ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2018. Том 25, № 1. С. 5–24

УДК 519.16+514.172.45 DOI: 10.17377/daio.2018.25.570

О ГРАФЕ МНОГОГРАННИКА ПИРАМИДАЛЬНЫХ ЦИКЛОВ *)

В. А. Бондаренко[a], *А. В. Николаев*[b]
Ярославский гос. университет им. П. Г. Демидова,
ул. Советская, 14, 150003 Ярославль, Россия
E-mail: [a]bond@bond.edu.yar.ru, [b]andrei.v.nikolaev@gmail.com

Аннотация. Исследуются свойства полиэдрального графа многогранника пирамидальных циклов. Гамильтонов цикл называется *пирамидальным*, если коммивояжёр начинает путь в городе с номером 1, посещает некоторые города в порядке возрастания номеров, достигает города n и возвращается в исходный, проходя все оставшиеся города в порядке убывания номеров. Многогранник $\mathrm{PYR}(n)$ определяется как выпуклая оболочка характеристических векторов всех пирамидальных циклов в полном графе K_n. Объектом исследования выступает полиэдральный граф многогранника пирамидальных циклов, вершинами которого являются вершины многогранника, а рёбрами — геометрические рёбра, т. е. одномерные грани. Описано необходимое и достаточное условие смежности вершин многогранника $\mathrm{PYR}(n)$. На его основе разработан алгоритм проверки смежности с линейной трудоёмкостью. Установлено, что диаметр полиэдрального графа $\mathrm{PYR}(n)$ равен 2. Найдено асимптотически точное значение $\Theta(n^2)$ плотности, или кликового числа, полиэдрального графа многогранника пирамидальных циклов. Известно, что данная величина характеризует временную сложность задачи в классе алгоритмов прямого типа, основанных на линейных сравнениях. Ил. 4, библиогр. 23.

Ключевые слова: пирамидальный цикл, полиэдральный граф, необходимое и достаточное условие смежности, плотность графа, диаметр графа.

Введение

Рассматривается классическая постановка симметричной задачи коммивояжёра: задан полный взвешенный неориентированный граф K_n, найти гамильтонов цикл минимального веса. Обозначим через E множество

---

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке инициативной НИР ВИП–004 АААА–А16–116070610022–6.

© 2018 В. А. Бондаренко, А. В. Николаев

рёбер полного графа K_n, а через HC_n — множество всех гамильтоновых циклов в K_n. Каждому гамильтонову циклу $x \in HC_n$ сопоставим характеристический вектор $x^v \in \mathbb{R}^E$ по следующему правилу:

$$x_e^v = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } e \in E \text{ входит в цикл } x, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Многогранник

$$\mathrm{TSP}(n) = \mathrm{conv}\{x^v \mid x \in HC_n\}$$

называется *многогранником симметричной задачи коммивояжёра.*

Частичное описание многогранника задачи коммивояжёра используется в алгоритмах, основанных на методах целочисленного линейного программирования, с помощью которых были получены основные рекордные точные результаты для задач коммивояжёра большой размерности. В том числе классический результат Данцига, Фалкерсона и Джонсона для 49 городов США [12] и оптимальный маршрут для самой большой задачи pla85900 из библиотеки TSPLIB на 85900 городах, возникающей при проектировании интегральных схем (VLSI) и поставленной Джонсоном во время работы в AT&T Labs [7].

Объектом исследования в данной статье служит полиэдральный граф задачи, вершинами которого являются вершины многогранника (характеристические векторы x^v для задачи коммивояжёра), а рёбрами — геометрические рёбра, т. е. одномерные грани. Изучению свойств полиэдрального графа задачи коммивояжёра посвящено большое число работ. Это обусловлено как прикладной важностью задачи, так и значительной сложностью ассоциированного многогранника. В частности, классический результат Пападимитриу говорит о том, что даже описание графа многогранника $\mathrm{TSP}(n)$ является непростой задачей.

Теорема 1 [19]**.** *Задача распознавания несмежности вершин многогранника* $\mathrm{TSP}(n)$ *является NP-полной.*

Несмотря на этот факт, были установлены некоторые свойства полиэдрального графа многогранника задачи коммивояжёра. В частности, исследовались следующие две характеристики: диаметр графа $d(G)$ — наибольшая длина кратчайшего пути между всеми парами вершин графа G, а также плотность графа, или кликовое число, $\omega(G)$ — число вершин в наибольшей клике графа G.

Исследование диаметра полиэдрального графа мотивировано тем, что данная величина является нижней оценкой на число невырожденных шагов симплекс-метода, а также известной гипотезой Хирша. Грётчел и Падберг на основе полного описания многогранников коммивояжёра небольшой размерности ($n \leqslant 9$) и того факта, что для асимметричной задачи диаметр полиэдрального графа равен 2 [18], высказали следующее предположение.

Гипотеза 1 [17]**.** *Для любого* $n \geqslant 5$

$$d(\mathrm{TSP}(n)) = 2.$$

Гипотеза остаётся открытой. Ряд работ был направлен на построение последовательно улучшающихся верхних оценок [20–22] и исследование полиэдральных графов граней многогранника коммивояжёра [22,23]. Лучшая на данный момент оценка сверху равна 4 [20]. Диаметр обобщения многогранника задачи коммивояжёра — многогранника k-циклов, т. е. выпуклой оболочки характеристических векторов циклов на k вершинах в полном графе K_n, — рассматривался в работе [16].

Плотность полиэдрального графа служит нижней оценкой вычислительной сложности в классе так называемых алгоритмов прямого типа, основанных на линейных сравнениях. Более того, выяснилось, что эта характеристика полиномиальна для известных полиномиально разрешимых задач и сверхполиномиальна для труднорешаемых (см., например, [4,5,8]). Так, для многогранника симметричной задачи коммивояжёра известна сверхполиномиальная по размерности пространства нижняя оценка на плотность полиэдрального графа.

