

ГРАФЫ, ПРЕДСТАВИМЫЕ В ВИДЕ СЛОВ.
ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ *)

С. В. Китаев^{1,a}, А. В. Пяткин^{2,3,b}

¹University of Strathclyde,
Livingstone Tower, 26 Richmond St., Glasgow, G1 1XH, UK

²Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

³Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: ^asergey.kitaev@cis.strath.ac.uk, ^bartem@math.nsc.ru

Аннотация. Будем говорить, что буквы x и y чередуются в слове w , если при удалении из w всех букв кроме x и y получается либо слово вида $xuxu\dots$, либо слово вида $yxux\dots$ (каждое из этих слов может иметь как чётную, так и нечётную длину). Граф $G = (V, E)$ представим в виде слова, если существует конечное слово w над алфавитом V , в котором буквы x и y чередуются тогда и только тогда, когда $xy \in E$.

Графы, представимые в виде слов, включают многие важные классы графов, например: графы пересечения хорд, 3-раскрашиваемые графы и графы сравнимости. В настоящей статье даётся полный обзор известных результатов по теории графов, представимых в виде слов, включая самые последние достижения в этой области. Табл. 2, ил. 11, библиогр. 48.

Ключевые слова: представление графов, ориентация, слово, паттерн.

Введение

Теория графов, представимых в виде слов, является молодым, но довольно перспективным направлением. Это понятие было впервые введено С. В. Китаевым по мотивам работы [36], посвящённой изучению полугрупп Перкинса, которые играют центральную роль в теории полугрупп с 1960 г., в частности, как инструмент для построения примеров и контрпримеров [42]. Однако первым систематическим исследованием графов, представимых в виде слов, следует назвать работу [34], с которой

*)Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.5.1 (проект 0314-2016-0014).

и началось развитие этой теории. К настоящему моменту имеется около 20 статей, в которых изучается данное направление, а также книга С. Китаева и В. Лозина [33], посвящённая теории графов, представимых в виде слов. Для работы с такими графами имеется программный продукт, сделанный М. Гленом [23], заметно облегчающий проведение исследований.

В [33] можно найти много примеров о связи графов, представимых в виде слов, с различными прикладными задачами, что обуславливает интерес к изучению этих графов. Они имеют применение в алгебре, теории графов, информатике, комбинаторике слов и теории расписаний. В частности, с теоретико-графовой точки зрения они важны потому, что обобщают несколько фундаментальных классов графов (например, графы пересечения хорд [12], 3-раскрашиваемые графы [4] и графы сравнимости [39]). Связь с теорией расписаний описана в [26].

Естественным образом возникают следующие вопросы.

- Все ли графы представимы в виде слов?
- Если нет, то можно ли охарактеризовать графы, представимые или не представимые в виде слов?
- Как много имеется графов, представимых в виде слов?
- Чему равно число представимости графа, т. е. минимальная длина слова, представляющего заданный граф?
- Насколько трудно (с алгоритмической точки зрения) определить, является ли граф представимым в виде слова или нет?
- Какие операции над графами сохраняют свойства представимости или непредставимости графа в виде слова?
- Какие графы из наиболее интересного для читателя класса графов представимы в виде слов?

В настоящей статье предлагается полный обзор по графам, представимым в виде слов. Хотя часть из представленных результатов встречались ранее в [33], в обзоре отражены также новейшие достижения в этой области. С другой стороны, некоторые обобщения теории графов, представимых в виде слов [30], которые обсуждаются в [33, гл. 6], в настоящий обзор не включены. Также ввиду ограниченности объёма статьи часть доказательств опущена, хотя основные идеи доказательств авторы, по возможности, пытаются в тексте отразить.

Отметим, что другие виды взаимосвязи между словами и графами встречались в литературе довольно часто. Наиболее известный из них — это слова Прюфера для деревьев [45]. Аналогичные взаимосвязи известны для пороговых графов [13], графов букв [43], графов переста-

новоков [38], графов пересечений вписанных многоугольников [37], почти периодических слов (с переходом к числу Белла для свойств наследственных графов [3]) и ряда других графов [7, 19]. Более детальную информацию можно найти в [33, гл. 8].

Статья структурирована следующим образом. В разд. 1 вводятся понятия графов, представимых в виде слов, а также числа представимости таких графов. Далее рассматриваются графы с числом представимости не более 3 и графы с большим числом представимости. В разд. 2 даётся определение перестановочно представимых графов и обосновывается его важность. Графы, представимые в виде слов, избегающих заданного паттерна, обсуждаются в разд. 3. Разд. 4 посвящён технике полутранзитивных ориентаций, которая играет ключевую роль при изучении графов, представимых в виде слов. Непредставимые в виде слов графы исследуются в разд. 5, а операции на графах — в разд. 6. В частности, рассматриваются операции дополнения, подразбиения рёбер, стягивания рёбер, соединения графов ребром, склеивания графов по клике, замены вершины модулем, декартово произведение, корневое произведение и переход к рёберным графам. В разд. 7 представлены результаты, касающиеся вычислительной сложности, а в разд. 8 изучается представимость в виде слов плоских графов. Наконец, в разд. 9 приводятся открытые проблемы и направления для дальнейших исследований.

1. Графы, представимые в виде слов. Основные определения

Все неопределяемые в статье понятия можно найти в стандартных учебниках по теории графов [18, 48] или теории слов [5, 6]. Все рассматриваемые в работе графы являются простыми, т. е. не содержат петель и/или параллельных рёбер.

Пусть w — слово над некоторым алфавитом, а x и y — две его различные буквы. Будем говорить, что x и y *чередуются* в w , если после удаления из w всех букв кроме копий x и y , получится либо слово вида $xuxu\dots$, либо слово вида $yxux\dots$ (длина каждого из этих слов может быть как чётной, так и нечётной). Например, в слове 2311251324132 буквы 2 и 3 чередуются, так же как и буквы 4 и 5, а любая другая пара букв не чередуется.

Определение 1. Граф $G = (V, E)$ *представим в виде слова*, если существует такое слово w , содержащее каждую букву из алфавита V , что буквы x и y , $x \neq y$, чередуются в w тогда и только тогда, когда $xy \in E$. Будем также говорить, что слово w *представляет* G , и называть w *представляющим словом*.

Заметим, что определение 1 не зависит от выбора меток вершин, так что граф G может считаться немеченым. Отметим также, что слов, представляющих один и тот же граф, может быть бесконечно много. Например, каждый полный граф K_n можно представить произвольным числом конкатенаций одной и той же перестановки π над множеством $\{1, 2, \dots, n\}$, а для представления безрёберного графа E_n с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$ подходит любое слово вида $w_1 12 \dots nn(n-1) \dots 1w_2$, где w_1 и w_2 — произвольные слова над алфавитом V .

Класс графов, представимых в виде слов, является наследственным, т. е. замкнутым относительно удаления вершин (действительно, если слово w представляет граф G , то слово w' , полученное из w удалением всех копий буквы v , представляет граф $G \setminus \{v\}$). Это наблюдение помогло найти единственную известную на сегодняшний день асимптотику для числа графов, представимых в виде слов [17], которая приведена ниже.

Теорема 1 [17]. Число n -вершинных графов, представимых в виде слов, равно $2^{\frac{n^2}{3} + o(n^2)}$.

1.1. k -Представимость и число представимости графа. Слово w называется k -униформным, если каждая буква встречается в w ровно k раз. Например, слово 243321442311 3-униформно, а любая перестановка является 1-униформным словом.

Определение 2. Граф G называется k -представимым в виде слова (далее будем для краткости писать k -представимым), если существует k -униформное слово w , представляющее его. В таком случае будем говорить, что w k -представляет G .

Следующая теорема показывает эквивалентность определений 1 и 2.

Теорема 2 [34]. Граф представим в виде слова тогда и только тогда, когда он k -представим для некоторого k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что k -представимость влечёт представимость в виде слова. Докажем обратное. Пусть слово w_0 представляет граф G , причём каждая буква встречается в w_0 не более k раз. Обозначим через A множество букв, встречающихся ровно k раз. Если $A \neq V$, то рассмотрим слово w' , полученное удалением из w_0 всех букв из A . Пусть $p(w')$ является его начальной перестановкой (т. е. перестановкой, которая получается удалением из w' всех кроме первой копий каждой буквы). Нетрудно проверить [34], что слово $w_1 = p(w')w_0$ также представляет граф G . Если оно не является k -униформным, то повторяем

ту же самую процедуру до тех пор, пока не получим k -униформное слово, представляющее G . Теорема 2 доказана.

Например, если $k = 3$ и $w_0 = 3412132154$, то $w_1 = 34253412132154$ и $w_2 = 534253412132154$ представляют тот же самый граф, причём последнее слово является 3-униформным.

Используя те же аргументы, что и в теореме 2, можно доказать, что каждый граф, представимый в виде слова, имеет бесконечно много слов, которые его представляют.

Теорема 3 [34]. *Любой k -представимый граф G является $(k + 1)$ -представимым.*

Отметим, что слово и его циклический сдвиг могут, вообще говоря, представлять разные графы (например, 112 и 121). Однако в случае униформного слова циклический сдвиг всегда представляет тот же самый граф.

Утверждение 1 [34]. *Пусть $w = uv$ является k -униформным словом, представляющим граф G , где u и v — некоторые слова над алфавитом V . Тогда слово $w' = vu$ также представляет G .*

Из теоремы 2 вытекает корректность следующего определения.

Определение 3. *Числом представимости графа G называется минимальное k , для которого G является k -представимым. Для непредставимых графов (существование которых будет показано ниже) можно считать $k = \infty$. Обозначим через $\mathcal{R}(G)$ число представимости графа G и положим $\mathcal{R}_k = \{G \mid \mathcal{R}(G) = k\}$.*

Очевидно, что $\mathcal{R}_1 = \{G \mid G \text{ полный граф}\}$. В следующем пункте дано описание класса \mathcal{R}_2 .

1.2. Графы с числом представимости 2. Сначала приведём четыре примера классов графов с числом представимости 2, а именно: безрёберные графы, деревья и леса, циклы и лестницы. Далее установим, что графы с числом представимости 2 суть в точности графы пересечения хорд (определение этого класса приведено ниже в п. 5).

