ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2018. Том 25, № 2. С. 101–123

УДК 519.17 DOI: 10.17377/daio.2018.25.591

О ДЕРЕВЬЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ СТЕПЕНИ С МАКСИМАЛЬНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ НАИБОЛЬШИХ НЕЗАВИСИМЫХ МНОЖЕСТВ *)

Д. С. Талецкий[1,a], *Д. С. Малышев*[2,1,b]
[1]Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия
[2]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия
E-mail: [a]dmitalmail@gmail.com, [b]dsmalyshev@rambler.ru

Аннотация. Для любых n и d описана структура деревьев с максимально возможным количеством наибольших независимых множеств в классе n-вершинных деревьев, степень каждой вершины которых не превосходит d. Показано, что при всех чётных n экстремальное дерево единственно, а при нечётных n единственности может и не быть, причём при $d = 3$ для любого нечётного $n \geqslant 7$ имеется в точности $\left\lceil \frac{n-3}{4} \right\rceil + 1$ экстремальных деревьев. В данной работе проблема поиска экстремальных (n, d)-деревьев также рассмотрена применительно к 2-гусеницам, т. е. деревьям, в которых каждая вершина отстоит от некоторого простого пути на расстояние не более чем два. В ней для любых n и $d \in \{3, 4\}$ полностью выявляются все экстремальные 2-гусеницы с n вершинами, каждая из которых имеет степень не более чем d. Ил. 9, библиогр. 10.

Ключевые слова: экстремальная комбинаторика, дерево, наибольшее независимое множество.

Введение

Независимым множеством в графе называется произвольное подмножество попарно не смежных его вершин. Считаем, что пустое множество также является независимым. Независимое множество называется *максимальным*, если оно максимально по включению. *Наибольшим независимым множеством* называется независимое множество наибольшей

*)Разделы 2–4 выполнены за счёт гранта Российского научного фонда (проект 17–11–01336). Раздел 5 выполнен при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16–31–60008–мол-а-дк) и лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ.

мощности. Мощность наибольшего независимого множества графа G обозначается через $\alpha(G)$. В дальнейшем для терминов «независимое множество», «максимальное независимое множество» и «наибольшее независимое множество» будем использовать сокращения «н. м.», «м. н. м.» и «н. н. м.» соответственно. Число всех н. м. (н. н. м.) графа G обозначается через $i(G)$ ($xi(G)$ соответственно).

Перечислению н. м. (м. н. м. или н. н. м.) в различных классах графов посвящена обширная литература. Корпус соответствующей литературы постоянно пополняется. В известной работе Муна и Мозера [8] было найдено значение максимально возможного числа м. н. м. и н. н. м. в графах с n вершинами и описаны все соответствующие экстремальные графы. Они оказались несвязными. В [2] был получен аналогичный результат для связных графов. В [4, 5, 7, 9] были найдены максимально возможные количества м. н. м. в графах без треугольников, в унициклических графах, в двудольных графах, в деревьях с n вершинами соответственно.

Применительно к н. н. м. в обзоре [6] было найдено максимально возможное их число в деревьях с n вершинами. В [6] были также приведены максимальные значения числа н. н. м. в n-вершинных графах из некоторых классов (в т. ч. в связных графах, унициклических графах, графах без треугольников).

В [3] для любого d были полностью описаны экстремальные деревья, максимизирующие число н. м. в классе деревьев со степенями всех вершин не более чем d. Позднее в [1] был указан метод построения n-вершинных деревьев с максимальным числом н. м., имеющих заданную последовательность степеней.

Как обычно, *деревом максимальной степени* d называется дерево, степень каждой вершины которого не превосходит d. Максимально возможное число н. м. и н. н. м. в n-вершинных деревьях максимальной степени d будем обозначать через $i_d(n)$ и $xi_d(n)$ соответственно. Дерево T максимальной степени d с n вершинами назовём (i, d, n)-*максимальным*, если $i(T) = i_d(n)$. Дерево T максимальной степени d с n вершинами назовём (xi, d, n)-*максимальным*, если $xi(T) = xi_d(n)$.

Единственным деревом максимальной степени два является простой путь. Все деревья с не более чем тремя вершинами тоже являются простыми путями. Поэтому далее, говоря о (i, d, n)-максимальных деревьях или о (xi, d, n)-максимальных деревьях, имеем в виду, что $d \geqslant 3$, $n \geqslant 4$.

Основным результатом настоящей работы является выявление всех (xi, d, n)-максимальных деревьев при любых значениях d и n. Оказалось, что для всех чётных n такое дерево единственно, а при нечётных n единственности может и не быть, причём при $d = 3$ для любого нечётного $n \geqslant 7$ имеется в точности $\lceil \frac{n-3}{4} \rceil + 1$ экстремальных деревьев.

Напомним, что *k-гусеницей* называется дерево, каждая вершина которого отстоит от некоторого его простого пути, называемого *хребтом*, на расстояние не более чем k. Дерево называется *(i, d, n)-максимальной k-гусеницей* (соответственно *(xi, d, n)-максимальной k-гусеницей*), если оно является k-гусеницей на n вершинах максимальной степени d и содержит наибольшее число н. м. (соответственно н. н. м.) среди всех такого рода деревьев. В данной работе выявим все $(xi, 3, n)$-максимальные 2-гусеницы и все $(xi, 4, n)$-максимальные 2-гусеницы для любого n.

1. Некоторые обозначения и определения

Будем использовать следующие обозначения:

P_n — простой путь на n вершинах;

$K_{p,q}$ — полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле;

$G_1 \cup G_2$ — дизъюнктное объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин;

kG — дизъюнктное объединение k экземпляров графа G;

$i_+(G, v)$ $(i_-(G, v))$ — число н. м. графа G, содержащих (не содержащих) вершину v;

$xi_+(G, v)$ $(xi_-(G, v))$ — число н. н. м. графа G, содержащих (не содержащих) вершину v;

$I(G)$ $(XI(G))$ — множество всех н. м. (н. н.м) графа G.

Будем использовать следующие определения: *размер графа* — число его вершин, *чётное* (*нечётное*) *дерево* — дерево, имеющее чётное (нечётное) число вершин. Вершина дерева *смежна с поддеревом*, если она имеет соседа в этом поддереве. Вершина k-гусеницы *находится на s-м ярусе*, если расстояние от неё до хребта k-гусеницы равно s.

2. Предварительные результаты

2.1. Операция расширения. Для графа G через $\mathrm{ext}(G)$ обозначим граф, полученный добавлением листа к каждой вершине G. Граф $\mathrm{ext}(G)$ будем называть *расширением* графа G.

