ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2018. Том 25, № 2. С. 54–61

УДК 519.8 DOI: 10.17377/daio.2018.25.568

О ЧАСТИЧНОМ ПОРЯДКЕ, СВЯЗАННОМ С ДЕЛИМОСТЬЮ *)

В. К. Леонтьев

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН,
ул. Вавилова, 40, 119333 Москва, Россия
E-mail: vkleontiev@yandex.ru

Аннотация. Получены оценки для числа дискретных монотонных функций, связанных с делимостью чисел. Ил. 1, библиогр. 6.

Ключевые слова: частичный порядок, монотонная функция, антицепь.

Отношение делимости является старым и достаточно популярным объектом в различных областях математического знания: алгебре, теории чисел, комбинаторике слов и т. д. Мы рассматриваем определение делимости на классической предметной области — натуральном ряде [5].

Итак, пусть $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ — отрезок натурального ряда с отношением делимости: $a \mid b$, если число $a \in I_n$ является делителем числа $b \in I_n$. Таким образом, множество I_n с бинарным отношением

$$a \leqslant b \rightleftarrows a \mid b \tag{1}$$

является частично упорядоченным множеством (ЧУМ), которое обозначим через $C_n = (I_n, \leqslant)$.

Если взять вместо I_n весь натуральный ряд $\mathbb{N}$, то множество $(\mathbb{N}, \leqslant)$ будет решёткой со следующими классическими операциями: $\max(a, b) = [a, b]$ и $\min(a, b) = (a, b)$, где $[a, b]$ и (a, b) — наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель чисел a и b соответственно.

Если ввести предикат делимости

$$\eta_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{если } a \mid b \text{ или } b \mid a, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

то ему будет соответствовать граф $G_n = (I_n, U_n)$ с множеством вершин I_n и отношением смежности, заданным предикатом η_{ab}.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07–01–00300).

Если $n = 8$, то граф $G_8 = (I_8, U_8)$ выглядит следующим образом.

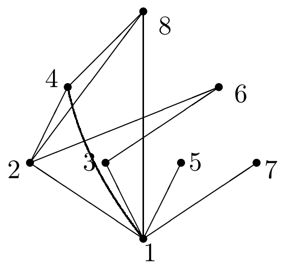

Рис. 1. Граф G_8

Степени вершин и число рёбер графа G_n представлены в следующем утверждении.

Лемма 1. *Если λ_k — степень вершины k в графе G_n, то*

(1) $\lambda_k = \tau(k) + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 2$,

(2) $|U_n| = n(\overline{\tau}(n) - 1)$,

где $\tau(k)$ — число делителей k и $\overline{\tau}(n)$ — среднее число делителей чисел из отрезка I_n.

Доказательство. Вершины, смежные с вершиной k, суть делители числа k и числа, делящегося на k. Число первых равно $\tau(k) - 1$, а вторых — $\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1\right)$. Это доказывает утверждение (1). Доказательство утверждения (2) следует из утверждения (1) и соотношения

$$\overline{\tau}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil.$$

Если $\tau_k(G_n)$ — число совокупностей из k независимых вершин в графе G_n, то может быть доказана

Лемма 2. *Справедливы следующие асимптотические соотношения:*

$$\tau_2(G_n) \sim n^2 - 2n \ln n, \tag{2}$$

$$\tau_3(G_n) \sim n^3 - 6n^2 \ln n. \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) имеют следующую вероятностную интерпретацию. Если в отрезке $[1, n]$ случайно и независимо выбираются два числа, то вероятность того, что ни одно из них не является делителем другого равна

$$p_2(n) \sim 1 - \frac{2 \ln n}{n}.$$

В случае, когда выбираем три числа из отрезка I_n, соответствующая вероятность выглядит так:

$$p_3(n) \sim 1 - 6\frac{\ln n}{n}.$$

Опустим доказательство леммы 2, так как оно является прямым вычислением $\tau_2(n)$ и $\tau_3(n)$ и содержит только рутинные выкладки.

Каждое независимое множество в графе G_n будем называть *антицепью.* Пусть $S(n)$ — длина максимальной цепи в графе G_n.