1. БЕЗРЁБЕРНЫЕ ГРАФЫ. Поскольку при $n \geq 2$ граф E_n не является полным, то $\mathcal{R}(E_n) \geq 2$. С другой стороны, как показано выше, E_n представим в виде конкатенации двух перестановок, а значит, $\mathcal{R}(E_n) = 2$.

2. ДЕРЕВЬЯ И ЛЕСА. Покажем по индукции, что любое дерево T является 2-представимым, а значит, при наличии в T не менее трёх вершин $\mathcal{R}(T) = 2$. Если в дереве 1 или 2 вершины, то его можно представить

словом 11 или 1212 соответственно. Пусть любое дерево на $n - 1$ вершинах 2-представимо при $n \geq 3$. Рассмотрим дерево T на n вершинах, и пусть x является в нём листом, соединённым с вершиной y . Удалив x , получим дерево T' , которое можно представить 2-униформным словом вида $w_1 y w_2 y w_3$, где подслова w_1 , w_2 и w_3 не содержат буквы y (отметим, что некоторые из этих подслов могут оказаться пустыми). Тогда нетрудно убедиться, что слово $w_1 y w_2 x y w_3$ (так же как и слово $w_1 x y w_2 y w_3$) 2-представляет исходное дерево T .

Если лес F содержит несколько компонент (деревьев), то конкатенация 2-униформных слов, представляющих каждое дерево, очевидно 2-представляет F . Таким образом, для любого леса F хотя бы с двумя деревьями имеем $\mathcal{R}(F) = 2$.

3. Циклы. Для 2-представления цикла C_n сначала найдём представление пути P_n на n вершинах, используя вышеописанный метод 2-представления деревьев, затем сдвинем полученное слово на 1 позицию вправо (это слово все ещё будет представлять P_n по утверждению 1) и поменяем местами первые две буквы. Проиллюстрируем это на примере цикла C_6 . Следуя индукции из предыдущего примера, строим 2-представление пути P_6 :

$$1212 \rightarrow 121323 \rightarrow 12132434 \rightarrow 1213243545 \rightarrow 121324354656.$$

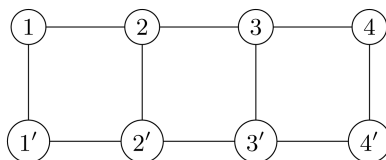
Сдвиг на 1 позицию вправо даёт слово 612132435465. Меняя местами первые две буквы этого слова, получим слово 162132435465, 2-представляющее C_6 .

Т а б л и ц а 1
2-представление лестницы L_n при $n = 1, 2, 3, 4$

n	2-представление лестницы L_n
1	11'11'
2	1'212'21'2'1
3	12'1'323'32'3'121'
4	1'213'2'434'43'4'231'2'1

4. ЛЕСТНИЦЫ. Лестницей L_n называется граф, содержащий $2n$ вершин и $3n - 2$ рёбер, который получен из двух копий пути P_n добавлением рёбер, соединяющих копии одной и той же вершины. Пример лестницы при $n = 4$ представлен на рис. 1. В [32] по индукции доказано, что $\mathcal{R}(L_n) = 2$ при $n \geq 2$. Табл. 1 даёт 2-представления L_n при $n = 1, 2, 3, 4$.

5. ГРАФЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ХОРД. Граф G называется *графом пересечения хорд*, если его вершинам можно поставить в соответствие хорды

Рис. 1. Лестница L_4

некоторой окружности так, что две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им хорды пересекаются (как кривые на плоскости). На рис. 2 приведён пример такого графа и соответствующее ему семейство хорд.

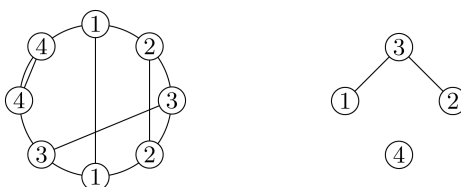


Рис. 2. Семейство хорд и соответствующий ему граф пересечения хорд

Следующая теорема завершает характеристику класса \mathcal{R}_2 .

Теорема 4. *Имеет место равенство $\mathcal{R}_2 = \{G \mid G \text{ является графом пересечения хорд, отличным от полного графа}\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — граф пересечения хорд. Рассмотрим соответствующее ему семейство хорд. Можно считать, что все концы хорд различны. Начав с произвольного конца хорды, пойдём по окружности по часовой стрелке, записывая номера всех хорд, концы которых встречаются при обходе. В результате получится 2-униформное слово w , в котором буквы x и y чередуются тогда и только тогда, когда соответствующие им хорды x и y пересекаются, т. е. вершины x и y смежны в G . Например, для графа на рис. 2 получим слово 13441232, которое 2-представляет изображённый граф. Обратно, пусть G 2-представим в виде слова w . Выберем на окружности $2n$ точек, пометим их по циклу буквами слова w и проведём хорды, соединяющие точки с одинаковыми метками. Нетрудно видеть, что данное семейство хорд порождает граф G . Таким образом, G является графом пересечения хорд тогда и только тогда, когда $G \in \mathcal{R}_2$, за исключением полных графов, которые лежат в классе \mathcal{R}_1 . Теорема 4 доказана.

Отметим, что хотя класс графов пересечений хорд является наследственным, до настоящего времени неизвестно его представление на языке запрещённых подграфов. Таким образом, теорема 4 может быть использована для проверки принадлежности тех или иных графов к этому классу.

1.3. Графы с числом представимости 3. В отличие от графов с числом представимости 2, полной характеристики 3-представимых графов в настоящее время неизвестно. Однако об этом классе имеется ряд интересных результатов, представленных ниже.

1. ГРАФ ПЕТЕРСЕНА. В 2010 г. А. Коновалов и Р. Линтон с помощью компьютера не только показали, что граф Петерсена (рис. 3) не является 2-представимым, но и нашли два различных 3-представления для него:

- 138729607493541283076850194562,
- 134058679027341283506819726495.

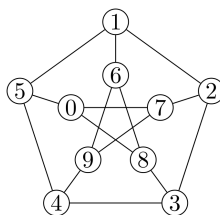


Рис. 3. Граф Петерсена

Приведём доказательство того, что граф Петерсена не лежит в классе \mathcal{R}_2 .

Теорема 5 [27]. *Граф Петерсена не является 2-представимым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что граф Петерсена 2-представим. Пусть w является 2-униформным словом, которое его представляет. Обозначим через x такую букву в слове w , что число букв между двумя копиями x минимально. Поскольку граф Петерсена однородный степени 3, нетрудно видеть, что между двумя копиями x будет ровно три различные буквы (если бы букв было больше, то среди них были бы хотя бы две одинаковые, что противоречит выбору x).

Из соображений симметрии и по утверждению 1 можно считать, что $x = 1$ и слово w начинается с 1. Тогда буквы 2, 5 и 6 лежат между двумя копиями 1. Так как граф Петерсена рёберно-транзитивный (т. е. для любых двух рёбер e_1, e_2 существует автоморфизм, переводящий e_1 в e_2 ; в частности, любое ребро можно сделать «внутренним»), а вершины 2,

5 и 6 попарно не смежны, можно считать, что $w = 12561w_16w_25w_32w_4$, где $w_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, являются какими-то (возможно, пустыми) словами, не содержащими букв 1, 2, 5, 6. Чтобы чередоваться с 6, но не чередоваться с 5, буква 8 должна быть в w_1 и w_2 . Аналогично, чтобы чередоваться с 2 и не чередоваться с 5, буква 3 должна быть в w_3 и w_4 . Но тогда w содержит подслово 8833, т. е. 8 и 3 несмежны; противоречие. Теорема 5 доказана.

2. ПРИЗМЫ. Призмой Pr_n называется граф, состоящий из двух копий цикла C_n с вершинами $12 \dots n$ и $1'2' \dots n'$ (здесь $n \geq 3$ и вершины обоих циклов перечислены в циклическом порядке), соединённых рёбрами вида ii' для $i = 1, \dots, n$. Например, трёхмерный куб является призмой Pr_4 .

Теорема 6 [34]. Каждая призма Pr_n 3-представима.

В [34] также было показано, что треугольная призма Pr_3 не является 2-представимой. Аналогичное утверждение верно и для всех остальных призм.

Теорема 7 [32]. Никакая призма Pr_n не является 2-представимой.

Из теорем 6 и 7 следует, что $\text{Pr}_n \in \mathcal{R}_3$ для всех $n \geq 3$.

3. РАСКРАСКА ГРАФОВ В \mathcal{R}_3 . Теорема 12 ниже показывает, что \mathcal{R}_3 не включает в себя класс двудольных графов, а значит, и класс c -раскрашиваемых графов для любого $c \geq 3$.

Естественно задать обратный вопрос: верно ли, что класс \mathcal{R}_3 лежит в классе c -раскрашиваемых графов для некоторого c ? Простой аргумент, связанный с заменой вершины в 3-представимой треугольной призме Pr_3 полным подграфом определённого размера, позволяет доказать следующий результат.

Теорема 8 [32]. Класс \mathcal{R}_3 не является подклассом c -раскрашиваемых графов ни для какого c .

4. ПОДРАЗБИЕНИЯ ГРАФОВ. Следующая теорема оказывается полезным инструментом для построения 3-представимых графов.

Теорема 9 [34]. Пусть $G = (V, E)$ — 3-представимый граф и $x, y \in V$. Обозначим через H граф, полученный из G добавлением к нему пути длины не менее 3, соединяющего x и y . Тогда H также 3-представим.

Напомним определения некоторых операций над графами. Подразбиением графа G называется граф, полученный из G заменой каждого ребра xy простым путём из x в y . Подразбиение называется k -подразбиением, если каждый из этих путей имеет длину не меньше k . Стягиванием ребра называется операция замены его концов одной вершиной, смежной

со всеми соседями хотя бы одного из концов этого ребра, и удаления образовавшихся петель и параллельных рёбер. Неориентированный граф G является *минором* неориентированного графа H , если G может быть получен из H операциями стягивания рёбер, удаления вершин и удаления рёбер.