Лемма 1. *Для любого графа G и его расширения $\mathrm{ext}(G)$ имеет место равенство $i(G) = xi(\mathrm{ext}(G))$.*

Доказательство. Очевидно, что $\alpha(\mathrm{ext}(G)) = |V(G)|$. К заданному множеству $I' \in I(G)$ добавим все элементы множества $V(\mathrm{ext}(G)) \setminus V(G)$, соседи которых не входят в I'. Ясно, что полученное множество вершин

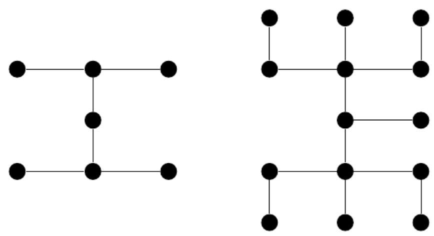

Рис. 1. Дерево и его расширение

будет н. н. м. графа G. При этом разным элементам множества $I(G)$ соответствуют разные элементы множества $XI(\mathrm{ext}(G))$. Обратно, удалив все элементы множества $V(\mathrm{ext}(G)) \setminus V(G)$ из любого элемента множества $XI(\mathrm{ext}(G))$, получим некоторое н. н. м. графа G. Тем самым между $I(G)$ и $XI(\mathrm{ext}(G))$ существует биекция. Отсюда следует справедливость леммы 1.

2.2. Операция разрастания. Два листа графа называются *листьями-дубликатами*, если они имеют общего соседа. *Набором листьев-дубликатов* графа назовём множество всех его листьев-дубликатов, смежных с некоторой общей вершиной. Отметим, что каждый такой набор содержит не менее двух элементов. Очевидно, что справедлива

Лемма 2. *Если в графе G из каждого набора листьев-дубликатов удалить все вершины кроме одной, то для полученного графа G' верно неравенство $xi(G) \leqslant xi(G')$.*

Назовём *побегом* дерева T его подграф, состоящий из вершины степени два и смежного с ней листа. Будем обозначать побег с листом v и смежной с ним вершиной u через uv. Назовём *разрастанием* дерева T дерево T', полученное присоединением нового побега cd, смежного с вершиной a, где ab — побег дерева T. Дерево, для которого можно построить разрастание (т. е. содержащее хотя бы один побег), будем называть *разрастаемым.*

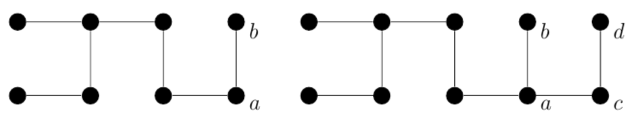

Рис. 2. Дерево и одно из его разрастаний

Лемма 3. *Для любого разрастания T' дерева T имеет место неравенство $xi(T') > xi(T)$.*

Доказательство. Предположим, что дерево T' получается из дерева T добавлением некоторого побега cd, смежного с вершиной a, где ab — побег дерева T. Ясно, что $xi(T') = xi_+(T', c) + xi_+(T', d)$. При этом $xi_+(T', d) = xi(T)$ и $xi_+(T', c) = xi_+(T, b)$. Поскольку $xi_+(T, a) + xi_+(T, b) = xi(T)$ и $xi_+(T, b) \geqslant xi_+(T, a)$, то $xi_+(T, b) \geqslant 1$. Отсюда следует справедливость утверждения леммы 3.

Лемма 4. *Каждое (xi, d, n)-максимальное дерево является разрастаемым.*

Доказательство. Покажем, что если дерево не является разрастаемым, то оно имеет по меньшей мере два набора листьев-дубликатов. Предположим, что (xi, d, n)-максимальное дерево T не разрастаемо, и рассмотрим в нём произвольный путь наибольшей длины. Обозначим концы этого пути через u_1 и u_2 (они будут листьями дерева T), а смежные с ними вершины — через v_1 и v_2 соответственно. Поскольку дерево T является (xi, d, n)-максимальным, то $v_1 \neq v_2$. У каждой из вершин v_1, v_2 все соседи, кроме одного, будут листьями. Поскольку дерево T не разрастаемое, то $\deg(v_1) \geqslant 3$, $\deg(v_2) \geqslant 3$. Пусть $m \triangleq \min(\deg(v_1), \deg(v_2))$. Тогда, удалив по $m-2$ листов, смежных с вершинами v_1 и v_2, получим разрастаемое дерево T', причём $xi(T') \geqslant xi(T)$ по лемме 2. Применив последовательно $m-2$ раз операцию разрастания к дереву T', получим дерево T'', причём $|V(T'')| = |V(T)|$ и $xi(T'') > xi(T') \geqslant xi(T)$ (по лемме 3), что противоречит (xi, d, n)-максимальности дерева T. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для любого $d \geqslant 3$ последовательности $xi_d(2k)$ и $xi_d(2k+1)$ строго монотонно возрастают.*

Доказательство. Пусть имеется (xi, d, n)-максимальное дерево T, которое по лемме 4 разрастаемо. Через T' обозначим произвольное разрастание дерева T. Тогда по лемме 3 имеет место двойное неравенство

$$xi_d(n+2) \geqslant xi(T') > xi(T) = xi_d(n).$$

Лемма 5 доказана.

Следствие 1. *В любом (xi, d, n)-максимальном дереве имеется не более одного набора листьев-дубликатов, причём данный набор содержит ровно два элемента.*

3. Свойства (xi, d, n)-максимальных деревьев

3.1. Отсутствие неподвижных вершин. Вершину v дерева T назовём *xi_+-неподвижной*, если она входит в каждое его н. н. м., т. е. если выполняется равенство $xi_+(T,v) = xi(T)$. Вершину u дерева T назовём *xi_--неподвижной*, если она не входит ни в какое его н. н. м., т. е. если выполняется равенство $xi_-(T,u) = xi(T)$. Очевидно, что все соседи xi_+-неподвижной вершины xi_--неподвижны. Путь с $2m+1$ вершинами ($m \geqslant 1$) в некотором дереве назовём *xi-чередующейся цепью*, если он начинается и заканчивается в xi_+-неподвижном листе, причём xi_+-неподвижные вершины чередуются в нём с xi_--неподвижными вершинами.

Нетрудно видеть, что в любом дереве листья-дубликаты всегда являются xi_+-неподвижными вершинами. Если каждая вершина дерева либо xi_+-неподвижна, либо xi_--неподвижна, то оно содержит единственное н. н. м. Интуитивно ясно, что деревья с максимальным числом н. н. м. должны содержать как можно меньше таких вершин. А именно, верны следующие утверждения: каждое $(xi, d, 2k)$-максимальное дерево не содержит xi_+-неподвижных вершин и каждое $(xi, d, 2k+1)$-максимальное дерево содержит ровно две xi_+-неподвижные вершины — пару листьев-дубликатов. Доказательство данных предложений будет представлено далее.

