях раскраска правильна и цвета инциденторов (v, e) и (v', e') удовлетворяют условиям 1° и 2°. Лемма 1 доказана.

Призме G поставим в соответствие циклическое слово W длины k над алфавитом $\{0, 1, 2\}$, в котором i-я буква совпадает с типом i-го блока. Обозначим через W' циклическое слово, полученное из W вычеркиванием всех нулей.

Подслучай 2.1. В слове W' есть две одинаковые буквы, идущие подряд (ввиду цикличности слова последняя и первая буквы считаются идущими подряд; в частности, условие выполняется и для вырожденного слова $W' = 1$, когда все блоки, кроме одного, имеют 0-й тип).

Без ограничения общности W' содержит 11, т. е. в призме найдутся два блока 1-го типа, между которыми имеется некоторое (возможно, нулевое) число блоков 0-го типа. Пусть правый из блоков 1-го типа содержит параллельные дуги $v_i v_{i+1}$ и $v'_i v'_{i+1}$, а также боковую дугу $e = v_i v'_i$. Раскрасим $f(v_i v_{i+1}) = f(v'_i v'_{i+1}) = (1, 2)$. Продолжим эту раскраску вправо, используя лемму 1, пока не раскрасим весь граф за исключением дуги e (первое условие леммы 1 гарантирует, что раскраска будет правильной). Обозначим через e_0 и e_0' дуги, соединяющие вершины v_{i-1} с v_i и v_{i-1}' с v_i' соответственно. Если цвет инцидентора (v_i, e_0) чётный, то по второму условию леммы 1 цвет инцидентора (v_i', e_0') не равен 4 и можно раскрасить $f(e) = (3, 4)$. Если $f(v_i, e_0) = 3$ и цвет инцидентора (v_i', e_0') чётный, то красим $f(e) = (2, 3)$. Покажем, что вариант $f(v_i, e_0) = f(v_i', e_0') = 3$ невозможен в условиях подслучая 2.1.

Действительно, из доказательства леммы 1 вытекает, что оба инцидентора (v, e) и (v', e') раскрашиваемого блока получают цвет 3 лишь в случаях, изображённых на рис. 1(d),(j). В случае 1(d) раскрашиваемый блок имеет 2-й тип, что невозможно. Значит, имеет место случай 1(j), причём раскрашиваемый блок имеет 0-й тип. Однако условием возникновения случая 1(j) является $x = y = 3$, т. е. блок, идущий перед ним, также должен быть блоком 0-го типа, раскрашенным в соответствии с рис. 1(j). Но поскольку по условию подслучая 2.1 последовательность блоков 0-го типа должна закончиться блоком 1-го типа, получаем, что вариант $f(v_i, e_0) = f(v_i', e_0') = 3$ невозможен.

Назовём блок 0-го типа *хорошим*, если входящие в него дуги образуют ориентированный путь длины 3, и *плохим* — в противном случае.

Подслучай 2.2. В призме есть хороший блок 0-го типа.

Без ограничения общности можно считать, что первый блок ненулевого типа, встречающийся справа от хорошего блока, является блоком 1-го типа (иначе меняем ориентацию всех дуг графа, строим раскраску g получившегося графа в четыре цвета и полагаем $f(i) = 5 - g(i)$ для каждого инцидентора i исходного графа). Строим раскраску, начиная с этого блока 1-го типа, в точности так же, как и в подслучае 2.1. Заметим, что в случае, приведённом на рис. 1(j), раскрашиваемый блок является либо блоком 2-го типа, либо плохим блоком 0-го типа. Так как последовательность блоков 0-го типа слева от начального блока 1-го типа содержит хороший блок 0-го типа, вариант, когда оба инцидентора, примыкающих к концам неокрашенной боковой дуги начального блока, имеют цвет 3, также невозможен.

Подслучай 2.3. Призма имеет следующую структуру. В ней есть одинаковое (и ненулевое) число блоков 1-го и 2-го типов, которые чередуются при движении вдоль цикла и отделены друг от друга некоторым (возможно, нулевым) числом плохих блоков 0-го типа.

Построим раскраску в несколько шагов.

Шаг 1. Все параллельные дуги блоков 1-го типа красим $(1, 2)$.

Шаг 2. Красим (по лемме 1) плохие блоки 0-го типа, расположенные справа от блоков 1-го типа. Поскольку по условию шага 1 для первого из таких блоков имеет место соотношение $x = y = 2$, данный плохой блок 0-го типа раскрашивается в соответствии с рис. 1(b), а значит, оба инцидентора (v, e) и (v', e') также получают цвет 2. Тогда данное утверждение верно для всех последующих плохих блоков 0-го типа, т. е. они все раскрашены, как на рис. 1(b). Тем самым после выполнения шага 2 к каждому концу бокового ребра любого блока 2-го типа примыкают инциденторы, раскрашенные цветом 2.