Теорема 10 [34]. *Для любого графа G существует бесконечно много 3-представимых графов H , содержащих минор G , причём все эти примеры могут быть получены из G с помощью 3-подразбиения.*

Для доказательства теоремы показывается, что 3-подразбиение любого графа G всегда 3-представимо. Также из теоремы 9 и доказательства теоремы 10 в [34] следует, что граф, полученный из безрёберного графа добавлением путей длины не меньше 3 между некоторыми парами вершин, 3-представим.

Наконец, отметим, что 2-подразбиение всех рёбер даёт двудольный граф, который представим по теореме 13 (см. разд. 2).

1.4. Графы с большим числом представимости. Из теоремы 28 мы увидим, что верхняя оценка на длину кратчайшего равномерного слова, представляющего n -вершинный граф G , не превосходит $2n^2$, т. е. достаточно $2n$ копий каждой буквы. Далее покажем существование класса графов, которые требуют ровно $\lfloor n/2 \rfloor$ копий каждой буквы для своего представления. Это самое длинное кратчайшее слово, представляющее граф, известное в настоящий момент.

Граф-корона $H_{k,k}$ — это граф, получаемый из полного двудольного графа $K_{k,k}$ удалением совершенного паросочетания.

По теореме 13 $H_{k,k}$ может быть представлен конкатенацией перестановок, поскольку $H_{k,k}$, как и всякий двудольный граф, является графом сравнимости (см. разд. 2). Известно, что для представления $H_{k,k}$ требуется k перестановок. Можно ли найти более короткое представление? Ниже показано, что да, но представление все равно получается длинным (линейным по k).

Очевидно, что $H_{1,1} \in \mathcal{R}_2$ и $H_{2,2} \in \mathcal{R}_2$ ($H_{2,2}$ можно представить словом $121'2'212'1'$). Кроме того, $H_{3,3} = C_6 \in \mathcal{R}_2$ и $H_{4,4} = \text{Pr}_4 \in \mathcal{R}_3$, как показано выше. Следующая теорема определяет число представимости $\mathcal{R}(H_{k,k})$ для $k \geq 5$.

Теорема 11 [25]. *При $k \geq 5$ число представимости графа $H_{k,k}$ равно $\lfloor k/2 \rfloor$.*

Обозначим через G_k граф, полученный из графа-короны $H_{k,k}$ добавлением *всесмежной* (т. е. смежной со всеми остальными вершинами

графа) вершины. Отметим, что G_k содержит $n = 2k + 1$ вершин.

Граф G_k является наихудшим известным примером с точки зрения длины кратчайшего представляющего слова.

Теорема 12 [34]. Число представимости графа G_k равно $\lfloor (2k+1)/2 \rfloor$.

Неизвестно, существуют ли n -вершинные графы, число представимости которых лежит между $\lfloor n/2 \rfloor$ и $2n$ (эта оценка следует из теоремы 28).

2. Перестановочно представимые графы и их значение

Ориентация графа называется *транзитивной* если из наличия дуг $u \rightarrow v$ и $v \rightarrow z$ следует существование дуги $u \rightarrow z$. Неориентированный граф является *графом сравнимости*, если у него существует транзитивная ориентация. Легко показать, что наименьшим графом, не имеющим такой ориентации, является цикл C_5 .

Определение 4. Граф $G = (V, E)$ *перестановочно представим*, если он может быть представлен словом вида $p_1 p_2 \dots p_k$, где каждая p_i является перестановкой над V . Если в таком слове использовано k перестановок, то говорим, что G *перестановочно k -представим*.

Например, цикл C_4 является перестановочно 2-представимым, в чём можно убедиться, рассмотрев слово 13243142.

Следующая теорема является простым следствием того факта, что любой частичный порядок можно задать как пересечение линейных порядков.

Теорема 13 [36]. Граф перестановочно представим тогда и только тогда, когда он является графом сравнимости.

Следующая теорема устанавливает связь между представимостью в виде слова и перестановочной представимостью.

Теорема 14 [34]. Граф G , полученный из графа H добавлением все смежной вершины, представим в виде слова тогда и только тогда, когда H перестановочно представим.

Колесом W_n называется граф, полученный из цикла C_n добавлением все смежной вершины. Нетрудно убедиться, что никакой нечётный цикл C_{2n+1} при $n \geq 2$ не является графом сравнимости, а значит, все нечётные колеса W_{2n+1} непредставимы при $n \geq 2$. На самом деле W_5 является наименьшим непредставимым графом и единственным таким графом на 6 вершинах. В разд. 5 приведены другие примеры непредставимых графов.

Как прямое следствие теоремы 14 получается следующее свойство подграфов, индуцированных окружением (множеством соседей) каждой вершины представимого графа.

Теорема 15 [34]. *Если граф G представим в виде слова, то окружение любой вершины в G является перестановочно представимым.*

Из теорем 13 и 15 следует, что окружение любой вершины в перестановочно представимом графе является графом сравнимости. Обратное к теореме 15 утверждение неверно, что можно продемонстрировать на двух примерах на рис. 4 из работ [27] и [17] соответственно.

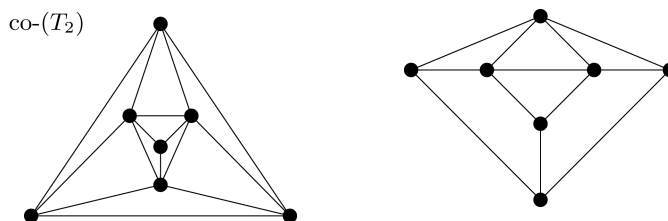


Рис. 4. Непредставимые графы, в которых окружение каждой вершины образует граф сравнимости

Кликой в графе называется подмножество попарно смежных вершин. Известно, что задача поиска в заданном графе G клики максимальной мощности является NP-трудной [8, 20]. Однако в классе графов, представимых в виде слов, эта проблема полиномиально разрешима, что следует из теоремы 15, как показано ниже.

Теорема 16 [28, 29]. *Задача о максимальной клике полиномиально разрешима для графов, представимых в виде слов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть граф G представим в виде слова. Тогда по теореме 15 окружение каждой его вершины индуцирует граф сравнимости. Известно [20], что задача о максимальной клике полиномиально разрешима для графов сравнимости. Значит, и задача поиска максимальной клики в графе G также разрешима за полиномиальное время.

3. Графы, представимые в виде слов с запрещёнными паттернами

Паттерном называется слово над алфавитом $\{1, 2, \dots, k\}$ для некоторого k , содержащее каждую букву из $\{1, 2, \dots, k\}$ хотя бы один раз. Паттерн $\tau = \tau_1\tau_2 \dots \tau_m$ встречается в слове $w = w_1w_2 \dots w_n$, если найдутся такие $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$, что $\tau_1\tau_2 \dots \tau_m$ изоморфно

(в смысле порядка) $w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m}$. Говорим, что w избегает τ (или является τ -избегающим), если τ не встречается в w . Например, в слове 42316 встречается пять паттернов 213 (а именно, 426, 436, 416, 216, 316), но нет паттерна 132. Изучение паттернов в словах и перестановках является очень популярным направлением (см., например, [2, 9, 11, 16, 31, 40, 46]).

В этом смысле естественным является вопрос [33, разд. 7.8]: если дан паттерн или набор паттернов, то какие классы графов представляются в виде слов, избегающих данных паттернов?

В качестве простейшего примера рассмотрим класс графов, представимых в виде слов, избегающих паттерна 21. Очевидно, что такие слова имеют вид $w = 11\dots 122\dots 2\dots nn\dots n$. Следовательно, если буква x встречается в слове хотя бы дважды, то соответствующая вершина является изолированной. При этом множество вершин, соответствующее буквам, которые встречаются ровно один раз, образуют клику. Таким образом, 21-избегающие слова представляют графы, являющиеся объединением полного графа и множества изолированных вершин.

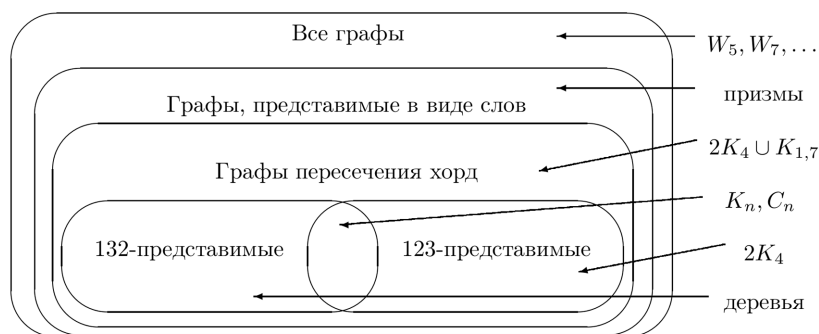


Рис. 5. Отношение между классами графов

Данному направлению посвящены работы [21, 41], их результаты приводятся далее. До сих пор за исключением теоремы 17 и следствия 1 ниже только 132-избегающие и 123-избегающие слова рассматривались с точки зрения представления графов в виде таких слов. Результаты этих исследований представлены на рис. 5. На этом рисунке (и вообще в этом разделе) мы упрощённо называем τ -представимыми графы, представимые в виде τ -избегающих слов (во избежание путаницы ранее введённое понятие k -представимого графа в этом разделе использоваться не будет).

Отметим, что в отличие от стандартного представления графов в виде слов, добавление дополнительных требований на отсутствие паттернов налагает существенные ограничения на нумерацию вершин (т. е. на

то, каким образом помечены вершины графа). Например, 132-избегающее слово 543212345 представляет граф слева на рис. 6, в то время как граф справа невозможно представить в виде 132-избегающего слова. Действительно, никакие две буквы из множества $\{1, 2, 3, 4\}$ не могут встречаться в слове ровно один раз, так как иначе соответствующие вершины будут смежны. Пусть 1, 2 и 3 встречаются хотя бы дважды. Если буква 5 встречается один раз, то она вместе с буквой 1 слева от неё и буквой 2 справа от неё образует паттерн 132. Если буква 5 встречается хотя бы дважды, то между первой и второй её копиями каждая из остальных букв встречается ровно один раз, а среди букв из множества $\{1, 2, 3\}$ хотя бы две встретятся либо слева от первой копии 5, либо справа от второй копии 5. В любом из этих случаев паттерн 132 неизбежен.