Теорема 2 [3]**.** *Плотность полиэдрального графа многогранника симметричной задачи коммивояжёра сверхполиномиальна по параметру* n:

$$\omega(\mathrm{TSP}(n)) \geqslant 2^{(\sqrt{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 9)/2}.$$

Огромное число работ посвящено изучению полиномиально разрешимых частных случаев задачи коммивояжёра (см., например, обзоры [11, 15]). Значительный класс подобных задач связан с пирамидальными маршрутами коммивояжёра. Гамильтонов цикл

$$\phi = \langle 1, i_1, i_2, \ldots i_r, n, j_1, j_2, \ldots j_{n-r-2} \rangle$$

называется *пирамидальным*, если

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_r \quad \text{и} \quad j_1 > j_2 > \cdots > j_{n-r-2}.$$

Другими словами, коммивояжёр начинает путь в городе с номером 1, посещает некоторые города в порядке возрастания номеров, достигает города n и возвращается в исходный, проходя все оставшиеся города в порядке убывания номеров. Пирамидальные циклы обладают двумя замечательными свойствами. Во-первых, пирамидальный цикл минимальной длины может быть найден с помощью динамического программирования за время $O(n^2)$ при том, что общее число допустимых пирамидальных циклов экспоненциально по n [6, 15]. Во-вторых, известны простые и достаточно естественные ограничения для матрицы расстояний, которые гарантируют существование маршрута коммивояжёра минимальной длины, являющегося пирамидальным.

Впервые ограничения на матрицу расстояний, связанные с полиномиально разрешимыми пирамидальными случаями задачи коммивояжёра, исследовались в работе В. С. Айзенштата и Д. Н. Кравчука [1], где рассматривался некоторый частный случай массива Монжа. Гилмор, Лоулер и Шмойс обобщили этот результат для массива Монжа произвольного вида [15]. Впоследствии были описаны различные классы матриц расстояний с аналогичными свойствами, в том числе: матрицы Ван дер Вина, матрицы Демиденко, матрицы Кальмансона, матрицы Супника и многие другие [11, 15]. Полная классификация ограничений на матрицу расстояний по четырём точкам, когда ограничение накладывается на расстояния между любыми четырьмя городами, порождающих полиномиально разрешимые частные случаи задачи коммивояжёра приведена в работе [13].

Однако полиэдральные характеристики пирамидальных циклов и их связь с общей задачей коммивояжёра никогда прежде не выступали объектом непосредственного изучения.

Результаты работы были представлены на XVII Байкальской международной школе-семинаре «Методы оптимизации и их приложения» (с. Максимиха, Бурятия, 31 июля — 6 августа 2017 г.) [9] и Европейской конференции по комбинаторике, теории графов и приложениям (Eurocomb 2017, Вена, Австрия, 28 августа — 1 сентября 2017 г.) [10].

1. Многогранник пирамидальных циклов

Рассмотрим полный взвешенный неориентированный граф K_n с множеством рёбер E. Обозначим через PT_n множество всех пирамидальных гамильтоновых циклов в K_n. Каждому пирамидальному гамильтонову циклу $x \in PT_n$ сопоставим характеристический вектор $x^v \in \mathbb{R}^E$ по следующему правилу:

$$x_e^v = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } e \in E \text{ входит в цикл } x, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Многогранник
$$\mathrm{PYR}(n) = \mathrm{conv}\{x^v \mid x \in PT_n\}$$
называется *многогранником пирамидальных циклов.*

Будем использовать специальную кодировку для представления пирамидальных циклов. Для этого каждому пирамидальному циклу $x \in PT_n$ сопоставим 0/1-вектор $x^c \in \mathbb{R}^{n-3}$ по следующему правилу:

$$\forall i \ (3 \leqslant i \leqslant n-1)$$
$$x_i^c = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } i \text{ входит в пирамидальный цикл } x \\ & \text{по направлению возрастания,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим, что в силу симметричной постановки задачи коммивояжёра все циклы являются неориентированными. Таким образом, направления «возрастания вершин» и «убывания вершин» в пирамидальном маршруте являются вопросом договорённости. Будем считать направлением по возрастанию то, которое содержит ребро $(1, 2)$. Нумерацию координат в векторе x^c будем начинать с 3, так как это первая потенциальная развилка на пирамидальном маршруте. Поэтому общее число пирамидальных циклов в графе K_n (вершин многогранника $\mathrm{PYR}(n)$) составляет 2^{n-3}. Пример пирамидального цикла и соответствующей ему кодировки приведён на рис. 1.

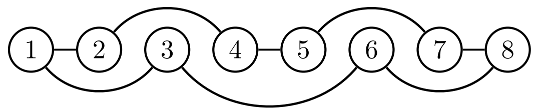

Рис. 1. Пример пирамидального цикла $\langle 0, 1, 1, 0, 1 \rangle$

2. Граф многогранника пирамидальных циклов

Лемма 1. *Для того чтобы две вершины x^v и y^v многогранника пирамидальных циклов $\mathrm{PYR}(n)$ были несмежны, необходимо и достаточно, чтобы из рёбер соответствующих пирамидальных циклов x и y можно было составить новый пирамидальный цикл.*

Доказательство. Необходимость непосредственно вытекает из предположения о несмежности вершин x^v и y^v. Действительно, несмежность x^v и y^v означает, что соединяющий их отрезок содержит некоторую выпуклую комбинацию остальных вершин многогранника $\mathrm{PYR}(n)$:

$$\alpha x^v + \beta y^v = \sum \gamma_z z^v,$$
$$\alpha + \beta = \sum \gamma_z = 1,$$
$$\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \gamma_z \geqslant 0.$$

В этой выпуклой комбинации хотя бы одна точка z^v имеет положительный коэффициент γ_z. Отсюда и из того, что все вершины многогранника $\mathrm{PYR}(n)$ булевы, вытекает, что пирамидальный цикл z, соответствующий вершине z^v, составлен из рёбер циклов x и y.