Лемма 6. *Всякое нечётное дерево содержит xi_+-неподвижный лист.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по размеру дерева $n = 2k+1$. База индукции $k = 0$ очевидна. Предположим, что утверждение выполняется для любого дерева размера $2k+1$. Рассмотрим произвольное дерево T размера $2k+3$. Если оно содержит листья-дубликаты, то доказывать нечего. В противном случае в нём существует побег uv, причём вершина u смежна с некоторым поддеревом T' размера $2k+1$, которое по предположению индукции содержит xi_+-неподвижный лист z. В дереве T вершина z либо является листом, либо смежна с побегом uv. В обоих случаях эта вершина xi_+-неподвижна, так как всякое н. м. дерева T, не содержащее z, содержит менее $\alpha(T) = \alpha(T')+1$ вершин и не является наибольшим. Если z является листом дерева T, то в нём есть xi_+-неподвижный лист. Если же z смежна с u, то вершина v будет xi_+-неподвижным листом. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *В любом дереве с xi_+-неподвижной вершиной существует xi-чередующаяся цепь, содержащая эту вершину.*

Доказательство. Предположим, что в некотором дереве T существует xi_+-неподвижная вершина v. Рассмотрим множество её соседей $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, которые, очевидно, являются xi_--неподвижными вершинами и покажем, что каждая из них смежна ещё хотя бы с одной xi_+-неподвижной вершиной. Предположим, что все соседи вершины u_1, кроме v, не являются xi_+-неподвижными. Поскольку T — дерево, существует $I \in XI(T)$, содержащее ровно одного соседа вершины u_1 — вершину v. Рассмотрим множество $(I \setminus \{v\}) \cup \{u_1\}$ и снова получим н. н. м. дерева T. Значит, существует xi_+-неподвижная вершина v_1, отличная от v и смежная с u_1.

Если вершина v_1 не является листом, то рассмотрим её соседа v', отличного от u_1, и, рассуждая аналогично, убедимся, что эта вершина смежна с xi_+-неподвижной вершиной v_2, отличной от v_1. Продолжая эти рассуждения, рано или поздно покажем существование xi_+-неподвижного листа. Если исходная вершина v также является листом, то утверждение леммы доказано. Если нет, то, рассмотрев ещё одного её соседа u_2 и проведя аналогичные рассуждения, покажем существование второго xi_+-неподвижного листа. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Если в некотором (xi, d, n)-максимальном дереве T существует xi-чередующаяся цепь, то в нём не существует xi_+-неподвижных вершин за пределами этой цепи.*

Доказательство. Пусть имеется цепь $P \triangleq (z_1, \ldots, z_{2k+1})$ и в одном из максимальных по включению поддеревьев, смежных с вершинами цепи и не содержащих её вершин, существует xi_+-неподвижная вершина u. Тогда по лемме 7 существует xi-чередующаяся цепь, проходящая через вершину u, а значит, существует xi_+-неподвижный лист w за пределами цепи P. Удалим из цепи вершину z_1 и присоединим её к w. Новое дерево обозначим через T'. Покажем, что в результате наших действий число н. н. м. увеличилось.

Нетрудно видеть, что имеет место равенство $\alpha(T') = \alpha(T) - 1$. Таким образом, любое н. м. дерева T', содержащее $\alpha(T) - 1$ вершин, будет наибольшим. Построим отображение $F\colon XI(T) \to XI(T')$, которое переводит н. н. м. I дерева T в н. н. м. $I \setminus \{w\}$ дерева T'. Ясно, что отображение будет инъективным. Кроме того, для некоторого $I' \in XI(T')$ справедливо $w \in I'$. Поэтому I' не совпадает ни с каким $F(I), I \in XI(T)$. Тогда $xi(T') > xi(T)$; противоречие. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Каждое (xi, d, n)-максимальное дерево не содержит xi-чередующихся цепей длины четыре и более.*

Доказательство. Предположим, что в некотором (xi, d, n)-максимальном дереве T существует xi-чередующаяся цепь P длины не менее чем четыре. Рассмотрим её начальный участок $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$. Вершина z_1 является листом дерева T. Напомним, что в доказательстве леммы 7 было показано, что в любом дереве с не менее чем двумя вершинами каждый сосед b произвольной xi_+-неподвижной вершины a имеет xi_+-неподвижного соседа $c_b \neq a$. Тогда $\deg(z_3) = 2$ и $\deg(z_5) = 2$ (если длина P не менее пяти) по лемме 8. Обозначим через C смежное с z_5 максимальное по включению поддерево дерева T, не содержащее вершины z_4. Вершины z_2 и z_4 смежны не более чем с $d-2$ максимальными по включению поддеревьями, не содержащими вершин z_1–z_5 каждое, которые будем обозначать через A_i и B_j соответственно (рис. 3).

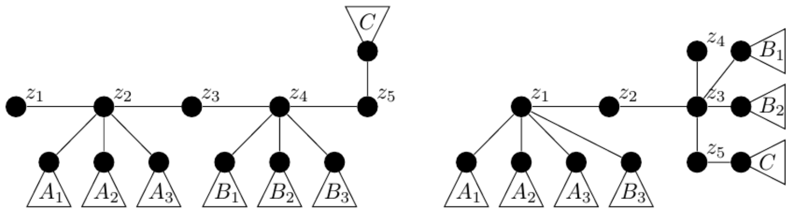

Рис. 3. Пример преобразования в случае $d = 5$

Удалим из T ребро z_4z_5 и добавим ребро z_3z_5. Присоединим все поддеревья A_i к вершине z_1, а все поддеревья B_j — к вершине z_3. Если при этом степень z_3 превысит d, то присоединим одно из поддеревьев к вершине z_1.

Нетрудно видеть, что в полученном дереве T' степени всех вершин не превосходят d. Напомним, что вершины z_1, z_3, z_5 в дереве T являются xi_+-неподвижными. Поэтому любое его н. н. м. I можно представить в виде

$$I = \{z_1, z_3, z_5\} \cup I_A \cup I_B \cup I_C,$$

где

$$I_C \triangleq I \cap (V(C) \setminus \{z_6\}), \quad I_A \triangleq I \cap \bigcup_i V(A_i), \quad I_B \triangleq I \cap \bigcup_j V(B_j).$$

Через T'' обозначим поддерево дерева T', порождённое вершинами $z_1, \ldots, z_5$. Ясно, что $\alpha(T'') = 3$ и каждое его н. н. м. содержит вершину z_5. Кроме того,

$$|\{z_2, z_4, z_5\}| + |I_A| + |I_B| + |I_C| \leqslant \alpha(T') \leqslant \alpha(T'') + |I_A| + |I_B| + |I_C|,$$

поэтому $\alpha(T') = \alpha(T)$. Пусть отображение $F\colon XI(T) \to XI(T')$ переводит н. н. м. $\{z_1, z_3, z_5\} \cup I_A \cup I_B \cup I_C$ дерева T в н. н. м. $\{z_2, z_4, z_5\} \cup I_A \cup I_B \cup I_C$ дерева T'. При этом существует хотя бы одно н. н. м. дерева T', содержащее вершины z_1, z_4, z_5, поскольку в поддеревьях A_i и B_j дерева T

нет xi_+-неподвижных вершин по лемме 8. Тем самым $xi(T') > xi(T)$; противоречие. Лемма 9 доказана.

Из лемм 7 и 9 следует, что произвольный xi_+-неподвижный лист любого (xi, d, n)-максимального дерева принадлежит xi-чередующейся цепи длины два. Значит, другой конец цепи и будет дубликатом этого листа.