Поэтому говорим, что граф G не является τ -представимым, если ни при какой нумерации вершин его нельзя представить в виде τ -избегающего слова.

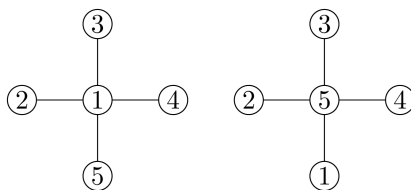


Рис. 6. 132-представимая (слева) и не 132-представимая (справа) нумерация одного и того же графа

Следующая теорема имеет огромный потенциал для изучения τ -представимых графов для паттернов τ длины 4 или больше.

Теорема 17 [41]. Пусть G — граф, представимый в виде слова, избегающего паттерна τ длины $k + 1$. Пусть x — вершина в графе G степени $d(x) \geq k$. Тогда каждое слово w , которое не содержит τ и представляет G , содержит не более k копий буквы x .

Доказательство. Если в слове w имеется не менее $k + 1$ копий буквы x , то в нём есть фактор (подслово из подряд идущих букв) вида $xw_1x \dots w_kx$, где все k соседей x в G встречаются в каждом из w_i . Но тогда w содержит все паттерны длины $k + 1$ и, в частности, содержит τ ; противоречие. Теорема 17 доказана.

Следствие 1 [41]. Пусть слово w , представляющее граф G , избегает некоторого паттерна длины $k + 1$. Если вершина y имеет степень не менее k и x смежна с y , то x встречается в w не более $k + 1$ раз.

3.1. 132-Представимые графы. В [21] доказано, что минимальный по числу вершин непредставимый граф W_5 также является минимальным 132-непредставимым графом (при этом неизвестно, существуют ли другие 132-непредставимые графы на 6 вершинах).

Теорема 18 [21]. *Если граф G 132-представим, то существует такое 132-избегающее слово w , представляющее G , что каждая буква в w встречается не более чем дважды.*

Из теорем 18 и 4 вытекает, что каждый 132-представимый граф является графом пересечения хорд. Отсюда по теоремам 4 и 7 никакая призма Pg_n , $n \geq 3$, не 132-представима. Естественно возникает вопрос: всякий ли граф пересечения хорд 132-представим? Отрицательный ответ на него даёт

Теорема 19 [41]. *Не все графы пересечения хорд 132-представимы. В частности, объединение двух графов K_4 является 132-непредставимым графом пересечения хорд.*

Теорема 20 [21]. *Любое дерево 132-представимо.*

Отметим, что в случае представления графов в виде слов, избегающих паттернов, теорема 2 не всегда работает, поскольку расширение представляющего слова до равномерного может породить запрещённый паттерн. Например, хотя полный граф K_n можно представить 132-избегающим словом $n(n-1)\dots 1$, как было показано в [41], при $n \geq 4$ этот граф нельзя представить в виде 2-равномерного 132-избегающего слова. Однако в [41] показано, что любое дерево можно представить 2-равномерным словом, тем самым усиливая теорему 20. Ещё один результат про представление графа в виде равномерного 132-избегающего слова приведён в теореме 26.

Теорема 21 [21]. *Любой цикл 132-представим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим вершины цикла C_n через $1, 2, \dots, n$ по часовой стрелке и представим полученный граф в виде 132-избегающего слова $(n-1)n(n-2)(n-1)(n-3)(n-2)\dots 45342312$. Теорема 21 доказана.

Теорема 22 [21]. *При $n \geq 1$ полный граф K_n 132-представим. Более того, при $n \geq 3$ имеется $2 + C_{n-2} + \sum_{i=0}^n C_i$ различных 132-представлений для K_n , где $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ — это n -е число Каталана. Кроме того, K_1 может быть представлен словом вида $11\dots 1$, а K_2 — словом вида $1212\dots$ или $2121\dots$ любой длины.*

Из доказательства теоремы 22 следует [21], что при $n \geq 3$ длина представляющего 132-избегающего слова для K_n лежит в множестве $\{n, n+1, n+2, n+3\}$.

3.2. 123-Представимые графы.

Теорема 23 [41]. *Любой 123-представимый граф является графом пересечения хорд.*

Теорема 24 [41]. *Любой цикл 123-представим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Слово, приведённое в доказательстве теоремы 21, очевидно, является и 123-избегающим. Теорема 24 доказана.

Теорема 25 [41]. *Звезда $K_{1,6}$ не 123-представима.*

Нетрудно проверить, что $K_{1,6}$ является графом пересечения хорд, так что не все такие графы 123-представимы. Также из теоремы 25 следует, что не все деревья 123-представимы. Заметим, что звезда $K_{1,5}$ 123-представима в виде слова 56465321412.

На основе теорем 19 и 25 можно построить граф пересечения хорд на 15 вершинах, который не является ни 123-, ни 132-представимым [41].

Заметим, что в отличие от 132-представимости, полный граф K_n можно представить в виде 123-избегающего 2-униформного слова $n(n-1) \dots 1n(n-1) \dots 1$, как отмечено в [41]. Там же показано, что путь P_n можно 123-представить в виде 2-униформного слова.

В завершение раздела приведём общую теорему о представлении в виде униформного слова применительно к 123- и 132-представлениям.

Теорема 26 [41]. *Пусть $\tau \in \{123, 132\}$, а граф G содержит k компонент связности G_1, G_2, \dots, G_k , каждая из которых τ -представима. Тогда граф G τ -представим тогда и только тогда, когда не более чем одну из компонент нельзя τ -представить в виде 2-униформного слова.*

4. Полутранзитивные ориентации и представимые графы

Полуциклом называется ориентированный граф, полученный из цикла заменой ориентации одного ребра. Другими словами, полуцикл представляет собой ориентированный путь $x_1x_2 \dots x_n$ и дугу x_1x_n . Говорим, что полуцикл в ациклическом ориентированном графе образует *срез*, если он не порождает транзитивного подграфа (т. е. в нём нет некоторой дуги x_ix_j при $i < j$). Заметим, что вершины x_i и x_j в срезе должны быть несмежны (дуги x_jx_i нет из-за ацикличности графа). Ясно, что срез содержит не менее четырёх вершин.

Определение 5. Ориентация графа называется *полутранзитивной*, если она ациклическая и не содержит срезов.

Из определения сразу следует, что всякая транзитивная ориентация является полутранзитивной. Обратное неверно, что легко заметить на примере ориентированного пути.

Как будет видно из теоремы 27, поиск полутранзитивной ориентации графа эквивалентен распознаванию его представимости в виде слова, а эта задача NP-полна (см. теорему 38). Поэтому эффективного способа построения полутранзитивной ориентации в общем случае скорее всего не существует.

Следующая теорема характеризует графы, представимые в виде слов, в терминах ориентаций.

Теорема 27 [29]. Граф G представим в виде слова тогда и только тогда, когда G допускает полутранзитивную ориентацию.

Доказательство. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть G представим в виде k -униформного слова w . Ориентируем каждое ребро графа так, чтобы начальная вершина каждой дуги появлялась в слове w раньше, чем конечная. Покажем, что такая ориентация полутранзитивна. Пусть в ориентированном графе есть полуцикл, включающий ориентированный путь $x_1x_2\dots x_t$ и дугу x_1x_t . Тогда для всех $i = 1, \dots, t-1$ и $j = 1, \dots, k$ j -я копия буквы x_i встречается в w раньше j -й копии буквы x_{i+1} . Поскольку $x_1x_t \in E$, то $(j+1)$ -я копия буквы x_1 должна идти в w после j -й копии буквы x_t (для всех $j = 1, \dots, k-1$). Следовательно, для любых $i, j \in \{1, \dots, t\}$ буквы x_i и x_j чередуются в w , а значит, полуцикл ориентирован транзитивно, т. е. G не содержит среза.

Доказательство достаточности довольно громоздко, поэтому приведём его схематически. Детальное описание алгоритма, строящего по полутранзитивной ориентации представление графа в виде слова, можно найти в [29].

Для любого подмножества $A \subset V$ ориентированного графа $G = (V, E)$ назовём перестановку π над множеством A *правильной*, если для любой дуги $uv \in E$, где $u, v \in A$, буква u встречается в π раньше v . Нетрудно видеть, что в ациклическом графе для любого подмножества вершин существует хотя бы одна правильная перестановка. Пусть задана полутранзитивная ориентация графа $G = (V, E)$. Для произвольной вершины $v \in V$ положим $I(v) = \{x \mid xv \in E\}$ и $O(v) = \{y \mid vy \in E\}$. Обозначим через $A(v)$ множество всех вершин из $V \setminus I(v)$, из которых имеется путь в вершину v , а через $B(v)$ — множество всех вершин из $V \setminus O(v)$,

в которые можно попасть из вершины v . Наконец, положим

$$T(v) = V \setminus (A(v) \cup B(v) \cup I(v) \cup O(v) \cup \{v\}).$$

Ввиду ацикличности ориентации множества $A(v)$, $B(v)$, $I(v)$, $O(v)$ и $T(v)$ попарно не пересекаются (при этом некоторые из них могут быть пустыми). Обозначим через A , B , I , O , T правильные перестановки для соответствующих множеств. В [29] доказано, что если ориентация полутранзитивна, то 2-униформное слово $W(v) = AITAvOIvBTOB$ порождает такой граф $H(v)$, что $G \subseteq H(v)$ и $N_G(v) = N_{H(v)}(v)$. Тогда конкатенация слов $W(v)$ по всем вершинам представляет граф G . Теорема 27 доказана.

Из доказательства теоремы 27 вытекает оценка $2n^2$ на длину минимального униформного слова, представляющего граф. Однако её можно немного улучшить.

Теорема 28 [29]. Пусть G — неполный представимый в виде слова граф. Тогда он $2(n - \kappa(G))$ -представим, где $\kappa(G)$ — размер максимальной клики в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K — клика максимального размера в G . Рассмотрим конкатенацию W слов $W(v)$ из доказательства теоремы 27 по всем вершинам $v \in V \setminus K$. Пусть W представляет граф H . Поскольку G является подграфом каждого из графов $H(v)$, все рёбра графа G присутствуют в H . С другой стороны, для любого антиребра $uv \notin E(G)$ хотя бы один из его концов (например u) не лежит в K . Но тогда $uv \notin E(H(u))$, а значит, и $uv \notin E(H)$. Следовательно, $H = G$, т. е. G будет $2(n - \kappa(G))$ -представимым. Теорема 28 доказана.

