ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2018. Том 25, № 2. С. 5–18

УДК 519.178 DOI: 10.17377/daio.2018.25.581

НОВЫЕ СЛУЧАИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ ДЛЯ ГРАФОВ С ЗАПРЕЩЁННЫМИ ПУТЯМИ *)

В. Е. Алексеев[a], *С. В. Сорочан*[b]
Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского, ИИТММ,
пр. Гагарина, 23, корп. 6, 603950 Нижний Новгород, Россия
E-mail: [a]aleve@rambler.ru, [b]svs-05@mail.ru

Аннотация. Задача о независимом множестве разрешима за полиномиальное время для графов, не содержащих пути P_k при любом фиксированном k. Если же запрещается порождённый путь P_k, то при $k > 6$ сложностной статус этой задачи неизвестен. Рассматриваются промежуточные случаи, когда запрещён порождённый путь P_k и некоторые его остовные надграфы. Доказывается полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве в следующих случаях: 1) запрещаются надграфы, у которых минимальная степень вершины меньше $k/2$; 2) запрещаются надграфы, у которых дополнительный граф имеет более $k/2$ рёбер; 3) запрещаются надграфы, из которых с помощью операции пересечения графов можно получить P_k. Библиогр. 12.

Ключевые слова: независимое множество, запрещённый подграф, путь, надграф, полиномиальное время.

Введение

Под *классом графов* понимается множество графов, замкнутое относительно переименования вершин. Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин, и *монотонным*, если он замкнут относительно удаления вершин и рёбер. Любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством *запрещённых подграфов* $\mathcal{Y}$: $\mathcal{X}$ состоит из всех графов, не содержащих порождённых подграфов, изоморфных графам из $\mathcal{Y}$. В этом случае используется обозначение $\mathcal{X} = Free(\mathcal{Y})$, а графы из $\mathcal{X}$ называют *$\mathcal{Y}$-свободными.* Если $\mathcal{Y}$ — конечное множество, то класс $Free(\mathcal{Y})$ называется *конечно определённым.* Всякий монотонный класс является наследственным, поэтому

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17–01–00710а).

может быть задан множеством запрещённых (порождённых) подграфов. При этом множество запрещённых подграфов для монотонного класса имеет очевидную особенность: вместе со всяким содержащимся в нём графом оно содержит также все графы, получающиеся из него добавлением рёбер.

Независимое множество в графе — это множество не смежных между собой вершин. *Задача о независимом множестве* состоит в том, чтобы в данном графе найти независимое множество наибольшей мощности. Задача о независимом множестве NP-трудна и остаётся такой для многих классов графов; такие классы называем НМ-*сложными.* Известно также немало классов графов, для которых она может быть решена за полиномиальное время, их называем НМ-*простыми.* Есть информация и общего характера, относящаяся не к отдельным классам, а к семействам классов. Так, в [4] установлено, что конечно определённый монотонный класс $\mathcal{X}$ является НМ-сложным, если $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$, и НМ-простым в противном случае. Здесь $\mathcal{T}$ — класс всех графов, у которых каждая компонента связности является деревом с не более чем тремя листьями. Эту дихотомию пока не удалось распространить на наследственные классы. В [1] доказано, что любой конечно определённый наследственный класс, включающий класс $\mathcal{T}$, является НМ-сложным. Движение во встречном направлении связано с разработкой полиномиальных алгоритмов для классов, определяемых запрещёнными подграфами из $\mathcal{T}$. Если говорить только о классах, определяемых одним запрещённым подграфом из $\mathcal{T}$, то наибольшие продвижения здесь состоят в установлении НМ-простоты следующих классов:

- $Free(mK_2)$ при любом m [2],
- $Free(S_{1,1,2})$, где $S_{1,1,2}$ — граф, получаемый из графа $K_{1,3}$ подразбиением одного ребра [3],
- $Free(K_2 + K_{1,3})$, где $K_2 + K_{1,3}$ — дизъюнктное объединение графов K_2 и $K_{1,3}$ [11],
- $Free(P_5)$ [9],
- $Free(P_6)$ [6].

Имеется также ряд результатов о НМ-простоте некоторых подклассов классов, определяемых запрещёнными подграфами из $\mathcal{T}$ (см., например, [5, 8, 10, 12]).

