ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2017. Том 24, № 4. С. 47–59

УДК 519.8 DOI: 10.17377/daio.2017.24.573

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ В УСЛОВИЯХ РЫНКА *)

А. В. Еремеев[1,2]

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
[2]Омский гос. университет им. Ф. М. Достоевского,
пр. Мира, 55А, 644077 Омск, Россия
E-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации потокораспределения в электроэнергетической системе, возникающая при расчёте аукционов электроэнергии в условиях рынка «на сутки вперёд» и балансирующего рынка. Установлено, что поиск допустимого потокораспределения в условиях балансирующего рынка является NP-трудной в сильном смысле задачей даже в случае одного генератора. Показана NP-трудность поиска оптимального потокораспределения в условиях рынка «на сутки вперёд» даже при одном генераторе и при отсутствии контролируемых сечений. Библиогр. 10.

Ключевые слова: вычислительная сложность, электроэнергетическая система, рынок.

Введение

Работа посвящена анализу сложности задачи оптимизации режима электроэнергетической системы (ЭЭС), возникающей при расчёте аукциона оптового рынка электроэнергии в соответствии с моделью, предложенной в [6]. Детальное описание модели с небольшими вариациями приводится в [4, 5, 7]. Данная модель описывает распределённый аукцион электроэнергии и электрическую сеть с учётом закона Ома для переменного тока, а потому включает в себя ограничения, выраженные тригонометрическими функциями. В качестве упрощающих аппроксимаций данной модели в литературе рассматриваются линейные моде-

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 15–11–10009).

ли постоянного тока (DC-load flow model) (см., например, [10, приложения A и D], а также их модификации с кусочно-линейной аппроксимацией квадратичных потерь [9]). Для поиска оптимального решения в таких упрощённых моделях могут непосредственно применяться стандартные методы линейного программирования (ЛП). В то же время для поиска оптимального решения в рамках исходной модели разработаны итерационные методы [4], основанные на декомпозиции задачи и позволяющие комбинировать стандартные программы для расчёта режимов ЭЭС с коммерческими оптимизационными пакетами, решающими подзадачи ЛП в модели постоянного тока. Для поиска оптимального решения в рамках исходной модели также могут быть использованы методы, сочетающие наискорейший спуск с другими стандартными методами нелинейной оптимизации (см., например, [2, гл. 7]). При некоторых дополнительных предположениях, требующих среди прочего неотрицательных узловых цен на электроэнергию, в [4, 8] получены достаточные условия, гарантирующие глобальную оптимальность локальных оптимумов. Однако [8] при возникновении отрицательных узловых цен данное свойство может нарушаться, и в общем случае отыскание глобального оптимума рассматриваемой задачи является открытой проблемой. Как показано в настоящей работе, поиск оптимального режима ЭЭС в общем случае является NP-трудной задачей, и это же относится к поиску приближённых решений с гарантированной относительной оценкой точности. Результаты получены за счёт активного использования нижней границы на объём генерации, что также является необходимым условием для возникновения отрицательной узловой цены.

Разд. 1 содержит постановку задачи оптимизации режима ЭЭС и её формулировку в терминах математического программирования. В разд. 2 приводятся доказательства труднорешаемости различных частных случаев задачи. Разд. 3 содержит заключительные замечания.

1. Постановка задачи оптимизации потокораспределения в электроэнергетической системе в условиях рынка

Приведём описание постановки задачи оптимизации потокораспределения в ЭЭС, возникающей при расчёте аукциона на оптовом рынке электроэнергии [6]. В описании модели, как правило, будем пользоваться системой обозначений из модели конкурентного оптового рынка электроэнергии «на сутки вперёд» [4].

Входные данные задачи включают в себя информацию об электроэнергетической сети, о генераторах и потребителях электроэнергии, це-

новые заявки на покупку и продажу электроэнергии в узлах сети, поданные участниками аукциона на некоторый период планирования (час), в течение которого режим функционирования системы не меняется.