Достаточность. Предположим, что из рёбер циклов x и y можно составить новый пирамидальный цикл z. Рассмотрим мультиграф $G = x \cup y$, причём рёбра, принадлежащие одновременно x и y, входят в граф G в двух экземплярах. Тогда степень каждой вершины графа G равна четырём. Пусть $w = G \backslash z$. Покажем, что w также является пирамидальным циклом. По построению степень каждой вершины w равна 2. Таким образом, w состоит из одного или нескольких циклов. При этом для любого k $(1 < k < n)$ среди двух оставшихся рёбер, инцидентных вершине k, одно имеет вид (i, k), где $i < k$, а другое — (k, j), где $k < j$. Если w состоит из более чем одного цикла, то найдётся цикл, не содержащий вершины n. Пусть k — вершина с максимальным номером в этом цикле. Тогда обе вершины, смежные с k в графе w, имеют меньшие номера; противоречие. Лемма 1 доказана.

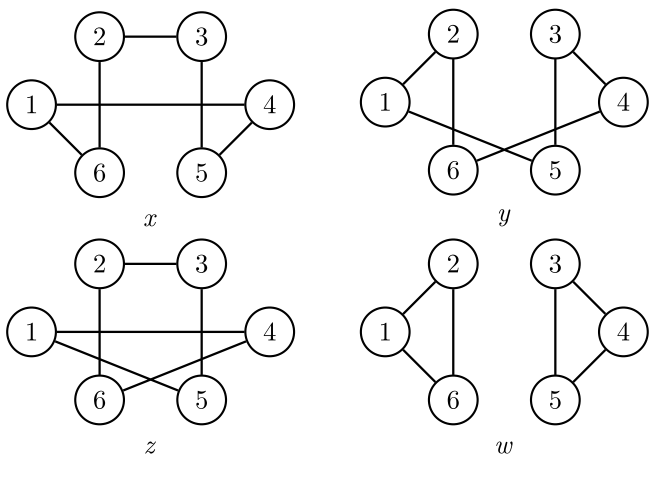

Рис. 2. Пример $w = (x \cup y) \backslash z$, не являющегося гамильтоновым циклом

Следует отметить, что аналогичное утверждение без условия пирамидальности: если из рёбер гамильтоновых циклов x и y можно составить третий гамильтонов цикл z, то оставшиеся рёбра также образуют гамильтонов цикл, в общем случае неверно. В качестве примера можно рассмотреть гамильтоновы циклы, приведённые на рис. 2.

Теорема 3. *Две вершины x^v и y^v многогранника* PYR(n) *несмежны тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух достаточных условий:*

1) *найдутся такое k $(3 < k < n-2)$, что*

$$x^c_k = y^c_k \neq x^c_{k+1} = y^c_{k+1}, \tag{1}$$

и такие i $(i < k)$ и j $(j > k+1)$, что

$$x^c_i \neq y^c_i, \quad x^c_j \neq y^c_j; \tag{2}$$

2) *найдутся такое k $(3 \leqslant k < n-2)$, что*

$$x^c_k = y^c_{k+1} \neq x^c_{k+1} = y^c_k, \tag{3}$$

и такое j $(j > k+1)$, что

$$x^c_j = y^c_j. \tag{4}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено первое достаточное условие. Построим пирамидальный цикл z по следующему правилу:

$$z^c_i = \begin{cases} x^c_i, & \text{если } i \leqslant k, \\ y^c_i, & \text{если } i > k. \end{cases}$$

По построению цикл z полностью состоит из рёбер циклов x и y. Переход между рёбрами двух циклов осуществляется по условию (1). При этом z отличен от циклов x и y в силу (2):

$$z^c_i \neq y^c_i, \quad z^c_j \neq x^c_j.$$

По лемме 1 вершины x^v и y^v многогранника PYR(n) несмежны.

Пример выполнения первого достаточного условия для циклов $x^c = \langle 1,1,0,1,1 \rangle$, $y^c = \langle 0,1,0,0,1 \rangle$ и $k = 4$ приведён на рис. 3.

Пусть теперь выполнено второе достаточное условие. Построим пирамидальный цикл z по следующему правилу:

$$z^c_i = \begin{cases} x^c_i, & \text{если } i \leqslant k, \\ 1 - y^c_i, & \text{если } i > k. \end{cases}$$

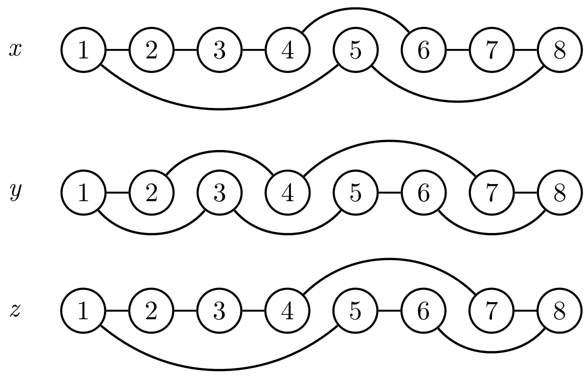

Рис. 3. Пример выполнения первого достаточного условия

Отличие от первого случая заключается в том, что после перехода между циклами по условию (3) рёбра y по направлению убывания становятся рёбрами z по направлению возрастания, и наоборот. Это допустимо в силу симметричной постановки задачи коммивояжёра. Построенный таким образом цикл z отличен от циклов x и y вследствие (4):

$$z_j^c \neq x_j^c = y_j^c.$$

По лемме 1 вершины x^v и y^v многогранника $\mathrm{PYR}(n)$ несмежны.

Пример выполнения второго достаточного условия для циклов $x^c = \langle 0,1,0,0,0 \rangle$, $y^c = \langle 1,0,1,0,0 \rangle$ и $k = 4$ приведён на рис. 4.

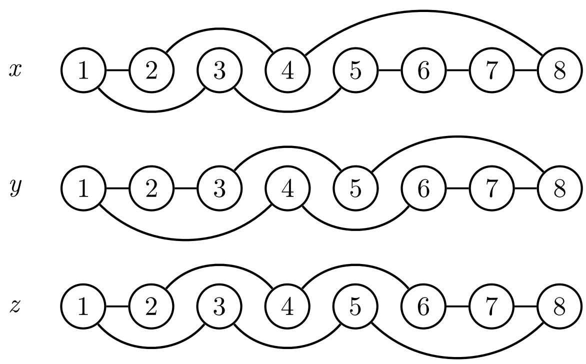

Рис. 4.