Как видно, в отличие от монотонных классов, для конечно определённых наследственных классов имеется значительный разрыв в наших знаниях о НМ-простых и НМ-сложных классах. По-видимому, трудно рассчитывать на ликвидацию этого разрыва в ближайшем будущем, и имеет смысл испытать другие подходы к проблеме разделения простых и сложных классов. Одним из направлений может быть рассмотрение семейств классов графов, промежуточных между семействами монотонных и наследственных классов. Для этих промежуточных семейств можно надеяться получить результаты дихотомического характера типа упомянутого выше, либо хотя бы приблизиться к этому.

Если наследственный класс определяется одним запрещённым подграфом G, то множество запрещённых подграфов, состоящее из всех остовных надграфов графа G, определяет монотонный класс. Если ограничить добавление рёбер какими-либо правилами, получится класс, заключённый между этими двумя. Вводя ограничения на множество добавляемых рёбер, получаем возможность определять семейства классов графов, промежуточные между семействами монотонных и наследственных классов. Здесь мы рассматриваем три типа ограничений на добавление рёбер к графу P_k (пути с k вершинами) и доказываем НМ-простоту наследственных классов, у которых

• множество запрещённых подграфов состоит из всех надграфов графа P_k с минимальной степенью вершин меньше $k/2$;

• множество запрещённых подграфов состоит из всех надграфов графа P_k, дополнительный граф которых имеет больше $k/2$ рёбер;

• множество запрещённых подграфов состоит из всех надграфов графа P_k, из которых с помощью операции пересечения графов можно получить P_k.

В статье применяются следующие обозначения:

$\langle G\rangle$ — множество всех остовных надграфов графа G;

$N(a)$ — множество вершин рассматриваемого графа, смежных с вершиной a;

если X — подмножество множества вершин графа G, то $G[X]$ — подграф графа G, порождённый множеством X; $G - X$ — подграф, полученный удалением из графа G всех вершин множества X; $N(X)$ — множество всех вершин графа, смежных с вершинами из множества X; $\deg_X(a)$ — число вершин в множестве X, смежных с вершиной a.

1. Запрещаются граф P_k и все его надграфы

Вначале рассмотрим класс $Free(\langle P_k\rangle)$ всех графов, не содержащих подграфа P_k. НМ-простота этого класса следует из результатов работы [4], но мы приведём здесь простое доказательство именно для этого класса с оценкой трудоёмкости, которая в явном виде в [4] не дана.

Лемма 1. *Задача о независимом множестве решается для графов* *с n вершинами из класса $Free(\langle P_k\rangle)$ за время $O(n^{k-1})$ при любом фиксированном $k \geqslant 2$.*

Доказательство. При $k = 2$ утверждение очевидно, далее проводим индукцию по k. Допустим, что $k > 2$ и имеется алгоритм $\mathbf{A_{k-1}}$, находящий наибольшее независимое множество в графах из $Free(\langle P_{k-1}\rangle)$ за время $O(n^{k-2})$. Пусть $G = (V, E)$ — граф с n вершинами из класса $Free(\langle P_k\rangle)$. Наибольшее независимое множество графа есть объединение наибольших независимых множеств его компонент связности. Компоненты связности могут быть найдены, скажем, с помощью поиска в глубину, за время $O(n^2)$. Поэтому можно предполагать, что входной граф G связен.

За время $O(n^{k-1})$ можно найти в графе G простой путь из $k-1$ вершин или убедиться, что такого нет. В последнем случае применяется алгоритм $\mathbf{A_{k-1}}$. Пусть P — путь из $k-1$ вершин в графе G, а A — множество вершин этого пути. Граф $G - A$ принадлежит классу $Free(\langle P_{k-1}\rangle)$. В самом деле, если P' — путь из $k-1$ вершин в этом графе, а Q — путь, соединяющий вершину из P с вершиной из P' и не содержащий других вершин этих двух путей, то из пути Q и отрезков путей P и P' можно составить k-вершинный путь. Поэтому наибольшее независимое множество в графе G можно найти следующим образом: перебираем все независимые множества в графе $G[A]$, для каждого такого множества U находим с помощью алгоритма $\mathbf{A_{k-1}}$ наибольшее независимое множество в графе $G - (A \cup N(U))$ и объединяем его с U. Наибольшее из полученных множеств будет наибольшим независимым множеством графа G. Всего алгоритм $\mathbf{A_{k-1}}$ придётся выполнить не более 2^{k-1} раз, и общая трудоёмкость будет $O(n^{k-1})$. Лемма 1 доказана.