Утверждение 1. $S(n) = \lceil \log_2 n \rceil$.

Доказательство. Если $\{a_1 < a_2 < \cdots < a_m\}$ — цепь в I_n, то $1 < \frac{a_2}{a_1} < \cdots < \frac{a_m}{a_1}$ также является цепью в $I_{\frac{a_m}{a_1}}$. Доказательство заканчивается простой индукцией.

Следствие 1. *В I_n существует единственная максимальная цепь $\{1, 2, \ldots, 2^p\}$ при $n = 2^p$.*

Следующие параметры $C_n = (I_n, \leqslant)$ являются стандартными для любого ЧУМ.

Если $\zeta_n(x, y)$ — дзета-функция для C_n, то

$$\zeta_n(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \mid y, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \tag{4}$$

где $x, y \in I_n$. Этой функции соответствует матрица $Z_n = \|\zeta_n(x, y)\|$. Обратная к этой матрице имеет вид

$$Z_n^{-1} = \|\mu_n(x, y)\|,$$

где $\mu_n(x, y)$ носит название *функции Мёбиуса* [5]. Для частичного порядка, определённого в (1), эта функция выглядит так:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} \mu\left(\frac{y}{x}\right), & \text{если } x \mid y, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\mu(m)$ — стандартная теоретико-числовая функция Мёбиуса [1]. Отметим также, что длина интервала $I = [a, b]$, где $a, b \in C_n$ и $a \leqslant b$, равна $\tau\left(\frac{b}{a}\right)$, а $\tau(m)$ — уже упомянутая выше функция — число делителей m.

Примеры. 1. Если $I = [4, 16]$, то $\tau\left(\frac{16}{4}\right) = \tau(4) = 3$ и $I = \{4, 8, 16\}$ и $|I| = 3$.

2. Если $I = [3, 4!] = [3, 24] = \{3, 6, 12, 24\}$, то $\tau\left(\frac{24}{3}\right) = 4$.

3. Если $I = [5, 60] = \{5, 10, 15, 20, 30, 60\}$, то $\tau\left(\frac{60}{5}\right) = 6$.

1. Разбиение I_n на цепи

Разбиение произвольного ЧУМ D на цепи — стандартный метод решения перечислительных и экстремальных задач дискретной математики [1, 2]. Классическим результатом в этом направлении является теорема 1 [5].

Пусть $l(D)$ — максимальная мощность антицепи в D. Эта величина называется *шириной* D.

Теорема 1 (Дилуорса)**.** *Минимальное число цепей в разбиении D на цепи равно ширине D.*

Эта теорема широко используется в комбинаторном анализе и служит фундаментом для получения многих значительных результатов [6].

Пусть A_r — множество чисел вида $\{r \cdot 2^k\}$, лежащих в отрезке $[1, n]$, r — нечётное число. Таким образом, A_r — 2^k-кратные нечётного числа r, лежащие в отрезке I_n. Положим по определению

$$l(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{при } n \equiv 0 \pmod 2, \\ \frac{n+1}{2} & \text{при } n \equiv 1 \pmod 2. \end{cases} \tag{5}$$

Ясно, что каждое множество A_r является цепью и длина этой цепи равна $|A_r| = \lceil \log_2 \frac{n}{2} \rceil$.

Утверждение 2. *Справедливо следующее представление:*

$$I_n = \bigcup_{r=1}^{l(n)} A_r, \tag{6}$$

где $l(n)$ определено выше.

Примеры. 1. Для $n = 8$

$$I_8 = \{1, 2, 2^2, 2^3\} \cup \{3, 2 \cdot 3\} \cup \{5\} \cup \{7\}.$$

2. Для $n = 12$

$$I_{12} = \{1, 2, 2^2, 2^3\} \cup \{3, 2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3\} \cup \{5, 2 \cdot 5\} \cup \{7\} \cup \{9\} \cup \{11\}.$$

3. Для $n = 15$

$$I_{15} = \{1, 2, 4, 8\} \cup \{3, 6, 12\} \cup \{5, 10\} \cup \{7, 14\} \cup \{9\} \cup \{11\} \cup \{13\} \cup \{15\}.$$

2. Алгоритм разбиения I_n на $l(n)$ цепей

Изложенный ниже алгоритм носит рекурсивный характер и состоит из построения разбиения I_{n+1} по уже найденному разбиению I_n.