Необходимость. Пусть найдётся пирамидальный цикл z, состоящий из рёбер x и y, но отличный от них. Предположим, что цикл z входит в вершину n по ребру (i, n) цикла x, а выходит по рёбрам цикла y, т. е. в вершине n происходит переход между двумя циклами. Тогда для соблюдения корректности пирамидального цикла z должен пройти на обратном пути все вершины j $(i < j < n)$, пропущенные ранее в цикле x, и обойти уже пройденную вершину i:

$$x_j^c = y_j^c,\ x_i^c = y_i^c \ \text{ или } \ x_j^c = 1 - y_j^c,\ x_i^c = 1 - y_i^c.$$

Но в таком случае ребро (i, n) также принадлежит циклу y. Итак, можно считать, что цикл z входит в вершину n и выходит из неё по рёбрам одного цикла. Пусть это цикл y (иначе следует здесь и далее заменить y на x). Кроме того, если какое-то ребро z принадлежит обоим циклам x и y, то будем считать, что в z попало ребро из y.

Отметим, что z содержит как минимум два ребра из $x \backslash y$, т. е. уникальных для цикла x: одно ребро для маршрута по возрастанию и одно — по убыванию. В противном случае z совпадает с y.

Выберем пару уникальных рёбер x, попавших в z: (i, k) — по возрастанию, (s, q) — по убыванию с наибольшими номерами вершин k и q. Без ограничения общности будем считать, что $q < k$. Так как циклы неориентированны, направление обхода можно изменить на противоположное. Переобозначим направление возрастания как то, что содержит уникальное ребро с наибольшим номером вершины. Вариант $k = q$ исключается, иначе вершина с номером k проходится в цикле z два раза. Также отметим, что по построению $k < n$.

Без ограничения общности можно положить $x_i^c = x_k^c = 1$. Вариант $x_i^c = x_k^c = 0$ рассматривается полностью аналогично. По построению для соблюдения корректности пирамидального цикла имеем

$$x_i^c = x_k^c = z_i^c = z_k^c = 1, \quad \forall j \ (i < j < k) \ \ z_j^c = x_j^c = 0. \tag{5}$$

Таким образом, на фрагменте $[i, k]$ цикл z состоит из рёбер, входящих в цикл x.

Так как ребро (i, k) имеет наибольший номер k среди уникальных рёбер x, попавших в z, рассматриваемый цикл в вершине k переходит с рёбер x на рёбра y, проходит вершину n и движется по рёбрам y до вершины q — следующего уникального ребра x. Таким образом, на фрагменте $[q, n]$ цикл z состоит из рёбер y. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $y_k^c = 1$. Тогда на фрагменте $[q, n]$ цикл z наследует направления возрастания и убывания цикла y:

$$\forall j \geqslant q \ \ z_j^c = y_j^c. \tag{6}$$

С учётом неравенства $q < k$, объединяя (5) и (6), получаем блок искомого вида (1):

$$x_k^c = z_k^c = y_k^c = 1, \quad x_{k-1}^c = z_{k-1}^c = y_{k-1}^c = 0.$$

Отметим, что вариант $i = k - 1$ исключается, в противном случае ребро (i, k) принадлежит циклу y и не может быть уникальным для цикла x.

Остаётся проверить выполнение условия (2). Предположим, $x_t^c = y_t^c$ для любого $t < k - 1$. Тогда с учётом (6) циклы z и y совпадают; противоречие.

Предположим, что $x_j^c = y_j^c$ для любого $j > k$. Тогда на фрагменте $[i, n]$ цикл z полностью состоит из рёбер x. Переобозначим цикл y через x, найдём в нём уникальное ребро $(\tilde{\imath}, \tilde{k})$, входящее в z с наибольшим номером $\tilde{k}$, и повторим рассуждения. Отметим, что по построению $\tilde{k} < i$, а значит, подобных операций может быть только конечное число. На некотором шаге получим противоречие.

Таким образом, при $y_k^c = 1$ выполнено первое достаточное условие.

Случай 2. Пусть $y_k^c = 0$. Тогда на фрагменте $[q, n]$ цикл z инвертирует направления возрастания и убывания цикла y:

$$\forall j \geqslant q \quad z_j^c = 1 - y_j^c. \tag{7}$$

Вновь объединяем (5) и (7) и с учётом $q < n$ получаем блок искомого вида (3):

$$x_k^c = z_k^c = y_{k-1}^c = 1, \quad x_{k-1}^c = z_{k-1}^c = y_k^c = 0.$$

Остаётся проверить выполнение условия (4). Предположим, что $x_j^c = 1 - y_j^c$ для любого $j > k$. Вновь получаем, что на фрагменте $[i, n]$ цикл z состоит из рёбер x. Переобозначим циклы x и y, повторив рассуждения предыдущего шага. Через конечное число подобных операций получим противоречие.

Следовательно, для варианта $y_k^c = 0$ выполнено второе достаточное условие.

Таким образом, комбинация двух достаточных условий будет необходимым условием. Теорема 3 доказана.

Теорема 3 даёт эффективный критерий проверки смежности вершин многогранника пирамидальных циклов $\mathrm{PYR}(n)$ (алгоритм 1). Этот факт принципиально отличает его от общего многогранника задачи коммивояжёра $\mathrm{TSP}(n)$, для которого аналогичная задача NP-полна (теорема 1).