2. Запрещаются граф P_k и его надграфы ограниченной степени

Подграф произвольного графа, имеющий k вершин и гамильтонов путь, назовём *гамильтоновым k-подграфом.* Через $\langle G, \delta < d\rangle$ для графа G обозначим множество всех остовных надграфов графа G, у которых минимальная степень вершины меньше d. В этом разделе предметом рассмотрения будет класс $Free(\langle P_k, \delta < k/2\rangle)$. Его можно определить также как класс графов, у которых в каждом гамильтоновом k-подграфе степень каждой вершины не меньше $k/2$. Будет доказана

Теорема 1. *Класс $Free(\langle P_k, \delta < k/2\rangle)$ НМ-прост при любом $k \geqslant 4$.*

Сумма $G_1 + G_2$ двух графов — это объединение графов с непересекающимися множествами вершин, а *соединение* $G_1 \circ G_2$ получается из суммы добавлением всех рёбер, соединяющих вершины графа G_1 с вершинами графа G_2. Граф, не являющийся суммой или соединением графов, будем называть *неразложимым*. Это означает, что этот граф и дополнительный к нему связны. Очевидно, что наибольшее независимое множество графа G_1+G_2 есть объединение наибольших независимых множеств графов G_1 и G_2, а наибольшее независимое множество графа $G_1 \circ G_2$ есть большее из этих двух множеств.

Лемма 2. *Если G — неразложимый граф из класса $Free(\langle P_{2s}, \delta < s\rangle)$, то в любом его подграфе, изоморфном графу $K_{s,s}$, ни одна из долей $K_{s,s}$ не является независимым множеством графа G.*

Доказательство. Среди всех полных двудольных подграфов графа G, у которых каждая доля содержит не менее s вершин и хотя бы одна из долей является независимым множеством графа G, выберем подграф H с максимальным по включению множеством вершин. Пусть $H \cong K_{p,q}$, A и B — его доли, причём A — независимое множество в G. Так как G неразложим, существует вершина $x \notin A \cup B$, смежная с $A \cup B$. Допустим, что x смежна с вершиной $y \in A$. Ввиду максимальности H в множестве A существует вершина z, не смежная с x. Но тогда вершины x, y, z вместе с любыми другими $s-2$ вершинами из A и любыми $s-1$ вершинами из B порождают гамильтонов $2s$-подграф, в котором вершина z имеет степень $s-1$, а это запрещённый подграф для класса $Free(\langle P_{2s}, \delta < s\rangle)$. Остаётся случай, когда x не смежна ни с одной вершиной из A. Тогда в множестве B имеется смежная с x вершина u, а ввиду максимальности H в B есть и не смежная с x вершина v. Но тогда вершины x, u, v вместе с любыми другими $s-2$ вершинами из B и любыми $s-1$ вершинами из A порождают гамильтонов $2s$-подграф, в котором вершина v имеет степень $s-1$. Лемма 2 доказана.

Костепенью вершины графа будем называть степень этой вершины в дополнительном графе.

Лемма 3. *При любом $k \geqslant 3$ каждый неразложимый граф из класса $Free(\langle P_k, \delta < k/2\rangle)$, у которого костепени всех вершин не меньше $k/2$, принадлежит классу $Free(\langle P_k\rangle)$.*

Доказательство. Рассмотрим граф $G = (V, E)$, удовлетворяющий условиям теоремы. Допустим, в нём имеется простой путь из k вершин. Выберем множество $X \subseteq V$, порождающее гамильтонов k-подграф в графе G и такое, что минимальная степень вершины в графе $G[X]$ принимает наименьшее значение среди всех таких подграфов.

Обозначим наименьшую степень вершины в графе $G[X]$ через d. Так как $d \geqslant k/2$, по теореме Дирака в $G[X]$ имеется гамильтонов цикл. Пусть

$C = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_0)$ — такой цикл, причём x_0 — вершина степени d.

Поскольку костепень вершины x_0 не меньше $k/2$, существует вершина $y \in V - X$, не смежная с x_0. Предположим, что $\deg_X(y) < d$. Вершины кратчайшего пути от y до X, дополненного при необходимости до пути из k вершин отрезком цикла C, порождают гамильтонов k-подграф, в котором степень вершины y меньше d. Это противоречит выбору множества X. Значит, $\deg_X(y) \geqslant d$.