Естественным следствием теоремы 28 является принадлежность задачи распознавания представимости графа в виде слова классу NP. Действительно, длина представляющего слова не превосходит $2n^2$, а чередование любой пары букв в слове проверяется за $O(n^2)$ операций.

М. Халлдорсон показал, что проверка полутранзитивности ориентации также может быть выполнена за полиномиальное время и чисто графовыми методами (см. [33, замечание 4.2.3]).

Следующая теорема показывает, что класс графов, представимых в виде слов, включает в себя все 3-раскрашиваемые графы.

Теорема 29 [29]. Любой 3-раскрашиваемый граф представим в виде слова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вершины графа раскрашены цветами 1, 2 и 3. Ориентируем все рёбра так, чтобы цвет начальной вершины был

меньше цвета конечной. Очевидно, что эта ориентация полутранзитивна, так как она ациклична и любой путь имеет длину не больше 2 (а в срезе должно быть хотя бы 4 вершины). Значит, по теореме 27 граф представим в виде слова. Теорема 29 доказана.

Из теоремы 29 и теоремы Брукса [18] следует, например, представимость всех графов максимальной степени 3 (в частности, графа Петерсена, что было показано ранее). Другие применения теоремы 29 можно найти ниже.

5. Непредставимые графы

В разд. 2 уже говорилось, что нечётные колёса W_{2n+1} непредставимы при $n \geq 2$, а W_5 — минимальный по числу вершин непредставимый граф. Учитывая наследственность класса представимых графов, получаем, что весь класс \mathcal{W} графов, содержащих какое-либо колесо W_{2n+1} ($n \geq 2$) в качестве индуцированного подграфа, непредставим. Заметим, что каждый граф из \mathcal{W} обязательно содержит вершину степени 5 или больше, а также треугольник. Естественно спросить, существуют ли непредставимые графы максимальной степени 4 или без треугольников. На оба эти вопроса ответ положительный. Граф на рис. 4 справа, найденный в [17], отвечает на первый вопрос, а ответ на второй вопрос даёт следующая конструкция, предложенная в [28]. Пусть M — 4-хроматический граф с охватом не меньше 10 (такие графы существуют по теореме Эрдёша [18, 33]). Для каждого пути длины 3 в M добавим к M ребро, соединяющее его концы. Тогда полученный граф без треугольников будет непредставимым [28].

5.1. Число непредставимых графов. Согласно вычислительному эксперименту, проведённому Х. Ченом, существуют 1, 25 и 929 неизоморфных непредставимых связных графов на шести, семи и восьми вершинах соответственно. Эти результаты были подтверждены и распространены Э. Аркюном, И. Гентом и К. Джефферсоном до девяти (68 545 графов) и десяти вершин (4 880 093 графов) с помощью методов целочисленного программирования.

На рис. 7 представлены все 25 найденных Х. Ченом неизоморфных непредставимых графа на семи вершинах. Отметим, что 15 из этих графов содержат W_5 (единственный непредставимый граф на шести вершинах), так что лишь 10 непредставимых графов на семи вершинах на рис. 7 являются минимальными.

5.2. Непредставимые рёберные графы. *Рёберным* графом для графа $G = (V, E)$ называется граф с множеством вершин E , где две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие рёбра

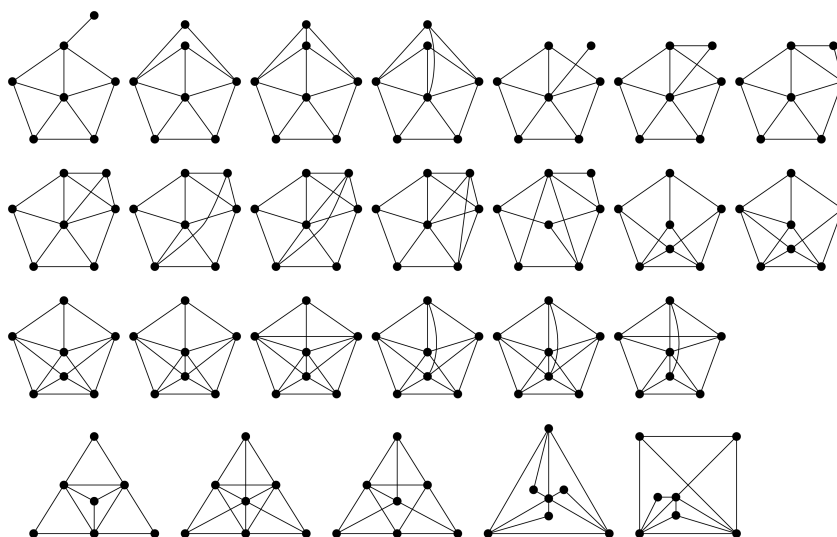


Рис. 7. 25 неизоморфных непредставимых графов на 7 вершинах

в G имеют общий конец; такой граф обозначается через $L(G)$. Рёберные графы можно использовать для построения непредставимых графов, что следует из нижеприведённых теорем.

Теорема 30 [35]. Пусть $n \geq 4$. Для любого колеса W_n его рёберный граф $L(W_n)$ непредставим.

Теорема 31 [35]. Пусть $n \geq 5$. Тогда для любого полного графа K_n его рёберный граф $L(K_n)$ непредставим.

Следующая теорема позволяет с помощью m -кратного применения операции перехода к рёберным графам (обозначим результат этой процедуры для графа G через $L^m(G)$) почти любой граф превратить в непредставимый.

Теорема 32 [35]. Если связный граф G не является путём, циклом или звездой $K_{1,3}$, то граф $L^m(G)$ непредставим при $m \geq 4$.

6. Представление графов в виде слов и операции на графах

В этом разделе рассмотрим некоторые основные операции на графах: в частности, дополнение графа, подразбиение рёбер, стягивание рёбер, соединение двух графов ребром, склеивание двух графов по клике, замена вершины модулем, декартово произведение, корневое произведение и переход к рёберным графам.

Мы не рассматриваем добавление/удаление рёбер, которые очевидно не сохраняют (не)представимость графа в виде слова, хотя в некоторых ситуациях они могут её сохранять. Например, как показали Дж. Ким и М. Ким, удаление рёбер сохраняет представимость графа в виде слов для представимых графов, не содержащих подграфа K_4 (см. также теорему 33 ниже).

1. **ДОПОЛНЕНИЕ.** Дополнение к представимому графу может как быть, так и не быть представимым в виде слова. Например, для любого графа на 5 вершинах его дополнение представимо в виде слова. С другой стороны, дополнение непредставимого графа W_5 будет объединением 5-цикла и изолированной вершины, а значит, является представимым (например, в виде слова 112542643653). Нетрудно также построить пример непредставимого графа, дополнение которого также непредставимо. Например, граф $G = W_5 \cup C_5 \cup K_1$ обладает таким свойством, поскольку и он сам, и его дополнение содержат W_5 в качестве индуцированного подграфа.

2. **ПОДРАЗБИЕНИЕ И СТЯГИВАНИЕ РЕБЕР.** Подразбиение графа получается подразбиением его отдельных рёбер и рассматривалось в п. 2.3 с точки зрения 3-представимости. Заменяя в теореме 10 «3-представимый» на «представимый в виде слова», получим более слабое, но верное утверждение, которое нетрудно доказать напрямую через полутранзитивные ориентации. Действительно, ориентируя путь длины 3 так, чтобы его внутренние вершины образовали источник и сток степени 2, мы никак не сможем создать в графе ни ориентированного цикла, ни среза. Следующая теорема показывает, что для некоторых классов графов подразбиение рёбер сохраняет представимость, а для некоторых — нет.

Теорема 33. *Подразбиение рёбер сохраняет представимость в виде слова для графов, не содержащих подграфа K_4 . При этом существуют представимые графы, не содержащие подграфа K_5 , подразбиение которых непредставимо.*

По теореме 10 стягивание ребра в представимом графе может привести к непредставимому графу, хотя для некоторых классов (например, для путей) эта операция сохраняет представимость. Стягивание ребра непредставимого графа может также привести как к представимому, так и к непредставимому графу. Например, стягивание любого ребра W_5 даёт представимый граф, а в непредставимом графе, состоящем из двух копий W_5 , стягивание любого ребра приводит к непредставимому графу.

3. СОЕДИНЕНИЕ ГРАФОВ РЕБРОМ И СКЛЕИВАНИЕ ПО КЛИКЕ. Поскольку представимость является наследственным свойством, ясно, что если хотя бы один из двух графов непредставим, то в результате их склейки по клике или соединения ребром также получится непредставимый граф.

С другой стороны, пусть графы G_1 и G_2 представимы. Тогда склеивание их по одной вершине или соединение ребром даст представимый граф. Последнее утверждение легко показать через полутранзитивные ориентации. Действительно, по теореме 27 и G_1 , и G_2 можно ориентировать полутранзитивно, а склеивание графов по вершине или соединение их ребром (ориентированным произвольно) не приведёт к образованию циклов или срезом. Более того, в [32] было показано, что если G_i является k_i -представимым ($i = 1, 2$), то графы, полученные склеиванием G_1 и G_2 по вершине и соединением их по ребру, будут $\max(k_1, k_2)$ -представимыми.

К сожалению, склеивание представимых графов по клике размера больше 1 может привести к непредставимым графам. Соответствующие примеры для клик размера 2 (ребро) и 3 (треугольник) можно найти в [33, п. 5.4.3]. Склеивание представимых графов по кликам большего размера остаётся открытым вопросом.

4. ЗАМЕНА ВЕРШИНЫ МОДУЛЕМ. Подмножество вершин $X \subseteq V$ в графе G образует *модуль*, если все вершины из X имеют одно и то же множество соседей вне X (т. е. в $V \setminus X$). Операция замены вершины x графа G модулем H заключается в удалении из G вершины x , добавлении графа H и всех рёбер вида yz , где $y \in H$, $z \in N(x)$.