Алгоритм 1. Алгоритм проверки смежности вершин $\mathrm{PYR}(n)$

```
procedure ADJACENCY(x, y)
    i ← 3                                  ▷ Проверка первого достаточного условия
    repeat
        i ← i + 1
    until x_i^c ≠ y_i^c
    k ← i + 1
    repeat
        k ← k + 1
    until x_k^c = y_k^c ≠ x_{k+1}^c = y_{k+1}^c              ▷ Поиск блока (1)
    for j ← k + 2, n − 1 do
        if x_j^c ≠ y_j^c then          ▷ Выполнено первое достаточное условие
            return Вершины x^v и y^v несмежны
        end if
    end for
    k ← 3                                  ▷ Проверка второго достаточного условия
    repeat
        k ← k + 1
    until x_k^c = y_{k+1}^c ≠ x_{k+1}^c = y_k^c              ▷ Поиск блока (3)
    for j ← k + 2, n − 1 do
        if x_j^c = y_j^c then          ▷ Выполнено второе достаточное условие
            return Вершины x^v и y^v несмежны
        end if
    end for            ▷ Необходимое условие несмежности не выполнено
    return Вершины x^v и y^v смежны
end procedure
```

Теорема 4. *Задача проверки смежности вершин многогранника пирамидальных циклов* $\mathrm{PYR}(n)$ *разрешима за линейное время* $O(n)$.

Доказательство. Алгоритм 1 в худшем случае требует двойного прохода по координатам векторов x^c и y^c для проверки двух достаточных условий несмежности. Теорема 4 доказана.

3. Диаметр и плотность графа многогранника пирамидальных циклов

Воспользуемся условием несмежности из теоремы 3 для исследования диаметра и плотности полиэдрального графа многогранника пирамидальных циклов.

Теорема 5. *Диаметр графа многогранника пирамидальных циклов* PYR(n) *равен* 2 *для всех* $n \geqslant 6$.

Доказательство. Сначала отметим, что для $n \leqslant 5$ необходимое условие из теоремы 3 не выполнено и все вершины полиэдрального графа попарно смежны. Начиная с $n = 6$ у многогранника PYR(n) появляются пары вершин, для которых выполнено хотя бы одно из достаточных условий несмежности. Например, несмежны вершины $\langle 1,0,0\rangle$ и $\langle 0,1,0\rangle$.

Остаётся заметить, что по условию теоремы 3 две вершины с кодами $\langle 1,1,1,\ldots,1\rangle$ и $\langle 0,0,0,\ldots,0\rangle$ смежны со всеми вершинами многогранника пирамидальных циклов. Теорема 5 доказана.

Таким образом, если ограничиться рассмотрением лишь пирамидальных циклов, для задачи коммивояжёра гипотеза Грётчела и Падберга о диаметре полиэдрального графа [17] выполнена.

Теорема 6. *Плотность графа многогранника пирамидальных циклов* PYR(n) *квадратична по параметру* n:

$$\omega(\mathrm{PYR}(n)) = \Theta(n^2). \tag{8}$$

Доказательство. Оценим плотность полиэдрального графа сверху. Пусть Y_v — некоторое множество попарно смежных вершин многогранника PYR(n), а Y — соответствующие им пирамидальные циклы.

Выберем k $(3 \leqslant k \leqslant n-2)$. Пирамидальный цикл $y \in Y$ назовём *уникальным относительно* k, если

- $y^c_k \neq y^c_{k+1}$;
- $z^c_k \neq y^c_k$ или $z^c_{k+1} \neq y^c_{k+1}$ для любого $z \in Y \backslash y$.

Таким образом, блок кода в y^c на координатах $[k, k+1]$ имеет вид $\langle 1,0\rangle$ или $\langle 0,1\rangle$, и подобного блока на этих координатах нет более ни в одном цикле из Y.

Построим множество W, исключив из Y все уникальные пирамидальные циклы. Отметим, что число исключенных пирамидальных циклов не превышает $2(n-4)$. Рассмотрим некоторый цикл $x \in W$. Пусть $x^c_k \neq x^c_{k+1}$ для некоторого k $(3 < k < n-2)$. По построению множества W найдётся такой цикл $y \in W$, что $x^c_k = y^c_k$ и $x^c_{k+1} = y^c_{k+1}$. Так как вершины x^v и y^v многогранника PYR(n) смежны, по условию теоремы 3 совпадают или их левые фрагменты кода относительно k

$$\forall i \ (3 \leqslant i < k) \ \ x^c_i = y^c_i,$$

или правые фрагменты кода

$$\forall j \ (k+1 < j \leqslant n-1) \ \ x^c_j = y^c_j.$$

В противном случае вершины x^v и y^v несмежны по первому достаточному условию.

Отметим, что для любых циклов с общим блоком совпадающие фрагменты находятся с одной стороны от общего блока. Действительно, предположим, что три цикла $x, y, z \in W$ имеют общий блок $[k, k+1]$ вида $\langle 1, 0 \rangle$, но при этом

$$\forall i\ (3 \leqslant i < k)\ \ x_i^c = y_i^c, \quad \forall j\ (k+1 < j \leqslant n-1)\ \ x_j^c = z_j^c.$$

Тогда, для того чтобы вершин y^v и z^v были смежны, у их кодов должны также совпадать или левые части относительно блока $[k, k+1]$ (в таком случае $x = z$) или правые части $(x = y)$; противоречие.

Таким образом, для каждого пирамидального цикла из W все имеющиеся у него блоки вида $\langle 1, 0 \rangle$ и $\langle 0, 1 \rangle$ можно разбить на два класса: для которых совпадают правые фрагменты и для которых совпадают левые фрагменты. Каждому пирамидальному циклу $x \in W$ сопоставим вектор $x^{\rightarrow}$ по следующему правилу:

$$x_k^{\rightarrow} = \begin{cases} (\rightarrow), & \text{если } x_k^c \neq x_{k+1}^c \text{ и относительно блока } [k, k+1] \\ & \text{совпадают правые фрагменты,} \\ (\leftarrow), & \text{если } x_k^c \neq x_{k+1}^c \text{ и относительно блока } [k, k+1] \\ & \text{совпадают левые фрагменты,} \\ (-), & \text{если } x_k^c = x_{k+1}^c. \end{cases}$$

Отметим, что на одном цикле $x \in W$ совпадающие фрагменты не могут перекрываться. А именно, если для некоторых k, s имеет место $x_k^{\rightarrow} = (\leftarrow)$, а $x_s^{\rightarrow} = (\rightarrow)$, то $k < s$. Предположим противное. Рассмотрим такой цикл $y \in W$, что

$$y_k^c = x_k^c, \quad y_{k+1}^c = x_{k+1}^c, \quad \forall i\ (3 \leqslant i < k)\ \ x_i^c = y_i^c.$$

По предположению $s \leqslant k$, а значит, блоки $[s, s+1]$ у циклов x и y также общие:

$$y_s^c = x_s^c, \quad y_{s+1}^c = x_{s+1}^c, \quad \forall j\ (s+1 < j \leqslant n-1)\ \ x_j^c = y_j^c.$$

Циклы x и y совпадают; противоречие.