Допустим, на цикле C есть две соседние вершины, смежные с y. Хотя бы одна из вершин x_1, x_{k-1} отлична от этих двух, пусть такова x_1. Тогда множество $(X - \{x_1\}) \cup \{y\}$ порождает гамильтонов k-граф, в котором степень вершины x_0 меньше d. Значит, не более половины вершин цикла C смежны с y. Так как $\deg_X(y) \geqslant d \geqslant k/2$ и y не смежна с x_0, имеется единственная возможность: k чётно, $d = k/2$, вершина y смежна со всеми вершинами множества $X_1 = \{x_1, x_3, \dots, x_{k-1}\}$ и не смежна со всеми вершинами множества $X_0 = \{x_0, x_2, \dots, x_{k-2}\}$. Если предположить, что вершина $z \in X_0$ смежна с x_0, то окажется, что множество $(X - z) \cup \{y\}$ порождает гамильтонов k-подграф, в котором степень вершины x_0 меньше d. Значит, x_0 тоже смежна со всеми вершинами в X_1 и не смежна со всеми в X_0.

Пусть в множестве X_0 имеются две смежные вершины, скажем, x_{2i} и x_{2j}, $0 < i < j$. Тогда множество $(X - \{x_{2j+1})\} \cup \{y\}$ порождает гамильтонов k-подграф: гамильтонов путь в нём образует последовательность $(x_{2j+2}, x_{2j+3}, \dots, x_{k-1}, x_0, x_1, \dots, x_{2i}, x_{2j}, x_{2j-1}, \dots, x_{2i+1}, y)$. В этом подграфе степень вершины x_0 меньше $k/2$. Значит, X_0 — независимое множество, а так как степень каждой из его вершин в графе $G[X]$ не меньше $k/2$, каждая из них смежна со всеми вершинами из X_1. Однако по лемме 2 это невозможно. Лемма 3 доказана.

На основании леммы 3 можно предложить следующий алгоритм решения задачи о независимом множестве для класса $Free(\langle P_k, \delta < k/2 \rangle)$. На входе алгоритма — граф G из этого класса, на выходе — независимое множество S.

1. Проверить, есть ли в графе G вершина с костепенью, меньшей чем $k/2$. Если a — такая вершина, то применить алгоритм рекурсивно к графам $G-a$ и $G-N(a)$. Взять в качестве S большее из двух найденных независимых множеств и завершить работу.

2. Проверить, связен ли граф G. Если нет, найти множество вершин X, порождающее компоненту связности. Применить алгоритм рекурсивно к графам $G[X]$ и $G - X$. Положить S равным объединению двух полученных независимых множеств и завершить работу.

3. Проверить, связен ли граф $\overline{G}$. Если нет, найти множество вершин X, порождающее компоненту связности этого графа. Применить алгоритм рекурсивно к графам $G[X]$ и $G-X$. Положить S равным большему из двух полученных независимых множеств и завершить работу.

4. Найти множество S с помощью алгоритма $\mathbf{A_k}$ (см. доказательство леммы 1).

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось показать, что время работы этого алгоритма ограничено сверху полиномом от числа вершин n. Обозначим это время через $t(n)$. Так как степени вершин можно вычислить за время $O(n^2)$ и так же оценивается время нахождения компоненты связности, при подходящих константах a, b, c имеем

$$t(n) \leqslant \max\{t(n-1) + an^2, \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1}\{t(i) + t(n-i) + bn^2\}, cn^{k-1}\}.$$

Отсюда при $k \geqslant 4$ следует, что $t(n) = O(n^{k-1})$.

3. Запрещаются надграфы графа P_k с большим дефицитом

Дефицитом графа будем называть число рёбер в дополнительном графе. Через $\langle G, \mathrm{def} > d\rangle$ обозначим множество всех остовных надграфов графа G, имеющих дефицит больше d.

Теорема 2. *Класс $Free(\langle P_k, \mathrm{def} > k/2\rangle)$ является* НМ-*простым при любом $k \geqslant 6$.*

Доказательство. Докажем, что при любом $k \geqslant 6$ каждый неразложимый граф из класса $Free(\langle P_k, \mathrm{def} > k/2\rangle)$ либо принадлежит классу $Free(\langle P_k, \delta < k/2\rangle)$, либо имеет вершину, не принадлежащую независимому множеству мощности, большей 2.