Информация об электрической сети задана взвешенным ориентированным графом с множеством узлов N и множеством дуг A. Каждая дуга представляет собой ветвь электрической сети, т. е. линию электропередач (ЛЭП) или трансформатор. Множество узлов, непосредственно связанных линиями с узлом i, обозначим через $N(i)$. Для каждой ветви указаны следующие параметры: r_{ij} — активное сопротивление ветви; x_{ij} — реактивное сопротивление ветви; B_{ij} — шунтирующая ёмкостная проводимость ветви; t_{ij} — коэффициент трансформации, если ветвь (i,j) — трансформатор, в противном случае $t_{ij} = 1$; α_{ij} — фазосдвигающий коэффициент, если ветвь (i,j) — трансформатор, в противном случае $\alpha_{ij} = 0$. При наличии дуги (i,j) имеется и дуга (j,i), причём $r_{ji} = r_{ij}$, $x_{ji} = x_{ij}$, $B_{ji}{=}B_{ji}$, $t_{ji} = 1/t_{ij}$ и $\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$. Обратная дуга (j,i) относится к той же ЛЭП или трансформатору, что и прямая дуга (i,j). Параметры r_{ij}, x_{ij} эквивалентно могут представляться парой параметров G_{ij}, Ω_{ij}, где G_{ij} — активная проводимость ветви, Ω_{ij} — реактивная проводимость ветви (см., например, [1]) и имеют место равенства

$$G_{ij} = r_{ij}/\bigl(r_{ij}^2 + x_{ij}^2\bigr), \quad \Omega_{ij} = x_{ij}/\bigl(r_{ij}^2 + x_{ij}^2\bigr).$$

В каждом узле $i \in N$ заданы минимальное и максимальное предельно допустимые напряжения $V_i^{\min}$ и $V_i^{\max}$ (см. [6,7]). Кроме того, ЭЭС имеет некоторое (возможно, пустое) множество $\mathcal{S}$ контролируемых сечений, где под сечением понимается набор дуг орграфа, по которым ограничивается суммарный поток активной мощности. Для каждого контролируемого сечения $S \in \mathcal{S}$ заданы его пропускные способности: $p_S^{\min}$ — нижний предел пропускной способности сечения S и $p_S^{\max}$ — верхний предел пропускной способности сечения S. При подсчёте суммарной загрузки сечения поток мощности, идущий по ветви в обратном направлении, учитывается с обратным знаком.

К узлам сети подключены генераторы и потребители: $\mathbf{G}(i)$ — множество генераторов, подключенных к узлу $i \in N$; $\mathbf{C}(i)$ — множество потребителей, подключенных к узлу $i \in N$. Для каждого потребителя c задана планируемая к потреблению реактивная мощность Q_c^{prg} (см. [6]). Технические ограничения каждого генератора g представлены следующими параметрами: $P_g^{\min}$ — нижний предел регулирования, $P_g^{\max}$ — верхний предел регулирования, $Q_g^{\min}$ — нижний предел генерации реактивной мощности и $Q_g^{\max}$ — верхний предел генерации реактивной мощности.

На практике, при проведении аукционов электроэнергии рынка «на сутки вперёд» и балансирующего рынка, задачи оптимизации потокораспределения в ЭЭС решаются на несколько последовательных часов одновременно и при этом учитываются также нижний и верхний пределы изменения нагрузки при переходе от часа к часу [5]. В настоящей работе для простоты обозначений рассматривается только один час работы ЭЭС, поэтому пределы изменения нагрузки не учитываются.

1.1. Рынок «на сутки вперёд». Предполагается, что рынок «на сутки вперёд» организован в форме аукциона ценовых заявок продавцов и покупателей [4,5]. Аукцион проводится ежедневно и одновременно для каждого часа следующих суток. На рынке «на сутки вперёд» происходят торги только активной мощностью электроэнергии. Участник, желающий продать электроэнергию в некотором узле, обязан представить соответствующую ценовую заявку на продажу электроэнергии от генератора в этом узле. Заявка содержит информацию о ценах предложения электроэнергии, соответствующих определённым объёмам производства электроэнергии в течение одного часа указанных торговых суток. Покупатель электроэнергии представляет заявки на покупку электроэнергии в каждый час операционных суток в заданном узле сети. Заявка покупателя содержит информацию о ценах спроса, соответствующих определённым объёмам потребления электроэнергии.