Следствие 2. *Каждый xi_+-неподвижный лист любого (xi, d, n)-максимального дерева имеет лист-дубликат.*

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

(A) *Каждое $(xi, d, 2k+1)$-максимальное дерево содержит ровно две xi_+-неподвижные вершины — пару листьев-дубликатов.*

(B) *Каждое $(xi, d, 2k)$-максимальное дерево не содержит xi_+-неподвижных вершин.*

Доказательство. (A) По лемме 6 каждое $(xi, d, 2k+1)$-максимальное дерево содержит xi_+-неподвижный лист, который по следствию 2 имеет лист-дубликат. Значит, по следствию 1 соответствующий набор содержит ровно два листа-дубликата. Эти листья являются концами xi-чередующейся цепи из трёх вершин, за пределами которой по лемме 8 не существует других xi_+-неподвижных вершин.

(B) Если в $(xi, d, 2k)$-максимальном дереве есть xi_+-неподвижные вершины, то по лемме 7 есть и xi_+-неподвижные листья. По лемме 8 и следствиям 1 и 2 дерево содержит единственную пару листьев-дубликатов. Тогда существует дерево размера $2k-1$, содержащее не меньшее число н. н. м., т. е. $xi_d(2k-1) \geqslant xi_d(2k)$. С другой стороны, $(xi, d, 2k+1)$-максимальное дерево также содержит пару листьев-дубликатов (см. п. (A)). Значит, верно двойное неравенство $xi_d(2k-1) \geqslant xi_d(2k) \geqslant xi_d(2k+1)$, которое противоречит лемме 5. Теорема 1 доказана.

3.2. Расширяемость $(xi, d, 2k)$-максимальных деревьев. Докажем наиболее важное свойство $(xi, d, 2k)$-максимальных деревьев, позволяющее свести нашу задачу к уже решённой в [3] задаче для н. м.

Лемма 10. *Вершины любого дерева размера $2k$, не содержащего xi_+-неподвижных вершин, могут быть единственным образом разбиты на k пар $A_1, \ldots, A_k$ смежных вершин таким образом, что каждое н. н. м. дерева содержит ровно одну вершину из каждой пары.*

Доказательство проведём индукцией по размеру дерева. База индукции $k = 1$ очевидна. Предположим, что T — произвольное дерево без xi_+-неподвижных вершин размера $2k$ и утверждение леммы выполняется для любого дерева размера $2k-2$. Дерево T не содержит листьев-дубликатов (иначе они были бы xi_+-неподвижными вершинами), следовательно, оно содержит некоторый побег uv. Обозначим через T' результат удаления вершин u и v из дерева T. Ясно, что $\alpha(T') = \alpha(T) - 1$ и каждое н. н. м. дерева T содержит либо v, либо u, причём существуют н. н. м. дерева T обоих типов, иначе u или v была бы xi_+-неподвижной вершиной. Поэтому ни один сосед вершины u не является xi_+-неподвижной вершиной в дереве T'. Никакая другая вершина дерева T' с очевидностью не является xi_+-неподвижной. По предположению индукции $V(T')$ можно разбить на пары $A_1, \ldots, A_{k-1}$ единственным образом. Положив $A_k = \{u, v\}$, получим требуемое разбиение, которое также единственно. Лемма 10 доказана.

До конца данного пункта под парой вершин понимается одна из пар со свойством из формулировки леммы 10.

Лемма 11. *Для любого побега uv произвольного дерева T имеет место неравенство $xi_-(T, u) \geqslant \frac{xi(T)}{2}$.*

Доказательство. Поскольку каждое н. н. м. дерева T содержит ровно одну из вершин u и v, имеет место равенство

$$xi_-(T, u) + xi_-(T, v) = xi(T).$$

Ясно, что

$$xi_-(T, u) + xi_+(T, u) = xi_-(T, v) + xi_+(T, v) = xi(T).$$

Так как вершина v листовая, имеем неравенство $xi_+(T, v) \geqslant xi_+(T, u)$. Значит, $xi_-(T, u) \geqslant xi_-(T, v)$, откуда и следует справедливость утверждения леммы.

Предположим, что T — произвольное $(xi, d, 2k)$-максимальное дерево. Тогда по теореме 1 оно не содержит xi_+-неподвижных вершин. Пусть $\{u, v\}$ — пара вершин T. Обозначим через $A_1, \ldots, A_l$ все максимальные по включению поддеревья, смежные с вершиной u и не содержащие v, а через $B_1, \ldots, B_r$ —все максимальные по включению поддеревья, смежные с вершиной v и не содержащие u. Поскольку $\{u, v\}$ — пара, по лемме 10 каждое из деревьев $A_1, \ldots, A_l, B_1, \ldots, B_r$ чётное. Каждое из них не содержит листьев-дубликатов, иначе T содержало бы листья-дубликаты, которые обязательно будут его xi_+-неподвижными вершинами. Поэтому каждое из них обязательно содержит побег.

Для дерева T^* через r_{T^*} обозначим его корень, а через $p(T^*)$ — величину $\frac{xi(T^* \setminus \{r_{T^*}\})}{xi(T^*)}$. Определим следующие величины:

$$a \triangleq \prod_{i=1}^{l} xi(A_i), \quad a_0 \triangleq \prod_{i=1}^{l} xi(A_i \setminus \{r_{A_i}\}),$$

$$p(a) \triangleq \prod_{i=1}^{l} \frac{xi(A_i \setminus \{r_{A_i}\})}{xi(A_i)} = \prod_{i=1}^{l} p(A_i),$$

$$b \triangleq \prod_{i=1}^{r} xi(B_i), \quad b_0 \triangleq \prod_{i=1}^{r} xi(B_i \setminus \{r_{B_i}\}),$$

$$p(b) \triangleq \prod_{i=1}^{r} \frac{xi(B_i \setminus \{r_{B_i}\})}{xi(B_i)} = \prod_{i=1}^{r} p(B_i).$$

Так как в каждое н. н. м. дерева T входит ровно одна из вершин u и v, имеет место равенство

$$xi(T) = a_0 \cdot b + a \cdot b_0.$$

Тем самым $p(a) > 0$ и $p(b) > 0$, иначе u или v будет xi_+-неподвижной вершиной дерева T. Не уменьшая общности, будем считать, что $p(a) \geqslant p(b)$. Дерево A, образованное вершиной u и вершинами чётных деревьев $A_1, \ldots, A_l$, будет нечётным. По лемме 6 дерево A содержит xi_+-неподвижный лист. Если $p(a) = 1$, то он обязательно будет xi_+-неподвижным листом дерева T, поэтому $p(a) < 1$. Аналогично $p(b) < 1$. Назовём поддерево A_i *подходящим*, если $p(A_i) < 1$. Очевидно, что среди $A_1, \ldots, A_l$ есть подходящее поддерево.

Теорема 2. *Дерево T является расширением некоторого дерева размера k.*

Доказательство. Покажем, что каждая из k пар содержит лист дерева T. Отсюда будет следовать справедливость утверждения теоремы. Предположим, что в паре $\{u, v\}$ обе вершины нелистовые.