Теорема 34 [32]. Пусть граф G представим в виде слова и $x \in V(G)$. Пусть G' получен из G заменой x модулем M , где M является графом сравнимости. Тогда G' также представим в виде слова. Более того, если $\mathcal{R}(G) = k_1$ и $\mathcal{R}(M) = k_2$, то $\mathcal{R}(G') = \max\{k_1, k_2\}$.

5. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРАФОВ. Декартовым произведением $G \square H$ графов $G = (V(G), E(G))$ и $H = (V(H), E(H))$ называется граф с множеством вершин $V(G) \times V(H)$, в котором вершины (u, u') и (v, v') смежны тогда и только тогда, когда или $u = v$ и u' смежна с v' в H , или $u' = v'$ и u смежна с v в G .

Следующую теорему доказал Б. Саган в 2014 г. Доказательство через полутранзитивные ориентации можно найти в [33, п. 5.4.5].

Теорема 35. Пусть G и H представимы в виде слов. Тогда их декартово произведение $G \square H$ представимо в виде слова.

6. **КОРНЕВОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРАФОВ.** Пусть имеются графы G и H , причём одна из вершин графа H выделена в качестве корня. Тогда *корневым произведением* G и H называется граф $G \circ H$, определяемый следующим образом: рассматривается $|V(G)|$ копий графа H и каждая вершина v_i графа G склеивается с корнем i -й копии графа H .

Следующая теорема аналогична теореме 35.

Теорема 36 [33]. Пусть G и H представимы в виде слов. Тогда их корневое произведение $G \circ H$ также представимо (для любого выбора корня).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку склеивание v_i в G с корнем i -й копии графа H сохраняет представимость графа в виде слова, произведя эту операцию для всех вершин графа G , получим представимый граф $G \circ H$. Теорема 36 доказана.

7. **ПЕРЕХОД К РЕБЕРНОМУ ГРАФУ.** Эта операция уже рассматривалась выше в разд. 5. На основании полученных результатов видно, что при переходе к рёберному графу представимый граф может стать как представимым, так и непредставимым. Также известны примеры непредставимых графов, чьи рёберные графы непредставимы. Однако до сих пор неизвестно, существует ли непредставимый граф, рёберный к которому был бы представим.

7. Вопросы вычислительной сложности

В этом разделе представим результаты, касающиеся вычислительной сложности задачи, а именно: сложность распознавания класса представимых графов и сложность некоторых классических NP-трудных задач на графах из этого класса.

Несмотря на то, что задача о максимальной клике полиномиально разрешима в классе представимых графов (теорема 16), многие классические оптимизационные задачи остаются в этом классе NP-трудными. Это следует из теоремы 29 и того, что соответствующие проблемы NP-трудны для 3-раскрашиваемых графов.

Обоснование представленных в табл. 2 результатов по сложности, а также строгие формулировки задач можно найти в [33, п. 4.2]. Ниже обсудим доказательство того факта, что задача определения представимости графа в виде слова является NP-полной.

Пусть P является частично упорядоченным множеством, а x и y — два его элемента. Говорим, что x *покрывает* y , если $x > y$ и нет такого элемента z в P , что $x > z > y$. *Граф покрытий* G_P частично упорядо-

Таблица 2

Известные результаты по сложности для представимых графов

Задача	Сложность
Распознавание представимости графа в виде слова	NP-полна
Приближение числа представимости графа с точностью $n^{1-\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$	NP-трудна
Кликовое покрытие	NP-трудна
Определить, является ли граф k -представимым для любого фиксированного k , $3 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$	NP-полна
Доминирующее множество	NP-трудна
Раскраска вершин	NP-трудна
Максимальная клика	P
Максимальное независимое множество	NP-трудна

ченного множества P имеет множество вершин P , причём xy является ребром в G_P тогда и только тогда, когда x покрывает y или наоборот.

В. Лимузи заметил в 2014 г., что полутранзитивные ориентации графов без треугольников в точности совпадают с 2-хорошими ориентациями, рассмотренными О. Претцелем в [44] (там же можно найти определение k -хороших ориентаций). Поэтому из утверждения 1 в [44] вытекает

Теорема 37. *Класс представимых в виде слов графов без треугольников — это в точности класс графов покрытий частично упорядоченных множеств.*

В. Лимузи также указал, что задача распознавания графов покрытий частично упорядоченных множеств является NP-полной [10]. Отсюда вытекает следующая, ключевая

Теорема 38. *Задача распознавания графов, представимых в виде слов, NP-полна.*

8. Представление плоских графов в виде слов

Что касается плоских графов, очевидно, не все они представимы в виде слова (например, все нечётные колёса W_{2n+1} непредставимы). Однако имеет место следующая

Теорема 39 [28]. *Плоские графы без треугольников представимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Грёцша [47] каждый плоский граф без треугольников 3-раскрашиваем, а значит, представим в виде слова по теореме 29. Теорема 39 доказана.

Классификация представимых плоских графов является интересной открытой проблемой. Далее рассматриваются некоторые виды триангуляций и подразбиений плоских графов. Ключевыми инструментами при их рассмотрении являются 3-раскрашиваемость и полутранзитивные ориентации.

8.1. Представление в виде слов триангуляций полимино. *Полимино* — это плоская геометрическая фигура, сформированная некоторым числом одинаковых квадратов, присоединённых друг к другу по рёбрам. Если углы квадратов считать вершинами, а стороны — рёбрами, то получится граф, который также будем называть полимино. Наиболее интересны *выпуклые полимино*, т. е. такие, в которых множество квадратов любого ряда (горизонтального или вертикального) образует связную область. Под *триангуляцией* полимино понимается триангуляция всех его внутренних граней.

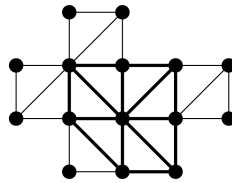


Рис. 8. Нечётное колесо в триангуляции полимино

При триангуляции всех внутренних граней выпуклого полимино может образоваться нечётное колесо (рис. 8). Оказывается, отсутствие таких колёс влечёт 3-раскрашиваемость, а значит, и представимость полученной триангуляции, что составляет основную идею доказательства следующей теоремы.

Теорема 40 [1]. *Триангуляция выпуклого полимино представима тогда и только тогда, когда она 3-раскрашиваема. Существуют не 3-раскрашиваемые триангуляции невыпуклых полимино, представимые в виде слов.*

Назовём *прямоугольником с домино* фигуру, полученную из прямоугольного полимино удалением одного из внутренних рёбер (рис. 9).

Теорема 41 [24]. *Триангуляция любого прямоугольника с домино представима тогда и только тогда, когда она 3-раскрашиваема.*

8.2. Представление почти триангуляций в виде слов. *Почти триангуляция* — это планарный граф, в котором каждая внутренняя

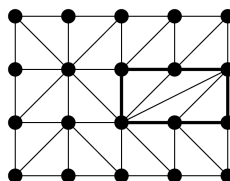


Рис. 9. Триангуляция прямоугольника с домино

грань является треугольником (рассмотренные выше триангуляции полимино являются на самом деле почти триангуляциями).

Следующая теорема обобщает теоремы 40 и 41.

Теорема 42 [22]. *Почти триангуляция без K_4 представима в виде слова тогда и только тогда, когда она 3-раскрашиваема.*

Характеризация представимых в виде слов почти триангуляций, содержащих K_4 , остаётся открытой проблемой.

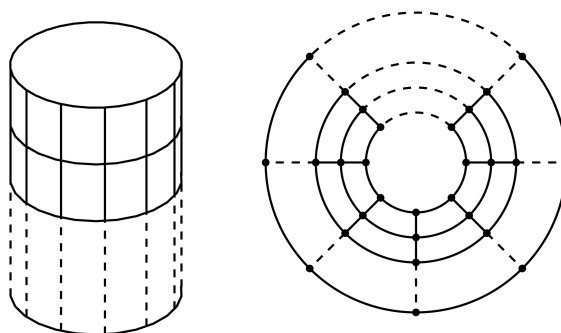


Рис. 10. Цилиндрическая решётка

8.3. Триангуляция цилиндрических решёток. *Цилиндрическая решётка* — это граф, образованный вертикальными (параллельными образующим) отрезками и горизонтальными (параллельными плоскостям основания) окружностями на поверхности цилиндра. Цилиндрическая решётка также получается склеиванием левого и правого концов прямоугольной решётки (рис. 10). Часть решётки, заключённая между двумя соседними вертикальными отрезками, называется *сектором*. Под триангуляцией цилиндрической решётки будем понимать триангуляцию всех граней, лежащих в объединении секторов (т. е. всех граней, кроме двух оснований).

Представимость триангуляций цилиндрических решёток полностью характеризуется следующими двумя теоремами (в зависимости от числа секторов).

Теорема 43 [15]. *Триангуляция цилиндрической решётки с более чем тремя секторами представима тогда и только тогда, когда она не содержит W_5 или W_7 в качестве индуцированного подграфа.*

Теорема 44 [15]. *Триангуляция цилиндрической решётки с тремя секторами представима тогда и только тогда, когда она не содержит ни одного из графов на рис. 11 в качестве индуцированного подграфа.*

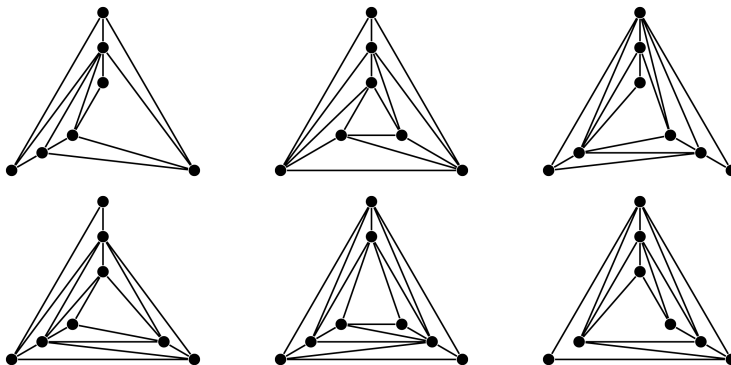


Рис. 11. Запрещённые подграфы для триангуляций цилиндрических решёток с тремя секторами

8.4. Подразбиения графов треугольной решётки. *Граф треугольного замощения T^∞* — это бесконечный граф, индуцированный замощением плоскости равносторонними треугольниками. *Граф треугольной решётки G* получается из T^∞ выбором произвольного конечного числа треугольных ячеек и включением в G всех их вершин и рёбер. Говорим, что ячейка *входит* в G , если все её рёбра принадлежат G .