Обозначим через $\mathbf{C}$ множество всех покупателей, а через $\mathbf{G}$ — множество всех продавцов электроэнергии. Пусть в заявке от каждого $g \in \mathbf{G}$ заданы суммарный объём активной мощности P_g^{bid} и K пар $\big(C_g^k, P_g^{\text{bid}}(k)\big)$, $k = 1, \dots, K$, каждая из которых описывает k-ю ценовую компоненту и часть объёма активной мощности заявки, причём $C_g^1 \leqslant C_g^2 \leqslant \dots \leqslant C_g^K$. Для каждого покупателя $c \in \mathbf{C}$ заданы суммарный объём активной мощности P_c^{bid} в его заявке и K пар $\big(C_c^k, P_c^{\text{bid}}(k)\big)$, $k = 1, \dots, K$, каждая из которых описывает k-ю ценовую компоненту и часть объёма активной мощности заявки, причём $C_c^1 \geqslant C_c^2 \geqslant \dots \geqslant C_c^K$.

Для записи модели аукциона оптового рынка электроэнергии введём следующие переменные. Обозначим через p_{ij} поток активной мощности, выходящий из узла i по линии (i, j), а через q_{ij} — поток реактивной мощности, выходящий из узла i по линии (i, j) (о физическом смысле реактивной мощности см., например, в [1]). Отрицательные значения p_{ij}, q_{ij} означают, что в действительности соответствующий поток мощности втекает в узел i из узла j. Далее, пусть V_i — амплитуда напряжения в узле i, а d_i — угол фазы напряжения в узле i. Обозначим через P_g активную мощность, а через Q_g — реактивную мощность, вырабатывае-

мую генератором g. Переменная P_c — активная мощность, потребляемая потребителем c. Далее, P_g^k — проданный на рынке объём активной мощности из k-й части заявки генератора g, P_c^k — купленный на рынке объём активной мощности из k-й части заявки потребителя c.

Задача оптимизации потокораспределения для рынка «на сутки вперёд» имеет следующую постановку в терминах математического программирования. Требуется выбрать такие объёмы генерации и потребления, потоки мощности по ветвям сети, а также узловые напряжения и углы фаз, при которых достигается максимум функции благосостояния

$$\sum_{c\in\mathbf{C}}\sum_{k=1}^{K} C_c^k P_c^k - \sum_{g\in\mathbf{G}}\sum_{k=1}^{K} C_g^k P_g^k \to \max \tag{1}$$

при ограничениях

$$0 \leqslant P_c^k \leqslant P_c^{\mathrm{bid}}(k), \quad c\in\mathbf{C},\ k=1,\dots,K, \tag{2}$$

$$0 \leqslant P_g^k \leqslant P_g^{\mathrm{bid}}(k), \quad g\in\mathbf{G},\ k=1,\dots,K, \tag{3}$$

$$P_c = \sum_{k=1}^{K} P_c^k, \quad c\in\mathbf{C}, \tag{4}$$

$$P_g = \sum_{k=1}^{K} P_g^k, \quad g\in\mathbf{G}, \tag{5}$$

$$\sum_{(i,j)\in S} p_{ij} \leqslant p_S^{\max}, \quad S\in\mathcal{S}, \tag{6}$$

$$\sum_{(i,j)\in S} p_{ji} \leqslant p_S^{\min}, \quad S\in\mathcal{S}, \tag{7}$$

$$P_g^{\min} \leqslant P_g \leqslant P_g^{\max}, \quad g\in\mathbf{G}, \tag{8}$$

$$Q_g^{\min} \leqslant Q_g \leqslant Q_g^{\max}, \quad g\in\mathbf{G}, \tag{9}$$

$$V_i^{\min} \leqslant V_i \leqslant V_i^{\max}, \quad g\in\mathbf{G}, \tag{10}$$

$$\sum_{g\in\mathbf{G}(i)} P_g - \sum_{c\in\mathbf{C}(i)} P_c - \sum_{j\in N(i)} p_{ij} = 0, \quad i\in N, \tag{11}$$