Обозначим через X одно из подходящих поддеревьев. Произвольное максимальное по включению поддерево, смежное с v и не содержащее u, обозначим через Y. Остальные поддеревья, смежные с u или с v, по-прежнему обозначаются через $A_1, \ldots, A_l$ и $B_1, \ldots, B_r$, где $l \geqslant 0$ и $r \geqslant 0$. Относительно $A_1, \ldots, A_l$ и $B_1, \ldots, B_r$ обозначения a, b, a_0, b_0, $p(a)$, $p(b)$ имеют такой же смысл, что и ранее. Введём обозначения

$$x \triangleq xi(X), \quad y \triangleq xi(Y), \quad x_0 \triangleq xi(X \setminus \{r_X\}), \quad y_0 \triangleq xi(Y \setminus \{r_Y\}).$$

Легко видеть, что $xi(T) = b \cdot y \cdot a_0 \cdot x_0 + a \cdot x \cdot b_0 \cdot y_0$. Рассмотрим дерево T', полученное из T удалением поддерева X и прикреплением его к некоторому побегу wt поддерева Y (рис. 4).

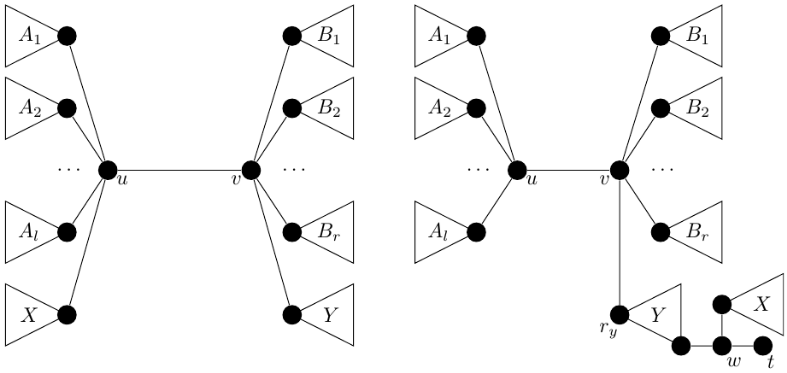

Рис. 4. Перемещение поддерева X

Пусть $y^+ \triangleq xi_+(Y,w)$, $y^- \triangleq xi_-(Y,w)$. Обозначим через y_0^+ число н. н. м. поддерева Y, одновременно содержащих вершину w и не содержащих вершины r_Y. Обозначим через y_0^- число н. н. м. поддерева Y, одновременно не содержащих ни w, ни r_Y.

Покажем, что $xi(T') > xi(T)$. Нетрудно проверить, что

$$xi(T') = a_0 \cdot b \cdot (y^+ \cdot x_0 + y^- \cdot x) + a \cdot b_0 \cdot (y_0^+ \cdot x_0 + y_0^- \cdot x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} xi(T') - xi(T) &= a_0 \cdot b \cdot y^- \cdot (x - x_0) - a \cdot b_0 \cdot y_0^+ \cdot (x - x_0) \\ &= (x - x_0) \cdot (a_0 \cdot b \cdot y^- - a \cdot b_0 \cdot y_0^+). \end{aligned}$$

Поскольку X является подходящим, то $x > x_0$. Так как $p(a) \geqslant p(b)$, то $a_0 \cdot b \geqslant b_0 \cdot a > 0$. По лемме 11 величина y^- не менее чем $\frac{1}{2}$. По аналогии с доказательством леммы 11 можно показать, что $y_0^+ \leqslant \frac{y_0}{2}$. Поскольку $p(Y) > 0$, то $y_0^+ < \frac{1}{2}$. Значит, $xi(T') > xi(T)$; противоречие. Теорема 2 доказана.

4. Структура (xi, d, n)-максимальных деревьев

4.1. Чётный случай. Будем обозначать полное d-арное дерево высоты $h-1$ через $C_{d,h}$. В частности, $C_{d,0}$ — пустое дерево, а $C_{d,1}$ состоит из одной вершины при любом d. В [3] было доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любых $d \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$ существует единственное $(i, d+1, n)$-максимальное дерево $T_{d+1,n}$, которое может быть представлено в виде, указанном на рис. 5, где $M_{k,1}, \ldots, M_{k,d-1} \in \{C_{d,k}, C_{d,k+2}\}$*

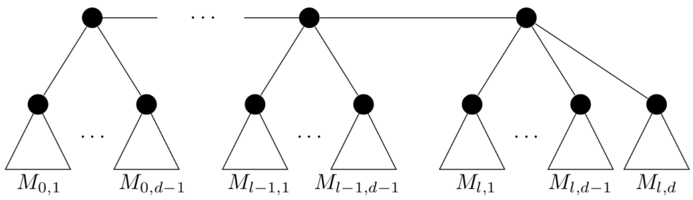

Рис. 5. Структура дерева $T_{d+1,n}$

при $0 \leqslant k \leqslant l-1$ *и либо* $M_{l,1} = \dots = M_{l,d} = C_{d,l-1}$, *либо* $M_{l,1} = \dots = M_{l,d} = C_{d,l}$, *либо* $M_{l,1}, \dots, M_{l,d} \in \{C_{d,l}, C_{d,l+1}, C_{d,l+2}\}$, *где хотя бы два из поддеревьев* $M_{l,1}, \dots, M_{l,d}$ *равны* $C_{d,l+1}$.

Теорема 4. *Существует единственное* $(xi, d, 2k)$*-максимальное дерево. Оно изоморфно дереву* $\mathrm{ext}(T_{d-1,k})$.

Доказательство. По теореме 2 каждое $(xi, d, 2k)$-максимальное дерево является расширением некоторого дерева максимальной степени $d-1$ на k вершинах. Но тогда $xi_d(2k) = i_{d-1}(k)$ по лемме 1. Значит, любое $(xi, d, 2k)$-максимальное дерево изоморфно дереву $\mathrm{ext}(T_{d-1,k})$ по теореме 3.

На рис. 6 приведено $(xi, 4, 12)$-максимальное дерево, полученное из $(i, 3, 6)$-максимального дерева.

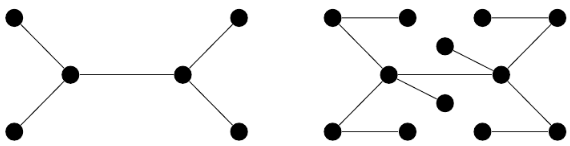

Рис. 6. Деревья $T_{3,6}$ и $\mathrm{ext}(T_{3,6})$

4.2. Нечётный случай.

Лемма 12. *Для любого* $(xi, d, 2k+1)$*-максимального дерева* T *имеет место равенство* $xi(T) = \prod_{i=1}^{d'} xi(T_i)$, *где дерево* T_i *является* $(xi, d, 2k_i)$*-максимальным, причём* $\sum_{i=1}^{d'} k_i = k-1$ *и* $d' \leqslant d-2$.

Доказательство. По теореме 1 дерево T содержит xi_+-неподвижные листья-дубликаты u и v, а также их общего xi_--неподвижного соседа w. Тогда w смежна с $d' \leqslant d-2$ максимальными по включению поддеревьями $T_1, \dots, T_{d'}$, каждое из которых не содержит ни v, ни u. Тогда $xi(T) = \prod_{i=1}^{d'} xi(T_i)$. По теореме 1 дерево T содержит ровно две xi_+-неподвижные вершины и ровно одну xi_--неподвижную вершину, а все поддеревья $T_1, \ldots, T_{d'}$ чётные. Поскольку дерево T является $(xi, d, 2k+1)$-максимальным, каждое из поддеревьев $T_1, \ldots, T_{d'}$ будет $(xi, d, 2k_i)$-максимальным. Лемма 12 доказана.