Шаг 3. Красим все блоки 2-го типа в соответствии с рис. 1(a).

Шаг 4. Красим (по лемме 1) плохие блоки 0-го типа, расположенные справа от блоков 2-го типа. Поскольку первый из таких блоков удовлетворяет либо условию $x = 2$, $y = 3$, либо условию $y = 2$, $x = 3$, нетрудно убедиться, что все эти блоки будут раскрашены в соответствии с одним из вариантов, приведённых на рис. 1(c),(g),(l),(o). Таким образом, после выполнения шага 4 к одному из концов бокового ребра любого блока 1-го типа примыкает инцидентор, раскрашенный цветом 3, а к другому — раскрашенный чётным цветом.

Шаг 5. Раскрашиваем боковые рёбра блоков 1-го типа (как в подслучае 2.1). По условию шага 4 такая раскраска возможна.

Рассмотрением всех возможных подслучаев теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа в задачах раскраски инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 27–41.
2. **Визинг В. Г.** О линейных факторах мультиграфов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 4. С. 3–7.
3. **Визинг В. Г., Мельников Л. С., Пяткин А. В.** О (k, l)-раскраске инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 29–37.
4. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.
5. **Пяткин А. В.** Верхние и нижние оценки для инциденторного (k, l)-хроматического числа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, № 1. С. 93–102.
6. **Пяткин А. В.** Об $(1, 1)$-раскраске инциденторов мультиграфов степени 4 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, № 3. С. 59–62.

7. **Diestel R.** Graph theory. Heidelberg: Springer-Verl., 2016. (Grad. Texts Math.; Vol. 173).
8. **Mel'nikov L. S., Vizing V. G.** The edge-chromatic number of a directed/mixed multigraph // J. Graph Theory. 1999. V. 23, No. 4. P. 267–273.
9. **Petersen J.** Die Theorie der regulären Graphen // Acta Math. 1891. V. 15. P. 193–220.
10. **West D. B.** Introduction to graph theory. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.

Михаил Олегович Головачёв,
Артём Валерьевич Пяткин

Статья поступила
22 марта 2017 г.

Исправленный вариант —
10 апреля 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2017. Volume 24, No. 4. P. 34–46

UDC 519.174 DOI: 10.17377/daio.2017.24.572

ON $(1, l)$-COLORING OF INCIDENTORS OF MULTIGRAPHS

M. O. Golovachev[2,a] and *A. V. Pyatkin*[1,2,b]
[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
[2]Novosibirsk State University,
2 Pirogov St., 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: [a]mik-golovachev2@mail.ru, [b]artem@math.nsc.ru

Abstract. It is proved that if l is at least $\Delta/2 - 1$ then $(1, l)$-chromatic number of an arbitrary multigraph of maximum degree Δ is at most $\Delta + 1$. Moreover, it is proved that the incidentors of every directed prism can be colored in four colors so that every two adjacent incidentors are colored distinctly and the difference between the colors of the final and initial incidentors of each arc is 1. Illustr. 1, bibliogr. 10.

Keywords: incidentor coloring, $(1, l)$-coloring, prism.

REFERENCES

1. **V. G. Vizing,** A bipartite interpretation of a directed multigraph in problems of the coloring of incidentors, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **9**, No. 1, 27–41, 2002 [Russian].
2. **V. G. Vizing,** On linear factors of multigraphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **10**, No. 4, 3–7, 2003 [Russian].
3. **V. G. Vizing, L. S. Mel'nikov,** and **A. V. Pyatkin,** On the (k, l)-coloring of incidentors, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **7**, No. 4, 29–37, 2000 [Russian].
4. **A. V. Pyatkin,** Some optimization problems of scheduling the transmission of messages in a local communication network, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **2**, No. 4, 74–79, 1995 [Russian]. Translated in A. D. Korshunov, ed., *Operations Research and Discrete Analysis,* pp. 227–232, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997 (Math. Appl., Vol. 391).
5. **A. V. Pyatkin,** Upper and lower bounds for the incidentor (k, l)-chromatic number, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **11**, No. 1, 93–102, 2004 [Russian].
6. **A. V. Pyatkin,** On $(1, 1)$-coloring of incidentors of multigraphs of degree 4, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **11**, No. 3, 59–62, 2004 [Russian].

7. R. Diestel, *Graph Theory,* Springer, Heidelberg, 2017 (Grad. Texts Math., Vol. 173).

8. L. S. Mel'nikov and **V. G. Vizing,** The edge chromatic number of a directed/mixed multigraph, *J. Graph Theory,* **31**, No. 4, 267–273, 1999.

9. J. Petersen, The theory of regular graphs, *Acta Math.,* **15**, 193–220, 1891 [German].

10. D. B. West, *Introduction to Graph Theory,* Prentice Hall, Upper Saddle River, 2001.

Mikhail O. Golovachev,
Artem V. Pyatkin

Received
22 March 2017

Revised
10 April 2017