Рассмотрим некоторый цикл $x \in W$ и выберем наибольшее значение k, для которого $x_k^{\rightarrow} = (\leftarrow)$, и наименьшее значение s, для которого $x_s^{\rightarrow} = (\rightarrow)$. В случае отсутствия у цикла x блоков $(\leftarrow)$ или $(\rightarrow)$ обозначим соответствующий элемент символом $\varnothing$. Заметим, что значения координат x_{k+1}^c и x_s^c совпадают. В противном случае между $k+1$ и s найдутся ещё блоки вида $\langle 1, 0 \rangle$ или $\langle 0, 1 \rangle$.

Таким образом, каждому циклу $x \in W$ можно сопоставить тройку $\big(k, s, x^c_{k+1} = x^c_s\big)$, которая однозначно определяет x среди циклов в W. Поскольку $k, s \in \{4, 5, \ldots, n-3, \varnothing\}$, общее число троек $(k, s, 0/1)$ не превосходит

$$|W| \leqslant 2(n-5)(n-6).$$

С учётом исключенных ранее уникальных циклов получаем искомую верхнюю оценку:

$$\omega(\mathrm{PYR}(n)) = O(n^2).$$

Теперь оценим плотность полиэдрального графа $\mathrm{PYR}(n)$ снизу. Пусть

$$m = \left\lfloor \frac{n-3}{4} \right\rfloor.$$

Рассмотрим множество пирамидальных циклов Z. Каждой паре q, s, где $0 \leqslant q, s \leqslant m$, сопоставим пирамидальный цикл $x \in Z$ по следующим правилам:

- $\forall i\ (1 \leqslant i \leqslant q)\ x^c_{2i+1} = 1,\ x^c_{2i+2} = 0;$
- $\forall j\ (1 \leqslant j \leqslant s)\ x^c_{4m-2j+3} = 0,\ x^c_{4m-2j+4} = 1;$
- $\forall k \geqslant 4m+3\ x^c_k = 1;$
- все остальные координаты x^c равны нулю.

Общее число циклов такого вида составляет $(m+1)^2$. Ниже приведён пример множества Z для $n = 12$ $(m = 2)$:

$$\begin{aligned}
(0,0) &= \langle 0,0,0,0,0,0,0,0,1 \rangle,\\
(0,1) &= \langle 0,0,0,0,0,0,0,1,1 \rangle,\\
(0,2) &= \langle 0,0,0,0,0,1,0,1,1 \rangle,\\
(1,0) &= \langle 1,0,0,0,0,0,0,0,1 \rangle,\\
(1,1) &= \langle 1,0,0,0,0,0,0,1,1 \rangle,\\
(1,2) &= \langle 1,0,0,0,0,1,0,1,1 \rangle,\\
(2,0) &= \langle 1,0,1,0,0,0,0,0,1 \rangle,\\
(2,1) &= \langle 1,0,1,0,0,0,0,1,1 \rangle,\\
(2,2) &= \langle 1,0,1,0,0,1,0,1,1 \rangle.
\end{aligned}$$

Остаётся проверить, что по построению если $x^c_k = y^c_k \neq x^c_{k+1} = y^c_{k+1}$ для некоторой пары циклов $x, y \in Z$, то

$$\forall i\ (3 \leqslant i < k)\ \ x^c_i = y^c_i$$

при $k \leqslant 2m+2$ и

$$\forall j \ (k+1 < j \leqslant n-1) \ \ x^c_j = y^c_j$$

при $k > 2m + 2$. Следовательно, первое достаточное условие несмежности не выполнено. И ни для какой пары циклов $x, y \in Z$ не имеет место $x^c_k = y^c_{k+1} \neq x^c_{k+1} = y^c_k$. Таким образом, второе достаточное условие несмежности также не выполнено, и все вершины многогранника $\mathrm{PYR}(n)$, соответствующие пирамидальным циклам из множества Z, попарно смежны. Получаем нижнюю оценку

$$\omega(\mathrm{PYR}(n)) \geqslant \left(\left\lfloor \frac{n-3}{4} \right\rfloor + 1 \right)^2,$$

что даёт квадратичную асимптотически точную оценку (8) из условия теоремы. Теорема 6 доказана.

Значение плотности графа многогранника пирамидальных циклов $\mathrm{PYR}(n)$ принципиально отличается от экспоненциальной плотности многогранника задачи коммивояжёра $\mathrm{TSP}(n)$ (теорема 2). Напомним, что плотность полиэдрального графа служит нижней оценкой на трудоёмкость в классе алгоритмов прямого типа [4]. Следует также отметить, что значение плотности $\Theta(n^2)$ коррелирует с трудоёмкостью $O(n^2)$ алгоритма динамического программирования для задачи коммивояжёра на множестве пирамидальных циклов полного графа K_n [6, 15].

4. Заключение

Приведённые в статье результаты наряду с полученными ранее для других комбинаторных задач свидетельствуют о существовании связи между характеристиками полиэдрального графа и сложностью задачи. Так, для полиномиально разрешимых задач о минимальном разрезе, остовном дереве, кратчайшем пути и ряда других полиэдральные графы полностью описаны и имеют полиномиальную плотность [2,4,8], в то время как для NP-трудных задач о максимальном разрезе, об остовном дереве с ограничениями на число листьев и степени вершин, о самом длинном пути и многих других построены экспоненциальные нижние оценки на плотность графов ассоциированных многогранников [4, 5, 8]. А для таких задач, как Коммивояжёр и Рюкзак, даже проверка смежности вершин полиэдрального графа является NP-полной задачей [14, 19].