По теореме 4 и лемме 12 справедливо равенство $\bigcup_{i=1}^{d'} T_i = \mathrm{ext}(F)$, где F — лес размера $k-1$ максимальной степени $d-1$. Таким образом, задача максимизации числа н. н. м. в дереве размера $2k+1$ максимальной степени d сводится к задаче максимизации числа всех н. м. в лесе размера $k-1$, состоящем из не более чем $d-2$ компонент связности максимальной степени $d-1$ каждая.

Пусть T_1 и T_2 — деревья, каждое из которых имеет не менее двух вершин. Назовём *сращиванием* деревьев T_1 и T_2 дерево T, которое получается отождествлением некоторого листа дерева T_1 и некоторого листа дерева T_2.

Лемма 13. *Для любых деревьев T_1 и T_2, состоящих из более чем одной вершины каждое, и любого их сращивания T верно неравенство $2i(T) > i(T_1) \cdot i(T_2)$.*

Доказательство. Пусть отождествляются лист v дерева T_1 и лист u дерева T_2. Положим

$$A \triangleq i_-(T_1, v), \quad A' \triangleq i_+(T_1, v), \quad B \triangleq i_-(T_2, u), \quad B' \triangleq i_+(T_2, u).$$

При этом $A > A'$, $B > B'$, поскольку деревья T_1 и T_2 состоят из более чем одной вершины каждое (напомним, что пустое множество тоже является н. м.). Нетрудно видеть, что

$$i(T_1) \cdot i(T_2) = (A + A') \cdot (B + B'), \quad 2i(T) = 2 \cdot A \cdot B + 2 \cdot A' \cdot B'.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &2i(T) - i(T_1) \cdot i(T_2) \\ &\qquad = 2 \cdot A \cdot B + 2 \cdot A' \cdot B' - A \cdot B - A' \cdot B - A \cdot B' - A' \cdot B' \\ &\qquad\qquad = A \cdot B + A' \cdot B' - A' \cdot B - A \cdot B' = (A - A')(B - B') > 0. \end{aligned}$$

Лемма 13 доказана.

Лемма 14. *Среди всех лесов максимальной степени d и размера n, состоящих из не более чем $s \leqslant n$ компонент связности, наибольшее число всех н. м. имеет лес $(s-1)P_1 \cup T_{d,n-s+1}$.*

Доказательство. Пусть существует оптимальный лес F, содержащий две компоненты связности T_1 и T_2, каждая из которых отлична от P_1. Построим дерево T — произвольное сращивание T_1 и T_2, и заменим $T_1 \cup T_2$ на $P_1 \cup T$. Ясно, что

$$i(P_1 \cup T) = 2i(T) \quad \text{и} \quad i(T_1 \cup T_2) = i(T_1) \cdot i(T_2).$$

Поэтому по лемме 13 для нового леса F' верно неравенство $i(F') > i(F)$; противоречие с оптимальностью леса F.

Докажем, что при любых d' и n' выполнено неравенство $2i(T_{d',n'}) > i(T_{d',n'+1})$. Поскольку из него следует, что для любого $s' < s$ имеет место

$$i((s-1)P_1 \cup T_{d,n-s+1}) > i((s'-1)P_1 \cup T_{d,n-s'+1}),$$

этого будет достаточно для доказательства леммы. Пусть x — лист дерева $T_{d',n'+1}$. Тогда $i_-(T_{d',n'+1}, x) > i_+(T_{d',n'+1}, x)$, поэтому справедливо неравенство

$$i(T_{d',n'+1}) = i_-(T_{d',n'+1}, x) + i_+(T_{d',n'+1}, x) < 2i_-(T_{d',n'+1}, x) \leqslant 2i(T_{d',n'}).$$

Лемма 14 доказана.

Обозначим через S_p граф, получаемый подразбиением $p-2$ рёбер графа $K_{1,p}$. Назовём *d-наращиванием дерева* T дерево, полученное соединением центральной вершины графа S_{d-1} с некоторой вершиной дерева $\mathrm{ext}(T)$ степени не более чем $d-1$.

Теорема 5. *Если $k \geqslant d-1$, то множество $(xi, d, 2k+1)$-максимальных деревьев совпадает с множеством всевозможных d-наращиваний дерева $T_{d-1,k-d+2}$. Если $1 \leqslant k < d-1$, то единственным $(xi, d, 2k+1)$-максимальным деревом является дерево S_{k+1}.*

Доказательство. По лемме 14 лес $F \triangleq (d-3)P_1 \cup T_{d-1,k-d+2}$ имеет максимальное число н. м. среди всех лесов максимальной степени $d-1$ размера $k-1$ и не более чем с $d-2$ компонентами связности. Но тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{d-2} T_i = \mathrm{ext}(F)$ (в обозначениях доказательства леммы 12). Удалив в произвольном d-наращивании дерева $T_{d-1,k-d+2}$ центральную вершину и два смежных с ней листа подграфа S_{d-1}, получим в точности лес $\mathrm{ext}(F)$. Отсюда следует, что теорема верна при $k \geqslant d-1$. Справедливость утверждения при $1 \leqslant k < d-1$ следует из лемм 12–14. Теорема 5 доказана.

Тем самым $(xi, d, 2k+1)$-максимальное дерево может быть не единственным. На рис. 7 рассмотрен случай $d = 4$, $k = 5$ и двух 4-наращиваний оптимального леса $T_{3,3} = P_3$.

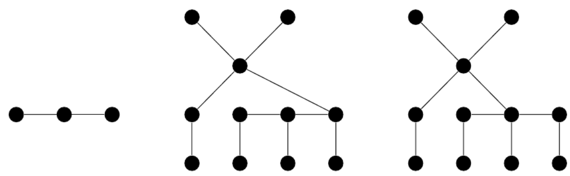

Рис. 7. Путь P_3 и два его различных 4-наращивания

4.3. Случай $d = 3$**.** В случае $d = 3$ структура экстремальных деревьев довольно простая и удаётся полностью их перечислить. Поэтому, по нашему мнению, данный случай заслуживает отдельного рассмотрения. Введём переобозначение $R_k \triangleq \mathrm{ext}(P_k)$ (рис. 8).

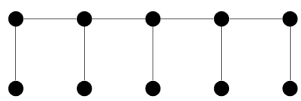

Рис. 8. Граф R_5

Лемма 15. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Существует единственное* $(xi, 3, 2k)$*-максимальное дерево, и оно изоморфно дереву* R_k.