Операция *подразбиения ячейки* состоит в добавлении внутрь ячейки вершины и трёх рёбер, соединяющих её с вершинами ячейки (другими словами, ячейка заменяется плоской копией графа K_4). Соответственно подразбиение множества ячеек S получается последовательным подразбиением каждой ячейки из S (при этом само множество S называется *подразбиваемым множеством*). Подразбиением графа треугольной решётки называется граф, полученный подразбиением некоторого множества ячеек.

Если подразбиение G представимо в виде слова, то и соответствующее ему подразбиваемое множество будем называть *представимым*. Говорим, что подразбиваемое множество *максимально*, если подразбиение любой другой ячейки приводит к непредставимому графу.

Ребро графа треугольной решётки G , которое принадлежит ячейке из T^∞ , не входящей в G , называется *граничным*. Ячейка, содержащая хотя бы одно граничное ребро, называется *граничной*; остальные ячейки в G называются *внутренними*.

Нетрудно заметить, что при подразбиении внутренней ячейки получается индуцированный подграф, изображённый в нижнем левом углу на рис. 7. Следовательно, подразбиение любой внутренней ячейки приводит к непредставимому графу. Оказывается, что это единственное препятствие для представимости подразбиения графа треугольной решётки.

Теорема 45 [14]. *Подразбиение графа треугольной решётки G представимо тогда и только тогда, когда подразбиваемое множество не содержит внутренних ячеек графа G .*

Отметим, что теорему 45 можно также применить для поиска максимальных представимых подразбиений ячеек двумерного треугольника Серпинского $SG(n)$ (детали можно найти в [14]).

9. Направления дальнейших исследований

В этом разделе перечисляются открытые проблемы и направления дальнейших исследований, связанных с графами, представимыми в виде слов.

- Охарактеризовать (не-)представимые плоские графы.
 - Описать представимые почти триангуляции, содержащие K_4 .
 - Описать все графы, представимые в виде слов, избегающих паттерна τ , где понятие «паттерн» можно определять разными способами (см. [11, 31]).
 - Правда ли, что граф-корона имеет самое длинное представляющее слово среди всех двудольных графов с заданным чётным числом вершин?
 - Существуют ли представимые n -вершинные графы, представление которых требует более $\lfloor n/2 \rfloor$ копий каждой буквы?
 - Является ли рёберный граф непредставимого графа всегда непредставимым?
 - Описать представимые графы на языке запрещённых подграфов.
- Последняя проблема представляется наиболее фундаментальной.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Akrobotu P., Kitaev S., Masárová Z.** On word-representability of polyomino triangulations // *Sib. Adv. Math.* 2015. Vol. 25, No. 1. P. 1–10.
2. **Babson E., Steingrímsson E.** Generalized permutation patterns and a classification of the Mahonian statistics // *Sémin. Lothar. Comb.* 2000. No. B44b. P. 1–18.
3. **Balogh J., Bollobás B., Weinreich D.** A jump to the Bell number for hereditary graph properties // *J. Comb. Theory, Ser. B.* 2005. Vol. 95. P. 29–48.
4. **Beigel R., Eppstein D.** 3-Coloring in time $O(1.3289^n)$ // *J. Algorithms.* 2005. Vol. 54, No. 2. P. 168–204.
5. **Berstel J., Karhumäki J.** Combinatorics on words — a tutorial // *Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci.* 2003. Vol. 79. P. 178–228.
6. **Berstel J., Perrin D.** The origins of combinatorics on words // *Eur. J. Comb.* 2007. Vol. 28, No. 3. P. 996–1022.
7. **Bell E. J. L., Rayson P., Berridge D.** The strong-connectivity of word-representable digraphs. 2011. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:1102.0980).
8. **Bomze I. M., Budinich M., Pardalos P. M., Pelillo M.** The maximum clique problem // *Handbook of Combinatorial Optimization. Suppl. Vol. A.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. P. 1–74.
9. **Bóna M.** *Combinatorics of permutations.* Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2004. (Discrete Math. Appl.).
10. **Brightwell G.** On the complexity of diagram testing // *Order.* 1993. Vol. 10, No. 4. P. 297–303.
11. **Brändén P., Claesson A.** Mesh patterns and the expansion of permutation statistics as sums of permutation patterns // *Electron. J. Comb.* 2011. Vol. 18, No. 2, Res. Pap. P5. 14 p.
12. **Černý J.** Coloring circle graphs // *Electron. Notes Discrete Math.* 2007. Vol. 29. P. 457–461.
13. **Chvátal V., Hammer P.** Aggregation of inequalities in integer programming // *Studies in integer programming.* Amsterdam: North-Holland, 1977. P. 145–162. (Ann. Discrete Math.; Vol. 1).
14. **Chen T. Z. Q., Kitaev S., Sun B. Y.** Word-representability of face subdivisions of triangular grid graphs // *Graphs Comb.* 2016. Vol. 32, No. 5. P. 1749–1761.
15. **Chen T. Z. Q., Kitaev S., Sun B. Y.** Word-representability of triangulations of grid-covered cylinder graphs // *Discrete Appl. Math.* 2016. Vol. 213. P. 60–70.
16. **Claesson A.** Generalised pattern avoidance // *Eur. J. Comb.* 2001. Vol. 22. P. 961–971.

17. **Collins A., Kitaev S., Lozin V.** New results on word-representable graphs // *Discrete Appl. Math.* 2017. Vol. 216. P. 136–141.
18. **Diestel R.** *Graph theory*. 5th ed. Heidelberg: Springer, 2016. (Grad. Texts Math.; Vol. 173).
19. **Fernandes C. G., Green E. L., Mandel A.** From monomials to words to graphs // *J. Comb. Theory, Ser. A.* 2004. Vol. 105, No. 2. P. 185–206.
20. **Garey M. R., Johnson D. S.** *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. San Francisco: Freeman, 1979.
21. **Gao A. L. L., Kitaev S., Zhang P. B.** On 132-representable graphs // *Australas. J. Comb.* 2017. Vol. 69, No. 1. P. 105–118.
22. **Glen M.** Colourability and word-representability of near-triangulations. 2016. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:1605.01688).
23. **Glen M.** The software available at <http://personal.cis.strath.ac.uk/sergey.kitaev/word-representable-graphs.html>
24. **Glen M., Kitaev S.** Word-representability of triangulations of rectangular polyomino with a single domino tile // *J. Comb. Math. Comb. Comput.* 2017. Vol. 100. P. 131–144.
25. **Glen M., Kitaev S., Pyatkin A.** On the representation number of a crown graph. 2016. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:1609.00674).
26. **Graham R., Zang N.** Enumerating split-pair arrangements // *J. Comb. Theory, Ser. A.* 2008. Vol. 115, No. 2. P. 293–303.
27. **Halldórsson M., Kitaev S., Pyatkin A.** Graphs capturing alternations in words // *Developments in language theory: Proc. 14th Int. Conf. DLT2010 (London, ON, Canada, Aug. 17–20, 2010)*. Heidelberg: Springer, 2010. P. 436–437. (Lect. Notes Comp. Sci.; Vol. 6224).
28. **Halldórsson M., Kitaev S., Pyatkin A.** Alternation graphs // *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science: Revis. Pap. 37th Int. Workshop, WG2011 (Teplá Monastery, Czech Republic, June 21–24, 2011)*. Heidelberg: Springer, 2011. P. 191–202. (Lect. Notes Comp. Sci.; Vol. 6986).
29. **Halldórsson M., Kitaev S., Pyatkin A.** Semi-transitive orientations and word-representable graphs // *Discrete Appl. Math.* 2016. Vol. 201. P. 164–171.
30. **Jones M., Kitaev S., Pyatkin A., Remmel J.** Representing graphs via pattern avoiding words // *Electron. J. Comb.* 2015. Vol. 22, No. 2, Res. Pap. P2.53. 20 p.
31. **Kitaev S.** *Patterns in permutations and words*. Heidelberg: Springer, 2011. (Monogr. Theor. Comp. Sci., EATCS Ser.).
32. **Kitaev S.** On graphs with representation number 3 // *J. Autom. Lang. Comb.* 2013. Vol. 18, No. 2. P. 97–112.
33. **Kitaev S., Lozin V.** *Words and graphs*. Cham: Springer, 2015. (Monogr. Theor. Comp. Sci., EATCS Ser.).
34. **Kitaev S., Pyatkin A.** On representable graphs // *J. Autom. Lang. Comb.* 2008. Vol. 13, No. 1. P. 45–54.

35. **Kitaev S., Salimov P., Severs C., Úlfarsson H.** On the representability of line graphs // Developments in language theory: Proc. 15th Int. Conf. DLT2011 (Milan, Italy, July 19–22, 2011). Heidelberg: Springer, 2011. P. 478–479. (Lect. Notes Comp. Sci.; Vol. 6795).
36. **Kitaev S., Seif S.** Word problem of the Perkins semigroup via directed acyclic graphs // Order. 2008. Vol. 25, No. 3. P. 177–194.
37. **Koebe M.** On a new class of intersection graphs // Ann. Discrete Math. 1992. Vol. 51. P. 141–143.
38. **Korpelainen N., Lozin V.** Two forbidden induced subgraphs and well-quasi-ordering // Discrete Math. 2011. Vol. 311, No. 16. P. 1813–1822.
39. **Lovász L.** Perfect graphs // Selected topics graph theory. V. 2. London: Acad. Press, 1983. P. 55–87.
40. **Marcus A., Tardos G.** Excluded permutation matrices and the Stanley–Wilf conjecture // J. Comb. Theory, Ser. A. 2004. Vol. 107, No. 1. P. 153–160.
41. **Mandelshtam Y.** On graphs representable by pattern-avoiding words. 2016. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:1608.07614).
42. **Perkins P.** Bases for equational theories of semigroups // J. Algebra. 1969. Vol. 11, No. 2. P. 298–314.
43. **Petkovšek M.** Letter graphs and well-quasi-order by induced subgraphs // Discrete Math. 2002. Vol. 244. P. 375–388.
44. **Pretzel O.** On graphs that can be oriented as diagrams of ordered sets // Order. 1985. Vol. 2, No. 1. P. 25–40.
45. **Prüfer H.** Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen // Arch. Math. Phys. 1918. Vol. 27. P. 742–744.
46. **Steingrímsson E.** Generalized permutation patterns – a short survey // Permutation patterns. New York, Camb. Univ. Press, 2010. P. 137–152. (Lond. Math. Soc. Lect. Notes Ser.; Vol. 376).
47. **Thomassen C.** A short list color proof of Grötzsch’s theorem // J. Comb. Theory, Ser. B. 2003. Vol. 88, No. 1. P. 189–192.
48. **West D. B.** Introduction to graph theory. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.