Таким образом, рассматриваемый в статье многогранник пирамидальных циклов намного ближе по своим полиэдральным свойствам к многогранникам других полиномиально разрешимых задач, таких как Остовное дерево и Кратчайший путь, а не к многограннику общей задачи коммивояжёра.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Айзенштат В. С., Кравчук Д. Н.** О минимуме линейной формы на множестве всех полных циклов симметрической группы S_n // Кибернетика. 1968. № 2. С. 64–66.
2. **Белов Ю. А.** О плотности графа матроида // Модели исследования операций в вычислительных системах. Ярославль, 1985. С. 95–100.
3. **Бондаренко В. А.** Неполиномиальная нижняя оценка сложности задачи коммивояжёра в одном классе алгоритмов // Автоматика и телемеханика. 1983. № 9. С. 45–50.
4. **Бондаренко В. А., Максименко А. Н.** Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. М.: ЛКИ, 2008. 184 с.
5. **Бондаренко В. А., Николаев А. В., Шовгенов Д. А.** Полиэдральные графы задач об остовных деревьях при дополнительных ограничениях // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22, № 4. С. 453–463.
6. **Кляус П. С.** Обобщение тестовых задач для задачи коммивояжёра // Препринт № 16, Ин-т математики АН БССР, Минск, 1976.
7. **Applegate D. L., Bixby R. E., Chvátal V., Cook W. J.** The traveling salesman problem: a computational study. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2007. 608 p.
8. **Bondarenko V. A., Nikolaev A. V.** On graphs of the cone decompositions for the min-cut and max-cut problems // Int. J. Math. Math. Sci. 2016. Vol. 2016. P. 1–6.
9. **Bondarenko V. A., Nikolaev A. V.** On the skeleton of the pyramidal tours polytope // Abstr. 17th Baikal Int. School - Seminar "Methods of Optimization and Their Applications". Irkutsk: ESI SB RAS, 2017. P. 84.
10. **Bondarenko V. A., Nikolaev A. V.** Some properties of the skeleton of the pyramidal tours polytope // Electron. Notes Discrete Math. 2017. Vol. 61. P 131–137.
11. **Burkard R. E., Deineko V. G., Van Dal R., Van der Veen J. A. A., Woeginger G. J.** Well-solvable special cases of the traveling salesman problem: a survey // SIAM Rev. 1998. Vol. 40, No. 3. P. 496–546.
12. **Dantzig G., Fulkerson R., Johnson S.** Solution of a large scale traveling salesman problem. Tech. Rep. P-510. RAND Corp., Santa Monica, CA, 1954.
13. **Deineko V. G., Klinz B., Tiskin A., Woeginger G. J.** Four-point conditions for the TSP: the complete complexity classification // Discrete Optim. 2014. Vol. 14. P. 147–159.
14. **Geist D., Rodin E. Y.** Adjacency of the 0–1 knapsack problem // Comput. Oper. Res. 1992. Vol. 19, No. 8. P. 797–800.
15. **Gilmore P. C., Lawler E. L., Shmoys D. B.** Well-solved special cases // The traveling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization. Chichester: Wiley, 1985. P. 87–143.

16. **Girlich E., Höding M., Horbach A., Kovalev M.** On the facets and diameter of the k-cycle polytope // Optimization. 2006. Vol. 55, No. 4. P. 311–339.
17. **Grötschel M., Padberg M.** Polyhedral theory // The traveling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization. Chichester: Wiley, 1985. P. 251–305.
18. **Padberg M. W., Rao M. R.** The travelling salesman problem and a class of polyhedra of diameter two // Math. Program. 1974. Vol. 7, No. 1. P. 32–45.
19. **Papadimitriou C. H.** The adjacency relation on the traveling salesman polytope is NP-complete // Math. Program. 1978. Vol. 14, No. 1. P. 312–324.
20. **Rispoli F. J., Cosares S.** A bound of 4 for the diameter of the symmetric traveling salesman polytope // SIAM J. Discrete Math. 1998. Vol. 11, No. 3. P. 373–380.
21. **Sierksma G.** The skeleton of the symmetric traveling salesman polytope // Discrete Appl. Math. 1993. Vol. 43, No. 1. P. 63–74.
22. **Sierksma G., Teunter R. H., Tijssen G. A.** Faces of diameter two on the Hamiltonian cycle polytype // Oper. Res. Lett. 1995. Vol. 18, No. 2. P. 59–64.
23. **Sierksma G., Tijssen G. A.** Faces with large diameter on the symmetric traveling salesman polytope // Oper. Res. Lett. 1992. Vol. 12, No. 2. P. 73–77.

Бондаренко Владимир Александрович,
Николаев Андрей Валерьевич

Статья поступила
3 марта 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2018. Volume 25, No. 1. P. 5–24

UDC 519.16+514.172.45 DOI: 10.17377/daio.2018.25.570

ON THE SKELETON OF THE POLYTOPE OF PYRAMIDAL TOURS

V. A. Bondarenko[a] and *A. V. Nikolaev*[b]
Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya St., 150003 Yaroslavl, Russia
E-mail: [a]bond@bond.edu.yar.ru, [b]andrei.v.nikolaev@gmail.com

Abstract. We consider the skeleton of the polytope of pyramidal tours. A Hamiltonian tour is called *pyramidal* if the salesperson starts in city 1, then visits some cities in increasing order of their numbers, reaches city n, and returns to city 1 visiting the remaining cities in decreasing order. The polytope $\mathrm{PYR}(n)$ is defined as the convex hull of the characteristic vectors of all pyramidal tours in the complete graph K_n. The skeleton of $\mathrm{PYR}(n)$ is the graph whose vertex set is the vertex set of $\mathrm{PYR}(n)$ and the edge set is the set of *geometric edges* or one-dimensional faces of $\mathrm{PYR}(n)$. We describe the necessary and sufficient condition for the adjacency of vertices of the polytope $\mathrm{PYR}(n)$. On this basis we developed an algorithm to check the vertex adjacency with linear complexity. We establish that the diameter of the skeleton of $\mathrm{PYR}(n)$ equals 2, and the asymptotically exact estimate of the clique number of the skeleton of $\mathrm{PYR}(n)$ is $\Theta(n^2)$. It is known that this value characterizes the time complexity in a broad class of algorithms based on linear comparisons. Illustr. 4, bibliogr. 23.