2. *Для любого* $k \geqslant 3$ *существует ровно* $\left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil + 1$ *попарно не изоморфных* $(xi, 3, 2k+1)$*-максимальных деревьев.*

Доказательство. По теореме 4 каждое $(xi, 3, 2k)$-максимальное дерево изоморфно графу $\mathrm{ext}(T_{2,k}) = \mathrm{ext}(P_k) = R_k$. Из теоремы 5 следует, что любое $(xi, 3, 2k+1)$-максимальное дерево получается из R_{k-1} добавлением вершины x, двух листьев, смежных с x, а также ребра xy, где y — некоторая из вершин дерева R_{k-1} степени меньше чем три. Если $\deg(y) = 2$, то два возможных кандидата для y дают изоморфные деревья. Если $\deg(y) = 1$, то $k-1$ возможных кандидатов для y разбиваются на пары по осевой симметрии дерева R_{k-1}. Каждая такая пара порождает своё $(xi, 3, 2k+1)$-максимальное дерево. Лемма 15 доказана.

5. Структура $(xi, 4, n)$-максимальных 2-гусениц

Из леммы 15 следует, что все $(xi, 3, n)$-максимальные деревья являются 2-гусеницами. В данном разделе полностью опишем все $(xi, 4, n)$-

максимальные 2-гусеницы. Сначала покажем, что утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, справедливы и для класса 2-гусениц.

Лемма 16. *Справедливы следующие утверждения.*

(A) *Каждая $(xi, d, 2k+1)$-максимальная 2-гусеница содержит ровно две xi_+-неподвижные вершины — пару листьев-дубликатов.*

(B) *Каждая $(xi, d, 2k)$-максимальная 2-гусеница не содержит xi_+-неподвижных вершин.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что все утверждения разд. 2 переносятся без изменений и на случай k-гусениц при любом $k \geqslant 1$. Утверждения лемм 6 и 7 также переносятся без изменений.

Покажем справедливость утверждения леммы 8. Предположим, что существует xi_+-неподвижная вершина за пределами xi-чередующейся цепи P. Значит, существует и xi_+-неподвижный лист v за пределами P. Если v находится на хребте или на 1-м ярусе, то присоединим конец цепи P к этому листу (аналогично присоединению из доказательства леммы 8) и получим 2-гусеницу с большим числом н. н. м. Если же лист v находится на 2-м ярусе, то рассмотрим соседнюю с ним вершину u. Если $\deg(u) = 2$, то, удалив побег uv, получим 2-гусеницу с таким же числом н. н. м. и на два меньшим числом вершин, что противоречит следствию 1. В противном случае (в котором u является соседом листьев-дубликатов) рассмотрим один из концов цепи P, который обозначим через w. Вершина w не может находиться на 2-м ярусе, так как иначе она содержится в некотором побеге или существует два набора листьев-дубликатов, что невозможно по следствию 1. Прикрепив к w лист v, получим 2-гусеницу с большим числом н. н. м.

Теперь покажем справедливость утверждения леммы 9. Предположим, что хотя бы один конец xi-чередующейся цепи P' находится на 2-м ярусе. Тогда либо его сосед имеет степень два, что невозможно, поскольку тогда можно удалить эти две вершины и число н. н. м. не изменится, либо этот лист является дубликатом, но тогда единственная xi-чередующаяся цепь в дереве имеет длину три, что и требовалось. Если оба конца цепи P' находятся на 1-м ярусе, то легко проверить, что при их удалении число н. н. м. останется прежним, что противоречит (xi, d, n)-максимальности 2-гусеницы. Если же хотя бы один из концов цепи P' является концом хребта, то рассмотрим начальный участок цепи P', который начинается с него, и применим рассуждения из леммы 9.

Рассуждения теоремы 1, как нетрудно проверить, также переносятся без изменений. Лемма 16 доказана.

Лемма 17. *Каждая $(xi, d, 2k)$-максимальная 2-гусеница есть расширение некоторой 1-гусеницы размера k максимальной степени $d-1$.*

Доказательство. Предположим, что существует пара нелистовых вершин $\{u, v\}$ в некоторой $(xi, d, 2k)$-максимальной 2-гусенице. Покажем, что тогда они обе лежат на хребте 2-гусеницы. Предположим, что это не так, тогда u лежит на 1-м ярусе, а v — на хребте. Но тогда соседи вершины u, лежащие на 2-м ярусе, не имеют пар. Таким образом, обе вершины u и v лежат на хребте. Обозначим через X и Y некоторые максимальные по включению поддеревья с корнями в соседях вершин u и v, причём X является подходящим. После этого будем действовать аналогично теореме 2. Нетрудно видеть, что получившееся в результате преобразования дерево также будет 2-гусеницей, так как всегда можем выбрать побег дерева Y, лежащий на хребте (если такого побега нет, то в дереве есть листья-дубликаты, что невозможно по предыдущей лемме). Лемма 17 доказана.

Через R'_k обозначим граф, получаемый добавлением листа к каждой вершине степени два графа R_k (рис. 9), а через R''_k обозначим результат добавления листа к одной из его вершин степени два. Через $R'_{k,s}$ обозначим результат удаления вершины v_s из графа R'_k.

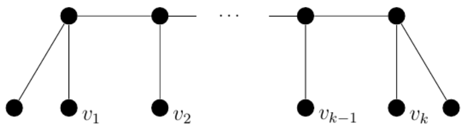

Рис. 9. Граф R'_k

Лемма 18. *Для любого $k \geqslant 2$ единственной $(i, 3, 2k+2)$-максимальной 1-гусеницей является дерево R'_k. Для любого $k \geqslant 2$ единственной $(i, 3, 2k+1)$-максимальной 1-гусеницей является дерево $R'_{k,2}$.*

Доказательство. По замечанию 4.2 из [3] каждая $(i, 3, n)$-максимальная 1-гусеница имеет не более одной вершины степени два. Поэтому каждая $(i, 3, n)$-максимальная 1-гусеница изоморфна одному из графов R'_k, $R'_{k,s}$ при некоторых k и $1 \leqslant s \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Тем самым единственной $(i, 3, 2k+2)$-максимальной 1-гусеницей является дерево R'_k. Пусть теперь $n = 2k+1$. Очевидно, что равенство

$$i(R'_k) = i_-(R'_k, v_s) + i_+(R'_k, v_s) = i(R'_{k,s}) + i(R''_{s-1}) \cdot i(R''_{k-s})$$

справедливо для любого $3 \leqslant s \leqslant k$ (доопределив $i(R_0'') = 2$, $i(R_1'') = 5$, можно считать его выполненным и при $s \in \{1, 2\}$). Поэтому справедливо равенство

$$\arg \max_{1 \leqslant s \leqslant k} i(R'_{k,s}) = \arg \min_{1 \leqslant s \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil} (i(R''_{s-1}) \cdot i(R''_{k-s})).$$

Введём обозначение $i_k \triangleq i(R''_k)$, тогда $i_k = 2i_{k-1} + 2i_{k-2}$ $(k \geqslant 2)$ и $i_0 = 2$, $i_1 = 5$. Положим $\Phi_{k,s} \triangleq i_{s-1} \cdot i_{k-s}$. Докажем по индукции, что

$$\arg \min_{1 \leqslant s \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil} \Phi_{k,s} = \{2\}.$$

Это нетрудно проверить для всех $2 \leqslant k \leqslant 5$. Предположим, что $k \geqslant 6$ и что для всех $k' < k$ выполнено равенство

$$\arg \min_{1 \leqslant s \leqslant \lceil \frac{k'}{2} \rceil} \Phi_{k',s} = \{2\}.$$

Воспользовавшись равенством $\Phi_{k,2} = 2\Phi_{k-1,2} + 2\Phi_{k-2,2}$ и неравенством

$$\min(a_1, b_1, c_1) + \min(a_2, b_2, c_2) \leqslant \min(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2),$$

верным для любых вещественных его аргументов, нетрудно по индукции доказать справедливость неравенства $\Phi_{k,2} < \min(\Phi_{k,1}, \Phi_{k,3}, \Phi_{k,4})$. Далее будем считать, что $4 \leqslant s \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Тогда $k - s - 1 \geqslant 2$.