Пусть $G = (V, E)$ — граф из класса $Free(\langle P_k, \mathrm{def} > k/2\rangle)$, содержащий простой путь из k вершин. Рассмотрим всевозможные подмножества множества V, порождающие гамильтоновы k-подграфы. Дефицит каждого такого подграфа не превосходит $k/2$, минимальная степень вершины в таком подграфе не меньше чем $k/2-1$. Если в каждом таком подграфе минимальная степень не меньше $k/2$, то $G \in Free(\langle P_k, \delta < k/2\rangle)$. В противном случае имеется $X \subseteq V$, порождающее гамильтонов k-подграф, в котором минимальная степень δ удовлетворяет неравенствам $k/2 - 1 \leqslant \delta < k/2$. Таким образом, $\delta = \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor$. Пусть a — вершина степени δ в $G[X]$. Остальные вершины из X разделим на два подмножества: Y — вершины, смежные с a, и Z — не смежные с a. Каждая из Y имеет степень $k-1$, а каждая из Z — степень $k-2$. При этом $|Y| = \delta$, а $|Z| = k - 1 - \delta$.

Если a смежна со всеми вершинами вне X, то наибольшая мощность независимого множества, которому она принадлежит, равна 2. Пусть $b \notin X$ — вершина, не смежная с a, но смежная хотя бы с одной вершиной из X. Построим новое множество X', добавив к X вершину b и удалив одну из вершин в соответствии со следующим правилом: если в Z имеется вершина, смежная с b, то удаляется любая вершина из Y, а если b не смежна ни с одной вершиной из Z, то удаляется любая вершина из Z. В любом случае X' порождает гамильтонов k-подграф. В первом случае дефицит этого подграфа не меньше чем $|Z| + 1 = k - \delta > \frac{k}{2}$, во втором он не меньше чем $2(|Z| - 1) = 2(k - 2 - \delta) = 2(k - 2 - \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor) = 2 \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor$. Легко проверить, что $2 \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor > \frac{k}{2}$ при $k \geqslant 6$. Таким образом, в любом случае $G[X']$ — запрещённый подграф для класса $Free(\langle P_k, \mathrm{def} > k/2 \rangle)$. Теорема 2 доказана.

4. Классы, замкнутые относительно самопересечений

Пересечением графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$, а *объединением* — граф $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Пусть $G = (V, E)$ — граф. Для инъективного отображения α, определённого на множестве V, через G^α обозначаем граф (V^α, E^α), где $V^\alpha = \{\alpha(x) \mid x \in V\}$, $E^\alpha = \{(\alpha(x), \alpha(y)) \mid (x, y) \in E\}$. Любой граф вида $G^{\alpha_1} \cap G^{\alpha_2} \cap \dots \cap G^{\alpha_k}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — инъективные отображения множества V, будем называть *самопересечением* графа G. В частности, любой граф вида $G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_k$, где $G_1, G_2, \ldots G_k$ — графы, изоморфные G и имеющие множество вершин V, есть самопересечение графа G. Если граф H является самопересечением графа G, то пишем $G \overset{\cap}{\to} H$. Нетрудно видеть, что отношение $\overset{\cap}{\to}$ транзитивно.

Лемма 4. *Если H — порождённый подграф графа G, то $G \overset{\cap}{\to} H$.*

Доказательство. Пусть граф G имеет множество вершин V, а подграф H порождается множеством $U \subset V$. Возьмём какие-либо инъективные отображения α и β на множестве V, оставляющие вершины из U неподвижными, а на остальные вершины действующие так, что $\alpha(V - U) \cap \beta(V - U) = \varnothing$. Тогда $G^\alpha \cap G^\beta = H$. Лемма 4 доказана.

Теорема 3. *Каждый монотонный класс замкнут относительно самопересечений. Каждый класс, замкнутый относительно самопересечений, является наследственным.*

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что самопересечение любого графа изоморфно его подграфу, а второе — из леммы 4. Теорема 3 доказана.

Обозначим через $\langle \overset{\sqcap}{\to} G\rangle$ множество всех таких графов H, что $H \overset{\sqcap}{\to} G$. Оставшаяся часть настоящего раздела посвящена доказательству следующего утверждения.