Keywords: pyramidal tour, 1-skeleton, necessary and sufficient condition of adjacency, clique number, graph diameter.

REFERENCES

1. **V. S. Aizenshtat** and **D. N. Kravchuk,** On the minimum of a linear form on the set of all cycles of the symmetric group S_n, *Kibern.,* **2**, 64–66, 1968 [Russian]. Translated in *Cybern.,* **4**, 52–53, 1968.
2. **Yu. A. Belov,** On clique number of the matroid graph, *Modeli issledovaniya operatsii v vychislitel'nykh sistemakh* (Operations Research Models in Computing Systems), pp. 95–100, Yarosl. Gos. Univ., Yaroslavl, 1985 [Russian].
3. **V. A. Bondarenko,** Nonpolynomial lower bounds for the complexity of the traveling salesman problem in a class of algorithms, *Avtom. Telemekh.,* No. 9, 44–50, 1983 [Russian]. Translated in *Autom. Remote Control,* **44**, No. 9, 1137–1142, 1983.

4. **V. A. Bondarenko** and **A. N. Maksimenko,** Geometricheskie konstruktsii i slozhnost' v kombinatornoi optimizatsii (Geometric constructions and complexity in combinatorial optimization), LKI, Moscow, 2008 [Russian].
5. **V. A. Bondarenko, A. V. Nikolaev,** and **D. A. Shovgenov,** 1-skeletons of the spanning tree problems with additional constraints, *Model. Anal. Inf. Syst.,* **22**, No. 9, 453–463, 2015 [Russian].
6. **P. S. Klyaus,** Generation of testproblems for the traveling salesman problem, *Prepr. Inst. Mat. Akad. Nauk BSSR,* No. 16, Inst. Mat. AN BSSR, Minsk, 1976 [Russian].
7. **D. L. Applegate, R. E. Bixby, V. Chvátal,** and **W. J. Cook,** *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study,* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.
8. **V. A. Bondarenko** and **A. V. Nikolaev,** On graphs of the cone decompositions for the min-cut and max-cut problems, *Int. J. Math. Math. Sci.,* **2016**, 1–6, 2016.
9. **V. A. Bondarenko** and **A. V. Nikolaev,** On the skeleton of the pyramidal tours polytope, in *Abstr. 17th Baikal Int. Sch. Semin. Conf. "Methods of Optimization and Their Applications", Irkutsk, Russia, July 31 – Aug. 6, 2017,* p. 84, ESI SB RAS, Irkutsk, 2017.
10. **V. A. Bondarenko** and **A. V. Nikolaev,** Some properties of the skeleton of the pyramidal tours polytope, *Electron. Notes Discrete Math.,* **61**, 131–137, 2017.
11. **R. E. Burkard, V. G. Deineko, R. van Dal, J. A. A. van der Veen,** and **G. J. Woeginger,** Well-solvable special cases of the traveling salesman problem: A survey, *SIAM Rev.*, **40**, No. 3, 496–546, 1998.
12. **G. Dantzig, R. Fulkerson,** and **S. Johnson,** Solution of a large scale traveling salesman problem, *Tech. Rep. P-510,* RAND Corp., Santa Monica, CA, 1954.
13. **V. G. Deineko, B. Klinz, A. Tiskin,** and **G. J. Woeginger,** Four-point conditions for the TSP: The complete complexity classification, *Discrete Optim.,* **14**, 147–159, 2014.
14. **D. Geist** and **E. Y. Rodin,** Adjacency of the 0–1 knapsack problem, *Comput. Oper. Res.,* **19**, No. 8, 797–800, 1992.
15. **P. C. Gilmore, E. L. Lawler,** and **D. B. Shmoys,** Well-solved special cases, in *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization,* pp. 87–143, Wiley, Chichester, UK, 1985.
16. **E. Girlich, M. Höding, A. Horbach,** and **M. Kovalev,** On the facets and diameter of the k-cycle polytope, *Optim.,* **55**, No. 4, 311–339, 2006.
17. **M. Grötschel** and **M. Padberg,** Polyhedral theory, in *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization,* pp. 251–305, Wiley, Chichester, UK, 1985.
18. **M. W. Padberg** and **M. R. Rao,** The travelling salesman problem and a class of polyhedra of diameter two, *Math. Program.,* **7**, No. 1, 32–45, 1974.

19. **C. H. Papadimitriou,** The adjacency relation on the traveling salesman polytope is NP-complete, *Math. Program.,* **14**, No. 1, 312–324, 1978.
20. **F. J. Rispoli** and **S. Cosares,** A bound of 4 for the diameter of the symmetric traveling salesman polytope, *SIAM J. Discrete Math.,* **11**, No. 3, 373–380, 1998.
21. **G. Sierksma,** The skeleton of the symmetric traveling salesman polytope, *Discrete Appl. Math.,* **43**, No. 1, 63–74, 1993.
22. **G. Sierksma, R. H. Teunter,** and **G. A. Tijssen,** Faces of diameter two on the Hamiltonian cycle polytype, *Oper. Res. Lett.,* **18**, No. 2, 59–64, 1995.
23. **G. Sierksma** and **G. A. Tijssen,** Faces with large diameter on the symmetric traveling salesman polytope, *Oper. Res. Lett.,* **12**, No. 2, 73–77, 1992.

Vladimir A. Bondarenko,
Andrei V. Nikolaev

Received
3 March 2017