$$\sum_{g\in\mathbf{G}(i)} Q_g - \sum_{c\in\mathbf{C}(i)} Q_c^{\mathrm{prg}} - \sum_{j\in N(i)} q_{ij} = 0, \quad i\in N, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} p_{ij} = G_{ij}\left[(V_i)^2 - \frac{V_iV_j}{t_{ij}}\cos(d_i-d_j+\alpha_{ij})\right] \\ + \frac{\Omega_{ij}V_iV_j}{t_{ij}}\sin(d_i-d_j+\alpha_{ij}), \quad (i,j)\in A, \end{aligned} \tag{13}$$

$$q_{ij} = \Omega_{ij}\left[(V_i)^2 - \frac{V_iV_j}{t_{ij}}\cos(d_i - d_j + \alpha_{ij})\right] \\ - \frac{G_{ij}V_iV_j}{t_{ij}}\sin(d_i - d_j + \alpha_{ij}) - B_{ij}(V_i)^2, \quad (i,j) \in A. \tag{14}$$

Неравенства (2)–(5) связывают объёмы генерации и потребления с параметрами заявок участников аукциона (см., например, [4]). Ограничения (6) и (7) задают предельно допустимые потоки активной мощности по контролируемым сечениям в прямом и обратном направлениях соответственно. Условия (8) накладывают нижние и верхние ограничения на производство активной мощности каждым из генераторов. Аналогичные ограничения по реактивной мощности задаются неравенствами (9). Неравенства (10) ограничивают узловые напряжения. Условия (11) и (12) задают балансовые ограничения по активной и реактивной мощности для каждого узла сети соответственно. Равенства (13) и (14) задают зависимость потоков мощности по ветвям сети от напряжений и углов фаз в узлах.

1.2. Балансирующий рынок. На балансирующий рынок, в отличие от рынка «на сутки вперёд», ценовые заявки подают только генераторы [5]. При этом объёмы потребления полагаются равными некоторым прогнозным значениям P_c^{prg}. Такая модификация задачи имеет модель математического программирования, аналогичную модели рынка «на сутки вперёд» с тем отличием, что целевая функция имеет вид

$$\sum_{g\in\mathbf{G}}\sum_{k=1}^{K} C_g^k P_g^k \to \min, \tag{15}$$

а ограничения (2) и (4) заменяются условиями $P_c = P_c^{\mathrm{prg}}$, $c \in \mathbf{C}$.

2. Сложность задачи оптимизации потокораспределения в электроэнергетической системе

Рассмотрим случай, когда в системе отсутствуют трансформаторы. Следующая лемма позволяет перейти от уравнений (13) и (14) к более компактной комплексной записи уравнений установившегося режима (см., например, [2, § 6.1]). Определим комплексное напряжение в узле $i \in N$, как $U_i' + \boldsymbol{j}U_i''$, где $\boldsymbol{j}$ — мнимая единица,

$$U_i' = V_i\cos(d_i), \quad U_i'' = V_i\sin(d_i).$$

Лемма 1. *Пусть ветвь* $(i,j) \in A$ *имеет шунтирующую ёмкостную проводимость* $B_{ij} = 0$, *трансформатор отсутствует, т. е.* $t_{ij} = 1$, $\alpha_{ij} = 0$, *и выполнены уравнения* (13) *и* (14). *Тогда разница комплексных напряжений на концах ветви равна*

$$U_i' + \boldsymbol{j}U_i'' - (U_j' + \boldsymbol{j}U_j'') = \frac{(r_{ij} + \boldsymbol{j}x_{ij})(p_{ij} - \boldsymbol{j}q_{ij})}{U_i' - \boldsymbol{j}U_i''}. \tag{16}$$

Доказательство заключается в непосредственной проверке равенства (16) с использованием соотношений (13), (14), $G_{ij} = r_{ij}/\big(r_{ij}^2 + x_{ij}^2\big)$ и $\Omega_{ij} = x_{ij}/\big(r_{ij}^2 + x_{ij}^2\big)$. Лемма 1 доказана.