Теорема 4. *Класс $Free(\langle \overset{\sqcap}{\to} P_k\rangle)$ НМ-простой при любом k.*

Гамильтонов цикл в графе с множеством вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$ будем называть *стандартным*, если пары $(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n), (n, 1)$ являются его рёбрами. Если в графе есть такой цикл, то *цикловым расстоянием* между вершинами i и j назовём расстояние между ними на этом цикле, т. е. величину $\min(|i-j|, n-|i-j|)$. *Хорда* цикла — это ребро, соединяющее две вершины цикла, но не принадлежащее ему. *Длиной хорды* называем расстояние на цикле между её вершинами.

Введём две операции над графами.

1) *Вращение.* Пусть G — граф с множеством вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$, α — циклический сдвиг на этом множестве: $\alpha(x) = x+1$ при $x \leqslant n-1$, $\alpha(n) = 1$. Операция вращения преобразует граф G в граф $G^\circ = G \cap G^\alpha \cap G^{\alpha^2} \cap \ldots \cap G^{\alpha^{n-1}}$. Очевидно, что $G \overset{\sqcap}{\to} G^\circ$.

Если в графе G имеется стандартный гамильтонов цикл, то такой цикл будет и в графе G°. При этом относительно этого цикла при любом $i = 2, 3, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$ в графе G° либо имеются все возможные хорды длины i, либо нет ни одной такой хорды. Такие графы называют *циркулянтными.*

2) *Кручение.* Пусть G — граф с множеством вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$, α — подстановка на этом множестве, определяемая следующим образом:

$$\alpha(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant k, \\ n+k+1-x & \text{при } x > k. \end{cases}$$

Операцию преобразования графа G в граф G^α будем называть *кручением порядка k*. Если в графе G имеется стандартный гамильтонов цикл с хордами $(1, k+1)$ и (k, n), то в графе G^α тоже будет стандартный гамильтонов цикл.

Лемма 5. *Если G — граф с нечётным числом вершин n, имеющий гамильтонов цикл и не являющийся полным, то $G \overset{\sqcap}{\to} C_n$.*

Доказательство. Предполагаем, что граф G имеет множество вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n = 2s+1$, и в нём имеется стандартный гамильтонов цикл. Покажем, что последовательностью вращений, кручений и пересечений граф G можно преобразовать в граф C_n. Граф, образующийся на разных этапах этих преобразований, обозначаем одной и той же буквой H, вначале $H = G$. В ходе всех преобразований сохраняются два свойства:

- $G \overset{\cap}{\to} H$;
- в H имеется стандартный гамильтонов цикл.

Все хорды, упоминаемые далее в этом доказательстве, суть хорды относительно стандартного гамильтонова цикла. Преобразования выполняются в три этапа.

1. Выполним вращение и получим циркулянтный граф H.

2. Устраним хорды длины s, если такие имеются. Применим к графу H кручение α порядка s. Так как обе хорды $(1, s+1)$ и $(s, 2s+1)$ имеют длину s, они присутствуют в графе H, следовательно, в графе H^α тоже имеется стандартный гамильтонов цикл. Покажем, что для любого $j \in \{2, \ldots, s-1\}$ существует пара вершин с цикловым расстоянием j, переходящая под действием подстановки α в пару с цикловым расстоянием s. Действительно, при нечётном j такой является пара $((j+1)/2,\ 2s+2-(j+1)/2)$, переходящая в пару $((j+1)/2,\ s+(j+1)/2)$, а при чётном — пара $(s-j/2+1,\ s+j/2+1)$, она переходит в пару $(s-j/2+1,\ 2s+1-j/2)$. Поскольку граф H не полный, найдётся такое j, что хорд длины j в нём нет. Тогда преобразуем H в граф $(H \cap H^\alpha)^\circ$, в котором не будет хорд длины s.