1. Если $n+1 \equiv 1 \pmod 2$, то число $n+1$ входит в искомое разбиение отдельным блоком, т. е.

$$I_{n+1} = V_n \cup \{n+1\},$$

где V_n — разбиение I_n.

2. Если $n+1 \equiv 0 \pmod 2$ и $n+1 = 2q$, то элемент q принадлежит некоторому блоку из разбиения I_n. В этот же блок включаем элемент $n+1$.

Примеры. 1. Если $n = 13$, то из полученного разложения для I_{12} выводим

$$I_{13} = \{1, 2, 2^2, 2^3\} \cup \{3, 2\cdot 3, 2^2\cdot 3\} \cup \{5, 2\cdot 5\} \cup \{7\} \cup \{9\} \cup \{11\} \cup \{13\}.$$

2. Отсюда имеем разложение для $n = 14$

$$I_{14} = \{1, 2, 4, 8\} \cup \{3, 6, 12\} \cup \{5, 10\} \cup \{7, 14\} \cup \{9\} \cup \{11\} \cup \{13\}.$$

3. Антицепи в I_n

Антицепь, или *независимое множество* в I_n, — это подмножество чисел, никакие два из которых не находятся в отношении делимости. Примером антицепи является множество простых чисел из I_n. Эта антицепь не может быть расширена путём добавления новых элементов и в то же время не является максимальной по мощности антицепью при $n > 11$.

Прежде чем перейти к более тщательному изучению антицепей в I_n, рассмотрим одно специальное преобразование, действующее на подмножествах I_n.

Пусть $A = \{1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_m \leqslant n\}$. Тогда положим по определению [3]:

$$TA = \{2a_1, a_2, \ldots, a_m\}.$$

Таким образом, преобразование T удваивает минимальный элемент множества A и не трогает остальных элементов. При этом мощность TA может стать меньше мощности A, так как в TA могут появиться одинаковые элементы. Ясно также, что $TA \subseteq I_n$, если $a_1 \leqslant \frac{n}{2}$.

Лемма 3. *Если A— независимое множество в I_n и $a_1 \leqslant \frac{n}{2}$, то TA — независимое множество в I_n.*

Доказательство. Если TA не является антицепью, то это может быть по двум причинам: либо $2a_1 \mid a_r$ для некоторого r, либо $a_r \mid 2a_1$ для какого-то r. Первый случай невозможен, так как тогда $a_1 \mid a_r$ вопреки определению антицепи. Если же реализуется второй случай, то

$$\frac{2a_1}{a_r} \geqslant 1. \tag{7}$$

Но $a_1 < a_r$ и $2a_1 < 2a_r$, откуда с учётом (7) вытекает, что $a_r = 2a_1$. Последнее также не совместимо с определением антицепи.

Лемма 4. *Если A — антицепь в I_n и $a_1 \leqslant \frac{n}{2}$, то $|A| \leqslant l(n)$, где $l(n)$ определено в* (5).

Доказательство. В силу леммы 3 ясно, что итерации преобразования T переводят любую антицепь из интервала I_n в интервал $[l(n)+1, \ldots, n]$ и, таким образом, мощность антицепи не превосходит длины этого интервала.

Следствие 2. $\max |A| = l(n)$.

Теорема 2. *Для числа антицепей r_n справедлива следующая оценка:*

$$2^{l(n)} < r_n < 3^{l(n)}. \tag{8}$$

Доказательство. Нижняя граница следует из того, что в интервале $[l(n)+1, \ldots, n]$ любое подмножество чисел является независимым. Для получения верхней оценки используем приведённую выше теорему Дилуорса. Рассмотрим разбиение интервала $I(n)$ на $l(n)$ непересекающихся цепей

$$I_n = \bigcup_{i=1}^{l(n)} V_i.$$

В силу дизъюнктности этого разбиения имеем равенство

$$|I_n| = n = \sum_{i=1}^{l(n)} |V_i|. \tag{9}$$

Так как каждая антицепь из I_n содержит не более одного элемента из каждой цепи V_i, для числа антицепей имеем верхнюю оценку

$$r_n < \prod_{i=1}^{l(n)} (1 + |V_i|). \tag{10}$$

Используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, из (9), (10) с помощью леммы 4 получаем

$$r_n < \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1+|V_i|}{l(n)} \right)^{l(n)} = \left(1 + \frac{n}{l(n)} \right)^{l(n)} < 3^n.$$