Для анализа сложности задачи оптимизации потокораспределения в ЭЭС рассмотрим частный случай одного генератора с однокомпонентными ценовыми заявками от генератора и от потребителей, т. е. случай $|\mathbf{G}| = 1$, $K = 1$. С целью упрощения обозначений индексы, отвечающие за номер компоненты ценовой заявки, далее будут опускаться.

Пусть $N = \{0, \ldots, n\}$, генератор g_0 находится в узле 0, а потребители $c_1, \ldots, c_n$ находятся в узлах $1, \ldots, n$, т. е. $\mathbf{G}(0) = \{g_0\}$, $\mathbf{C}(0) = \varnothing$, $\mathbf{G}(i) = \varnothing$, $\mathbf{C}(i) = \{c_i\}$, $i = 1, \ldots, n$. Генераторный узел непосредственно соединён ЛЭП с каждым из узлов потребителей.

Потребитель узла $i = 1, \ldots, n$ получает активную мощность $P_{c_i} \geqslant 0$ и реактивную мощность $Q_{c_i}^{\text{prg}}$. При этом для каждого $i = 1, \ldots, n$ верхний предел потребляемой активной мощности определяется величиной $P_{c_i}^{\text{bid}}$, а реактивная мощность $Q_{c_i}^{\text{prg}}$ фиксирована.

Не теряя общности, далее будем предполагать, что в генерирующем узле 0 фаза равна нулю, т. е. $U_0'' = 0$. Применение леммы 1 к ветви $(i, 0)$, $i = 1, \ldots, n$, даёт

$$U_i' + \boldsymbol{j}U_i'' - U_0' = \frac{(r_{i0} + \boldsymbol{j}x_{i0})\big(-P_{c_i} + \boldsymbol{j}Q_{c_i}^{\text{prg}}\big)}{U_i' - \boldsymbol{j}U_i''}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

так как $p_{i0} = -P_{c_i}$, $q_{i0} = -Q_{c_i}^{\text{prg}}$. Аналогичным образом, используя уравнения баланса (11) и (12) в узле 0, получаем

$$P_{g_0} - \boldsymbol{j}Q_{g_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{U_0'(U_0' - U_i' - \boldsymbol{j}U_i'')}{r_{0i} + \boldsymbol{j}x_{0i}}. \tag{18}$$

Утверждение 1. *Поиск допустимого решения задачи оптимизации потокораспределения в условиях балансирующего рынка в случае одного генератора является* NP-*трудной в сильном смысле задачей.*

Доказательство. Построим полиномиальную сводимость от NP-полной в сильном смысле задачи НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО (см., например, [3]): дан граф $G = (V, E)$ и целое число L; требуется установить, существует ли такое подмножество $I \subseteq V$, любые две вершины из которого несмежны в G и $|I| \geqslant L$.

По данному графу G строим индивидуальную задачу оптимизации потокораспределения в ЭЭС с одним генератором и $n = |V|$ потребителями, где

$$V_0^{\min} = V_0^{\max} = 1, \quad P_{g_0}^{\min} = 6n + L, \quad P_{g_0}^{\text{bid}} = P_{g_0}^{\max} = 7n,$$
$$r_{0i} = x_{0i} = \frac{1}{34}, \quad P_{c_i}^{\text{prg}} = 2, \quad Q_{c_i}^{\text{prg}} = 6, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Кроме того, определяем $|E|$ контролируемых сечений, сопоставляя каждому ребру $e = \{v_i, v_k\} \in E$ контролируемое сечение из двух линий $S_e = \{(0, i), (0, k)\}$ с пропускной способностью $p_{S_e}^{\max} = 13$. Ценовые компоненты заявок могут быть выбраны произвольно.

Построенная индивидуальная задача соответствует гипотетической ситуации, когда активная мощность генератора ограничена снизу величиной $6n + L$, а набор контролируемых сечений отражает структуру заданного графа.