3. Устраним остальные хорды. Допустим, в графе H есть хорды длины $k < s$ и нет хорд большей длины. Выполним кручение порядка k. Если k чётное, то пара $(k/2+1,\ n-k/2)$ с цикловым расстоянием $k+1$ перейдёт при этом в пару $(k/2+1,\ 3k/2+1)$, имеющую цикловое расстояние k. Если k нечётное, то рассмотрим пару $((k+3)/2,\ n-(k+1)/2)$. Если $k < s-1$, то её цикловое расстояние равно $k+2$, если же $k = s-1$, то оно равно s. В результате кручения она перейдёт в пару $((k+3)/2,\ (3k+3)/2)$ с цикловым расстоянием k. В любом случае пара с цикловым расстоянием, большим k, переходит в пару с цикловым расстоянием k. Значит, в графе $(H \cap H^\alpha)^\circ$ не будет хорд длины k и выше. Повторяя эти действия, в конечном счёте получим граф, имеющий стандартный гамильтонов цикл и не имеющий хорд, т. е. C_n. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *При любом $k \geqslant 3$ любой двусвязный граф из класса $Free(\langle \overset{\cap}{\to} P_k\rangle)$ либо является полным графом, либо не содержит нечётных циклов длины больше k.*

Доказательство. Пусть G — двусвязный граф из $Free(\langle \overset{\cap}{\to} P_k\rangle)$ содержащий нечётный цикл длины $n > k$, H — подграф, порождённый множеством вершин такого цикла. Тогда H — полный подграф, иначе по леммам 3 и 4 было бы $G \overset{\cap}{\to} H \overset{\cap}{\to} C_n \overset{\cap}{\to} P_k$. Значит, мощность наибольшей клики в графе G не меньше n. Допустим, граф G не полный. Пусть X — наибольшая клика в G, x — вершина вне X, смежная с вершиной $y \in X$ и не смежная с вершиной $z \in X$. Так как граф G двусвязный, существует путь из x в X, не содержащий вершину y. Пусть P — кратчайший из таких путей. Поскольку в графе G нет порождённого подграфа P_k, число вершин в P не превосходит $k-1$. Добавив к множеству вершин этого пути вершины y, z и необходимое количество других вершин из X, получим множество из n вершин, порождающее подграф, содержащий цикл длины n и не являющийся полным. Но выше было показано, что таких подграфов в графе G не существует. Лемма 6 доказана.

Утверждение теоремы 4 следует из леммы 5 и следующих двух фактов, первый из которых доказан в [4], а второй — в [7].

1. Если $\mathcal{X}$ — НМ-простой наследственный класс графов, то класс всех графов, у которых каждый блок принадлежит $\mathcal{X}$, тоже НМ-простой.

2. При любом k класс всех графов, не содержащих нечётных циклов длины, большей k, НМ-простой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1982. С. 3–13.
2. **Алексеев В. Е.** О числе тупиковых независимых множеств в графах из наследственных классов // Комбинаторно-алгебраические методы в дискретной оптимизации. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1991. С. 5–8.
3. **Алексеев В. Е.** Полиномиальный алгоритм для нахождения наибольших независимых множеств в графах без вилок // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 4. С. 3–19.
4. **Алексеев В. Е., Коробицын Д. В.** О сложности некоторых задач на наследственных классах графов // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, № 4. С. 34–40.
5. **Малышев Д. С., Сироткин Д. В.** Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве в одном классе субкубических планарных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2017. Т. 24, № 3. С. 35–60.
6. **Grzesik A., Klimošová T., Pilipczuk Mar., Pilipczuk Mic.** Polynomial-time algorithm for maximum weight independent set on P_6-free graphs // arXiv.org/abs/1707.05491, 2017.
7. **Hsu W., Ikura Y., Nemhauser G. L.** A polynomial algorithm for maximum weighted vertex packing in graphs without long odd cycles // Math. Program. 1981. V. 20. P. 225–232.

8. **Karthick T., Maffray F.** Weighted independent sets in classes of P_6-free graphs // Discrete Appl. Math. 2016. V. 209. P. 217–226.
9. **Lokshtanov D., Vatshelle M., Villanger Y.** Independent set in P_5-free graphs in polynomial time // Proc. 25th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (SODA 2014, Portland, Oregon, USA, Jan. 5–7, 2014). Philadelphia, PA: SIAM, 2014. P. 570–581.
10. **Lozin V. V., Monnot J., Ries B.** On the maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs // J. Discrete Algorithms. 2015. V. 31. P. 104–112.
11. **Lozin V. V., Mosca R.** Independent sets in extension of $2K_2$-free graphs // Discrete Appl. Math. 2005. V. 146. P. 74–80.
12. **Lozin V. V., Rautenbach D.** Some results on graphs without long induced paths // Inf. Process. Lett. 2003. V. 88. P. 167–171.