Замечание 1. Вместо теоремы Дилуорса можно использовать построенное выше разбиение I_N на $l(n)$ цепей.

Замечание 2. Теорему 1 можно интерпретировать как оценку числа монотонных функций, заданных на ЧУМ C_n [1, 2].

Замечание 3. Нижнюю оценку в (8) можно улучшить очевидным образом:

$$r_n > 2^{\frac{n}{2}} + 2^{\frac{n}{4}},$$

добавив антицепи из интервала $\left[\frac{n}{4}, \frac{n}{2}\right]$. Однако это не меняет асимптотический характер границ в (8).

Любопытно сравнить оценки (8) с аналогичными оценками для числа монотонных булевых функций [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ансель Ж.** О числе монотонных булевых функций n переменных // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 5. М.: Мир, 1968. С. 53–74.
2. **Коршунов А. Д.** О числе монотонных булевых функций. Проблемы кибернетики. Вып. 38. М.: Наука, 1981. С. 5–108.
3. **Леонтьев В. К.** Комбинаторика и информация. Ч. 1. М.: МФТИ, 2015. С. 173.
4. **Рыбников К. А.** Введение в комбинаторный анализ. М.: МГУ, 1985.
5. **Стенли Р.** Перечислительная комбинаторика. Т. 1. М.: Мир, 1990.
6. **Schröder B.** Ordered sets: An introduction with connections from combinatorics to topology. Basel: Birkhäuser, 2016.

Леонтьев Владимир Константинович

Статья поступила
2 марта 2017 г.

Исправленный вариант —
20 сентября 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2018. Volume 25, No. 2. P. 54–61

UDC 519.8 DOI: 10.17377/daio.2018.25.568

ON A PARTIAL ORDER RELATED TO DIVISIBILITY

V. K. Leontiev
Dorodnicyn Computing Centre of RAS,
40 Vavilov St., 119333 Moscow, Russia
E-mail: vkleontiev@yandex.ru

Abstract. We estimate the number of monotone discrete functions related to the divisibility of numbers. Illustr. 1, bibliogr. 6.

Keywords: partial order, monotone function, antichain.

REFERENCES

1. **G. Hansel,** Sur le nombre des fonctions booléennes monotones de n variables, *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. B,* **262**, 1088–1090, 1966 [French]. Translated in *Kiberneticheskii sbornik. Novaya seriya* (Cybernetic Sbornik. New Series), Vol. 5, pp. 53–74, Mir, Moscow, 1968 [Russian].
2. **A. D. Korshunov**, On the number of monotone Boolean functions, in *Problemy kibernetiki* (Problems of Cybernetics), Vol. 38, pp. 5–108, Nauka, Moscow, 1981 [Russian].
3. **V. K. Leontiev,** *Kombinatorika i informatsiya* (Combinatorics and Information), Pt. 1, MFTI, Moscow, 2015 [Russian].
4. **K. A. Rybnikov,** *Vvedenie v kombinatornyi analiz* (An Introduction to Combinatorial Analysis), MGU, Moscow, 1985 [Russian].
5. **R. P. Stanley,** *Enumerative Combinatorics,* Vol. 1, Wadsworth Brooks/Cole Adv. Books Softw., Monterey, 1986. Translated under the title *Perechislitel'naya kombinatorika,* Mir, Moscow, 1990 [Russian].
6. **Schröder B.** *Ordered Sets: An Introduction with Connections from Combinatorics to Topology,* Birkhäuser, Basel, 2016.

Vladimir K. Leontiev

Received
2 March 2017
Revised
20 September 2017