Заметим, что при указанных значениях параметров (17) представляет собой квадратное уравнение относительно U_i'. Из (17) следует, что для данной сети $U_i' = \frac{8+y_i}{17}$, где $y_i \in \{0, 1\}$, $U_i'' = \frac{2}{17}$, $i = 1, \ldots, n$. Кроме того, из (18) имеем $P_{g_0} = 6n + \sum\limits_{i=1}^{n}(1 - y_i)$. Однако ввиду условия $P_{g_0} \geqslant 6n + L$ задача оптимизации потокораспределения в ЭЭС имеет допустимое решение в том и только том случае, когда существует набор $(y_1, \ldots, y_n) \in \{0, 1\}^n$ такой, что $\sum\limits_{i=1}^{n}(1 - y_i) \geqslant L$, и для каждого $S_e \in \mathcal{S}$, $e = \{v_i, v_k\} \in E$, выполнено

$$p_{0i} + p_{0k} = 6 + (1 - y_i) + 6 + (1 - y_k) = 14 - y_i - y_k \leqslant 13. \tag{19}$$

Условие (19) следует из равенства (16), которое выполнено для каждой ветви $(0, j)$.

Таким образом, в графе G найдётся подмножество из не менее, чем L попарно не смежных вершин $I = \{v_i \mid y_i = 0\}$. Следовательно, ввиду того, что числовые параметры построенной задачи ограничены сверху величиной $O(n)$, задача получения допустимого решения является NP-трудной в сильном смысле. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Поиск допустимого решения задачи оптимизации потокораспределения в условиях балансирующего рынка в случае одного генератора даже при отсутствии контролируемых сечений является* NP-*трудной задачей.*

Доказательство. Построим полиномиальную сводимость от NP-полной задачи РАЗБИЕНИЕ [3]: дан набор натуральных чисел $a_1, \ldots, a_m$; требуется установить, существует ли в нём такое подмножество J, что $\sum\limits_{i \in J} a_i = \frac{B}{2}$, где $B = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$.

По данному набору $a_1, \ldots, a_m$ эффективно строится индивидуальная задача оптимизации потокораспределения в ЭЭС с одним генератором и $n = m$ потребителями, где

$$V_0^{\min} = V_0^{\max} = 1, \quad P_{g_0}^{\min} = P_{g_0}^{\text{bid}} = P_{g_0}^{\max} = \frac{13}{2} B,$$

$$r_{0i} = x_{0i} = \frac{1}{34 a_i}, \quad P_{c_i}^{\text{prg}} = 2a_i, \quad Q_{c_i}^{\text{prg}} = 6a_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ценовые компоненты определяем произвольным образом.

Из (17) следует, что для данной сети $U_i' = \frac{8+y_i}{17}$, где $y_i \in \{0,1\}$, $U_i'' = \frac{2}{17}$, $i = 1, \ldots, n$, а из (18) имеем $P_{g_0} = 7B - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_i$. С учетом заданных пределов $P_{g_0}^{\min}$, $P_{g_0}^{\max}$ получаем $P_{g_0} = 7B - \frac{B}{2}$, поэтому задача оптимизации потокораспределения в ЭЭС имеет допустимое решение, если и только если искомое подмножество J существует. Значит, задача получения допустимого решения NP-трудна. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Задача оптимизации потокораспределения в условиях рынка «на сутки вперёд» в случае одного генератора даже при отсутствии контролируемых сечений является* NP-*трудной.*

Доказательство. Покажем, что NP-трудной будет задача верификации свойств «существует ли допустимое решение указанной задачи со значением функции благосостояния не менее L». Для этого модифицируем сводимость задачи РАЗБИЕНИЕ, описанную в утверждении 2, полагая $P_{g_0}^{\text{bid}} = P_{g_0}^{\max} = 7B$, $P_{c_i}^{\text{bid}} = 2a_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ценовые компоненты заявок полагаем равными единице: $C_{g_0} = 1$, $C_{c_i} = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Все прочие параметры сводимости выберем как в утверждении 2.

Из (17) следует, что если каждый потребитель получает максимально возможную для него мощность, т. е. $P_i = P_{c_i}^{\text{bid}} = 2a_i$, $i = 1, \ldots, n$, то для допустимого решения выполнены равенства $U_i' = \frac{8+y_i}{17}$, где $y_i \in \{0,1\}$, и $U_i'' = \frac{2}{17}$, $i = 1, \ldots, n$. Кроме того, из (18) имеем $P_{g_0} = 6B + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(1 - y_i)$.