*Китаев Сергей Владимирович,
Пяткин Артём Валерьевич*

Статья поступила
11 августа 2017 г.
Исправленный вариант —
12 декабря 2017 г.

WORD-REPRESENTABLE GRAPHS: A SURVEY

S. V. Kitaev^{1,a} and A. V. Pyatkin^{2,3,b}¹University of Strathclyde,

Livingstone Tower, 26 Richmond St., Glasgow, G1 1XH, UK

²Sobolev Institute of Mathematics,

4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia

³Novosibirsk State University,

2 Pirogov St., 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: ^asergey.kitaev@cis.strath.ac.uk, ^bartem@math.nsc.ru

Abstract. Letters x and y *alternate* in a word w if after deleting all letters but x and y in w we get either a word $xyxy\dots$ or a word $yxyx\dots$ (each of these words can be of odd or even length). A graph $G = (V, E)$ is *word-representable* if there is a finite word w over an alphabet V such that the letters x and y alternate in w if and only if $xy \in E$. The word-representable graphs include many important graph classes, in particular, circle graphs, 3-colorable graphs and comparability graphs. In this paper we present the full survey of the available results on the theory of word-representable graphs and the most recent achievements in this field. Tab. 2, illustr. 11, bibliogr. 48.

Keywords: representation of graphs, orientation, word, pattern.

REFERENCES

1. P. Akrobotu, S. Kitaev, and Z. Masárová, On word-representability of polyomino triangulations, *Sib. Adv. Math.*, **25**, No. 1, 1–10, 2015.
2. E. Babson and E. Steingrímsson, Generalized permutation patterns and a classification of the Mahonian statistics, *Sémin. Lothar. Comb.*, **44**, No. B44b, 1–18, 2000.
3. J. Balogh, B. Bollobás, and D. Weinreich, A jump to the Bell number for hereditary graph properties, *J. Comb. Theory, Ser. B*, **95**, 29–48, 2005.
4. R. Beigel and D. Eppstein, 3-Coloring in time $O(1.3289n)$, *J. Algorithms*, **54**, No. 2, 168–204, 2005.
5. J. Berstel and J. Karhumäki, Combinatorics on words — A tutorial, *Bull. EATCS*, **79**, 178–228, 2003.
6. J. Berstel and D. Perrin, The origins of combinatorics on words, *Eur. J. Comb.*, **28**, No. 3, 996–1022, 2007.

7. **E. J. L. Bell, P. Rayson, and D. Berridge**, The strong-connectivity of word-representable digraphs, 2011 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1102.0980).
8. **I. M. Bomze, M. Budinich, P. M. Pardalos, and M. Pelillo**, The maximum clique problem, in *Handbook of Combinatorial Optimization*, Suppl. Vol. A, pp. 1–74, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
9. **M. Bóna**, *Combinatorics of Permutations*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
10. **G. Brightwell**, On the complexity of diagram testing, *Order*, **10**, No. 4, 297–303, 1993.
11. **P. Brändén and A. Claesson**, Mesh patterns and the expansion of permutation statistics as sums of permutation patterns, *Electron. J. Comb.*, **18**, No. 2, P5, 1–14, 2011.
12. **J. Černý**, Coloring circle graphs, *Electron. Notes Discrete Math.*, **29**, 457–461, 2007.
13. **V. Chvátal and P. Hammer**, Aggregation of inequalities in integer programming, in *Studies in Integer Programming*, pp. 145–162, North-Holland, Amsterdam, 1977 (Ann. Discrete Math., Vol. 1).
14. **T. Z. Q. Chen, S. Kitaev, and B. Y. Sun**, Word-representability of face subdivisions of triangular grid graphs, *Graphs Comb.*, **32**, No. 5, 1749–1761, 2016.
15. **T. Z. Q. Chen, S. Kitaev, and B. Y. Sun**, Word-representability of triangulations of grid-covered cylinder graphs, *Discrete Appl. Math.*, **213**, 60–70, 2016.
16. **A. Claesson**, Generalised pattern avoidance, *Eur. J. Comb.*, **22**, 961–971, 2001.
17. **A. Collins, S. Kitaev, and V. Lozin**, New results on word-representable graphs, *Discrete Appl. Math.*, **216**, 136–141, 2017.
18. **R. Diestel**, *Graph Theory*, Springer, Heidelberg, 2016 (Grad. Texts Math., Vol. 173).
19. **C. G. Fernandes, E. L. Green, and A. Mandel**, From monomials to words to graphs, *J. Comb. Theory, Ser. A*, **105**, No. 2, 185–206, 2004.
20. **M. R. Garey and D. S. Johnson**, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.
21. **A. L. L. Gao, S. Kitaev, and P. B. Zhang**, On 132-representable graphs, *Australas. J. Comb.*, **69**, No. 1, 105–118, 2017.
22. **M. Glen**, Colourability and word-representability of near-triangulations, 2016 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1605.01688).
23. **M. Glen**, The software available at <http://personal.cis.strath.ac.uk/sergey.kitaev/word-representable-graphs.html> (accessed Feb. 5, 2017).
24. **M. Glen and S. Kitaev**, Word-representability of triangulations of rectangular polyomino with a single domino tile, *J. Comb. Math. Comb. Comput.*, **100**, 131–144, 2017.

25. M. Glen, S. Kitaev, and A. Pyatkin, On the representation number of a crown graph, 2016 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1609.00674).
26. R. Graham and N. Zang, Enumerating split-pair arrangements, *J. Comb. Theory, Ser. A*, **115**, No. 2, 293–303, 2008.
27. M. Halldórsson, S. Kitaev, and A. Pyatkin, Graphs capturing alternations in words, in *Developments in Language Theory* (Proc. 14th Int. Conf., London, ON, Canada, Aug. 17–20, 2010), pp. 436–437, Springer, Heidelberg, 2010 (Lect. Notes Comp. Sci., Vol. 6224).
28. M. Halldórsson, S. Kitaev, and A. Pyatkin, Alternation graphs. in *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science* (Revis. Pap. 37th Int. Workshop, Teplá Monastery, Czech Republic, June 21–24, 2011), pp. 191–202, Springer, Heidelberg, 2011 (Lect. Notes Comp. Sci., Vol. 6986).
29. M. Halldórsson, S. Kitaev, and A. Pyatkin, Semi-transitive orientations and word-representable graphs, *Discrete Appl. Math.*, **201**, 164–171, 2016.
30. M. Jones, S. Kitaev, A. Pyatkin, and J. Remmel, Representing graphs via pattern avoiding words, *Electron. J. Comb.*, **22**, No. 2, P2.53, 1–20, 2015.
31. S. Kitaev, *Patterns in Permutations and Words*, Springer, Heidelberg, 2011.
32. S. Kitaev, On graphs with representation number 3, *J. Autom. Lang. Comb.*, **18**, No. 2, 97–112, 2013.
33. S. Kitaev and V. Lozin, *Words and Graphs*, Springer, Cham, 2015.
34. S. Kitaev and A. Pyatkin, On representable graphs, *J. Autom. Lang. Comb.*, **13**, No. 1, 45–54, 2008.
35. S. Kitaev, P. Salimov, C. Severs, and H. Úlfarsson, On the representability of line graphs, in *Developments in Language Theory* (Proc. 15th Int. Conf., Milan, Italy, July 19–22, 2010), pp. 478–479, Springer, Heidelberg, 2011 (Lect. Notes Comp. Sci., Vol. 6795).
36. S. Kitaev and S. Seif, Word problem of the Perkins semigroup via directed acyclic graphs, *Order*, **25**, No. 3, 177–194, 2008.
37. M. Koebe, On a new class of intersection graphs, *Ann. Discrete Math.*, **51**, 141–143, 1992.
38. N. Korpelainen and V. Lozin, Two forbidden induced subgraphs and well-quasi-ordering, *Discrete Math.*, **311**, No. 16, 1813–1822, 2011.
39. L. Lovász, Perfect graphs, in *Selected Topics in Graph Theory*, Vol. 2, pp. 55–87, Acad. Press, London, 1983.
40. A. Marcus and G. Tardos, Excluded permutation matrices and the Stanley–Wilf conjecture, *J. Comb. Theory, Ser. A*, **107**, No. 1, 153–160, 2004.
41. Y. Mandelshtam, On graphs representable by pattern-avoiding words, 2016 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1608.07614).
42. P. Perkins, Bases for equational theories of semigroups, *J. Algebra*, **11**, No. 2, 298–314, 1969.

-
43. **M. Petkovšek**, Letter graphs and well-quasi-order by induced subgraphs, *Discrete Math.*, **244**, 375–388, 2002.
 44. **O. Pretzel**, On graphs that can be oriented as diagrams of ordered sets, *Order*, **2**, No. 1, 25–40, 1985.
 45. **H. Prüfer**, Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen, *Arch. Math. Phys.*, **27**, 742–744, 1918 [German].
 46. **E. Steingrímsson**, Generalized permutation patterns — A short survey, *Permutation Patterns*, pp. 137–152, Camb. Univ. Press, New York, 2010 (Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., Vol. 376).
 47. **C. Thomassen**, A short list color proof of Grötzsch’s theorem, *J. Comb. Theory, Ser. B*, **88**, No. 1, 189–192, 2003.
 48. **D. B. West**, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

Sergey V. Kitaev,
Artem V. Pyatkin

Received
11 August 2017
Revised
12 December 2017