Алексеев Владимир Евгеньевич,
Сорочан Сергей Владимирович

Статья поступила
8 июня 2017 г.

Исправленный вариант —
22 ноября 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2018. Volume 25, No. 2. P. 5–18

UDC 519.178 DOI: 10.17377/daio.2018.25.581

NEW CASES OF THE POLYNOMIAL SOLVABILITY OF THE INDEPENDENT SET PROBLEM FOR GRAPHS WITH FORBIDDEN PATHS

V. E. Alekseev[a] and *S. V. Sorochan*[b]
Lobachevskii Nizhniy Novgorod State University, IITMM,
23 Gagarin Ave., 603950 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: [a]aleve@rambler.ru, [b]svs-05@mail.ru

Abstract. The independent set problem is solvable in polynomial time for the graphs not containing the path P_k for any fixed k. If the induced path P_k is forbidden then the complexity of this problem is unknown for $k > 6$. We consider the intermediate cases that the induced path P_k and some of its spanning supergraphs are forbidden. We prove the solvability of the independent set problem in polynomial time for the following cases: (1) the supergraphs whose minimal degree is less than $k/2$ are forbidden; (2) the supergraphs whose complementary graph has more than $k/2$ edges are forbidden; (3) the supergraphs from which we can obtain P_k by means of graph intersection are forbidden. Bibliogr. 12.

Keywords: independent set, forbidden subgraph, path, supergraph, polynomial time.

REFERENCES

1. **V. E. Alekseev,** On the local restriction effect on the complexity of finding the graph independence number, in *Kombinatorno-algebraicheskie metody v prikladnoi matematike* (Combinatorial and algebraic methods in applied mathematics), pp. 3–13, Gorky: Izd. Gorkovskogo Univ., 1982.
2. **V. E. Alekseev,** On the number of maximal independent sets in graphs from hereditary classes, in *Kombinatorno-algebraicheskie metody v diskretnoi optimizatsii* (Combinatorial and algebraic methods in discrete optimization), pp. 5–8, Nizhny Novgorod: Izd. NNGU, 1991.
3. **V. E. Alekseev,** A polynomial algorithm for finding the largest independent sets in claw-free graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **6**, No. 4, 3–19, 1999. Translated in *Discrete Appl. Math.,* **135**, No. 1–3, 3–16, 2004.
4. **V. E. Alekseev** and **D. V. Korobitsyn,** Complexity of some problems for hereditary classes of graphs, *Diskretn. Mat.,* **4**, No. 4, 34–40, 1992.

5. **D. S. Malyshev** and **D. V. Sirotkin,** Polynomial-time solvability of the independent set problem in a certain class of subcubic planar graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **24**, No. 3, 35–60, 2017. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **11**, No. 3, 400–414, 2017.
6. **A. Grzesik, T. Klimošová, Mar. Pilipczuk,** and **Mic. Pilipczuk,** Polynomial-time algorithm for Maximum Weight Independent Set on P_6-free graphs, 2017 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1707.05491).
7. **W. Hsu, Y. Ikura,** and **G. L. Nemhauser,** A polynomial algorithm for maximum weighted vertex packing in graphs without long odd cycles, *Math. Program.,* **20**, 225–232, 1981.
8. **T. Karthick** and **F. Maffray,** Weighted independent sets in classes of P_6-free graphs, *Discrete Appl. Math.,* **209**, 217–226, 2016.
9. **D. Lokshtanov, M. Vatshelle,** and **Y. Villanger,** Independent set in P_5-free graphs in polynomial time, in *Proc. 25th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, Portland, OR, USA, Jan. 5–7, 2014,* pp. 570–581, SIAM, Philadelphia, PA, 2014.
10. **V. V. Lozin, J. Monnot,** and **B. Ries,** On the maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs, *J. Discrete Algorithms,* **31**, 104–112, 2015.
11. **V. V. Lozin** and **R. Mosca,** Independent sets in extension of $2K_2$-free graphs, *Discrete Appl. Math.,* **146**, No. 1, 74–80, 2005.
12. **V. V. Lozin** and **D. Rautenbach,** Some results on graphs without long induced paths, *Inf. Process. Lett.,* **88**, 167–171, 2003.

Vladimir E. Alekseev,
Sergey V. Sorochan

Received
8 June 2017
Revised
22 November 2017