Пусть существует такой набор индексов J, что $\sum\limits_{i\in J} a_i = \frac{B}{2}$. Тогда для каждого $i = 1, \dots, n$ положим $y_i = 0$, если $i \in J$, и $y_i = 1$, если $i \notin J$. В результате полученный набор напряжений определяет оптимальное решение задачи оптимизации потокораспределения. Действительно, данный набор напряжений достраивается до допустимого решения, причём первая сумма в критерии оптимизации максимальна и равна $2B$, а вторая сумма минимальна и равна $\frac{13B}{2}$. Оптимум целевой функции равен $-\frac{9B}{2}$.

С другой стороны, если оптимальное значение функции благосостояния меньше $L = -\frac{9B}{2}$, из этого следует, что не существует такого набора булевых переменных $y_1, \dots, y_n$, при которых $P_{g_0} = \frac{13B}{2}$ и $P_{c_i} = P_{c_i}^{\mathrm{bid}}$, $i = 1, \dots, n$, а значит, не существует и подмножества J, обеспечивающего равенство $\sum\limits_{i\in J} a_i = \frac{B}{2}$.

Таким образом, распознавание индивидуальных задач оптимизации потокораспределения, где существует допустимое решение со значением функции благосостояния не менее $-\frac{9B}{2}$, эквивалентно решению NP-полной задачи РАЗБИЕНИЕ. Утверждение 3 доказано.

Заметим, что если в сводимости из доказательства утверждения 3 положить $C_{g_0} = \frac{4}{13}$, то получим нуль в качестве оптимума целевой функции во всех случаях, когда искомое разбиение J существует. Таким образом, даже в случае $\mathcal{S} = \varnothing$ поиск приближённого решения с какой-либо гарантированной относительной погрешностью является NP-трудной задачей.

3. Заключение

Полученные результаты показывают, что рассмотренные варианты задачи оптимизации потокораспределения в электроэнергетической системе могут представлять существенную сложность комбинаторного характера. В таких случаях получение оптимального решения стандартными методами выпуклой оптимизации не может быть гарантировано. Тем не менее, задачи, возникающие на практике, значительно отличаются по структуре от построенных в результате сводимостей в данной работе. В связи с этим вопросы вычислительной сложности практически важных классов задач оптимизации потокораспределения в ЭЭС требуют дальнейшего исследования.

Автор благодарен А. А. Мельникову за полезные замечания к предварительному варианту статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Атабеков Г. И.** Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи. СПб: Лань, 2009. 592 с.

2. **Горнштейн В. М., Мирошниченко Б. П., Пономарев А. В. и др.** Методы оптимизации режимов энергосистем М.: Энергия, 1981. 336 с.
3. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
4. **Давидсон М. Р., Догадушкина Ю. В., Крейнес Е. М., Новикова Н. М., Удальцов Ю. А., Ширяева Л. В.** Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 3. С. 72–83.
5. **Давидсон М. Р., Догадушкина Ю. В., Крейнес Е. М., Новикова Н. М., Селезнев А. В., Удальцов Ю. А., Ширяева Л. В.** Математическая модель управления энергосистемой в условиях конкурентного оптового рынка электроэнергии и мощности в России // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 84–94.
6. **Caramanis M. C., Bohn R. E., Schweppe F. C.** Optimal spot pricing: Practice and theory, IEEE Trans. Power Appar. Syst. 1982. Vol. 101, No. 9. P. 3234–3245.
7. **Hogan W. W.** Contract networks for electric power transmission // J. Regul. Econ. 1992. Vol. 4, No. 3. P. 211–242.
8. **Palma-Benhke R., Philpott A., Jofré A., Cortés-Carmona M.** Modelling network constrained economic dispatch problems // Optim. Eng. 2013. Vol. 14, No. 3. P. 417–430.
9. **River M., Pérez-Arriaga I. J., Luengo G.** JUANAC: A model for computation of spot prices in interconnected power systems // Proc. 10th Power Syst. Comput. Conf. (Graz, Aug. 19–24, 1990). London: Butterworths, 1990. P. 254–261.
10. **Schweppe F. C., Caramanis M. C., Tabors R. D., Bohn R. E.** Spot pricing in electricity. Norwell, MA: Kluwer Acad. Publ., 1988. 355 p.

Еремеев Антон Валентинович

Статья поступила
28 марта 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2017. Volume 24, No. 4. P. 47–59

UDC 519.8 DOI: 10.17377/daio.2017.24.573

ON COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF THE ELECTRIC POWER FLOW OPTIMIZATION PROBLEM IN MARKET ENVIRONMENT

A. V. Eremeev[1,2]

[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
[2]Dostoevsky Omsk State University,
55A Mira Ave., 630077 Omsk, Russia
E-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru

Abstract. Under consideration is the electric power flow optimization problem for an electric power system which typically arises in calculation of electrical power auctions in the “day-ahead” and balancing markets. It was established that the problem of finding a feasible flow in the balancing market is NP-hard in the strong sense even in case of one generator. The problem of finding an optimal flow in the day-ahead market is proved to be NP-hard even with one generator and without controlled cuts. Bibliogr. 10.

Keywords: computational complexity, electric power system, market.

REFERENCES

1. **G. I. Atabekov,** *Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki: Lineinye elektricheskie tsepi* (Theoretical Foundations of Electrical Engineering: Linear Circuits), Lan’, St. Petersburg, 2009 [Russian].
2. **V. M. Gornshtein, D. S. Miroshnichenko,** and **A. V. Ponomarev,** *Metody optimizatsii rezhimov energosistem* (Methods for Optimization of Power System States) Energiya, Moscow, 1981 [Russian].
3. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness,* Freeman, San Francisco, 1979. Translated under the title *Vychislitel’nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi,* Mir, Moscow, 1982.
4. **M. R. Davidson, Yu. V. Dogadushkina, E. M. Kreines, N. M. Novikova, Yu. A. Udal’tsov,** and **L. V. Shiryaeva,** Mathematical model of the competitive wholesale power market in Russia, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Teor. Sist. Upravl.,* No. 3, 72–83, 2004 [Russian]. Translated in *J. Comput. Syst. Sci. Int.,* **43**, No. 3, 394–405, 2004.

5. **M. R. Davidson, Yu. V. Dogadushkina, E. M. Kreines, N. M. Novikova, A. V. Seleznev, Yu. A. Udal'tsov,** and **L. V. Shiryaeva,** Mathematical model of power system management in conditions of a competitive wholesale electric power (capacity) market in Russia, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Teor. Sist. Upravl.,* No. 2, 84–94, 2009. Translated in *J. Comput. Syst. Sci. Int.,* **48**, No. 2, 243–253, 2009.
6. **M. C. Caramanis, R. E. Bohn,** and **F. C. Schweppe,** Optimal spot pricing: Practice and theory, *IEEE Trans. Power Appar. Syst.,* **101**, No. 9, 3234–3245, 1982.
7. **W. W. Hogan,** Contract networks for electric power transmission, *J. Regul. Econ.,* **4**, No. 3, 211–242, 1992.
8. **R. Palma-Benhke, A. Philpott, A. Jofré,** and **M. Cortés-Carmona,** Modelling network constrained economic dispatch problems, *Optim. Eng.,* **14**, No. 3, 417–430, 2013.
9. **M. River, I. J. Pérez-Arriaga,** and **G. Luengo,** JUANAC: A model for computation of spot prices in interconnected power systems, in *Proc. 10th Power Syst. Comput. Conf., Graz, Austria, Aug. 19–24, 1990,* pp. 254–261, Butterworths, London, 1990.
10. **F. C. Schweppe, M. C. Caramanis, R. D. Tabors,** and **R. E. Bohn,** *Spot Pricing in Electricity,* Kluwer Acad. Publ., Norwell, MA, 1988.

Anton V. Eremeev

Received
28 March 2017