Имеем

$$\begin{aligned}
\Phi_{k,s} - \Phi_{k,s+1} &= i_{s-1} \cdot i_{k-s} - i_s \cdot i_{k-s-1} \\
&= i_{s-1} \cdot (2i_{k-s-1} + 2i_{k-s-2}) - (2i_{s-1} + 2i_{s-2}) \cdot i_{k-s-1} \\
&= 2(i_{s-1} \cdot i_{k-s-2} - i_{s-2} \cdot i_{k-s-1}) \\
&= 2((2i_{s-2} + 2i_{s-3}) \cdot i_{k-s-2} - i_{s-2} \cdot (2i_{k-s-2} + 2i_{i-s-3})) \\
&= 4(i_{s-3} \cdot i_{k-s-2} - i_{s-2} \cdot i_{k-s-3}) = 4(\Phi_{k-4,s-2} - \Phi_{k-4,s-1}).
\end{aligned}$$

Тем самым для любых $4 \leqslant s' \leqslant s \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$ выполнено равенство

$$\Phi_{k,s'} - \Phi_{k,s} = 4(\Phi_{k-4,s'-2} - \Phi_{k-4,s-2}).$$

Положив $s' = 4$ и воспользовавшись предположением индукции, имеем

$$\Phi_{k,4} - \Phi_{k,s} = 4(\Phi_{k-4,2} - \Phi_{k-4,s-2}) \leqslant 0,$$

т. е. при $s \geqslant 4$ выполнено неравенство $\Phi_{k,4} \leqslant \Phi_{k,s}$. Отсюда и из неравенства $\Phi_{k,2} < \min(\Phi_{k,1}, \Phi_{k,3}, \Phi_{k,4})$ следует, что

$$\arg \min_{1 \leqslant s \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil} \Phi_{k,s} = \{2\}.$$

Значит, единственной $(i, 3, 2k+1)$-максимальной 1-гусеницей является дерево $R'_{k,2}$. Лемма 18 доказана.

Пусть $n \geqslant 5$. По лемме 18 существует единственная $(i, 3, n)$-максимальная 1-гусеница T^*_n, которая при чётном n изоморфна дереву $R'_{\frac{n}{2}-1}$, а при нечётном n изоморфна дереву $R'_{\frac{n-1}{2},2}$. Существует ровно два неизоморфных дерева с четырьмя вершинами — P_4 и $K_{1,3}$, при этом $i(P_4) = 8$, $i(K_{1,3}) = 9$. Поэтому положим $T^*_4 \triangleq K_{1,3}$ и $T^*_n \triangleq P_n$, если $1 \leqslant n \leqslant 3$, и $T^*_0 \triangleq P_1$. По лемме 17 существует единственная $(xi, 4, 2k)$-максимальная 2-гусеница и она изоморфна дереву $\mathrm{ext}(T^*_k)$. Используя лемму 16, по аналогии с рассуждениями лемм 12–14 и теоремы 5 нетрудно доказать, что каждая $(xi, 4, 2k+1)$-максимальная 2-гусеница является 4-наращиванием дерева T^*_{k-2}. Тем самым справедлива

Теорема 6. *Существует единственная $(xi, 4, 2k)$-максимальная 2-гусеница, и она изоморфна дереву $\mathrm{ext}(T^*_k)$. Каждая $(xi, 4, 2k+1)$-максимальная 2-гусеница является 4-наращиванием дерева T^*_{k-2}.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Andriantiana E.** Energy, Hosoya index and Merrifield–Simmons index of trees with prescribed degree sequence // Discrete Appl. Math. 2013. Vol. 161, No. 6. P. 724–741.
2. **Griggs J., Grinstead C., Guichard D.** The number of maximal independent sets in a connected graph // Discrete Math. 1988. Vol. 68, No. 2–3. P. 211–220.
3. **Heuberger C., Wagner S.** Maximizing the number of independent subsets over trees with bounded degree // J. Graph Theory. 2008. Vol. 58, No. 1. P. 49–68.
4. **Hujter M., Tuza Z.** The number of maximal independent sets in triangle-free graphs // SIAM J. Discrete Math. 1993. Vol. 6, No. 2. P. 284–288.
5. **Jou M., Chang G.** Maximal independent sets in graphs with at most one cycle // Discrete Appl. Math. 1997. Vol. 79, No. 1–3. P. 67–73.
6. **Jou M., Chang G.** The number of maximum independent sets in graphs // J. Graph Theory. 2000. Vol. 4, No. 4. P. 685–695.
7. **Liu J.** Maximal independent sets in bipartite graphs // J. Graph Theory. 1993. Vol. 17, No. 4. P. 495–507.

8. **Moon J., Moser L.** On cliques in graphs // Isr. J. Math. 1965. Vol. 3. P. 23–28.
9. **Wilf H.** The number of maximal independent sets in a tree // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1986. Vol. 7, No. 1. P. 125–130.
10. **Zito J.** The structure and maximum number of maximum independent sets in trees // J. Graph Theory. 1991. Vol. 15, No. 2. P. 207–221.

Талецкий Дмитрий Сергеевич,
Малышев Дмитрий Сергеевич

Статья поступила
29 сентября 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2018. Volume 25, No. 2. P. 101–123

UDC 519.17 DOI: 10.17377/daio.2018.25.591

ON TREES OF BOUNDED DEGREE WITH MAXIMAL NUMBER OF GREATEST INDEPENDENT SETS

D. S. Taletskii[1,a] and *D. S. Malyshev*[2,1,b]

[1]Lobachevsky Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarina Ave., 603950 Nizhny Novgorod, Russia
[2]National Research University Higher School of Economics,
25/12 Bolshaya Pechyorskaya St., 603155 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: [a]dmitalmail@gmail.com, [b]dsmalyshev@rambler.ru

Abstract. Given n and d, we describe the structure of trees with the maximal possible number of greatest independent sets in the class of n-vertex trees of vertex degree at most d. We show that the extremal tree is unique for all even n but uniqueness may fail for odd n; moreover, for $d = 3$ and every odd $n \geqslant 7$, there are exactly $\lceil (n-3)/4 \rceil + 1$ extremal trees. In the paper, the problem of searching for extremal (n, d)-trees is also considered for the 2-caterpillars; i.e., the trees in which every vertex lies at distance at most 2 from some simple path. Given n and $d \in \{3, 4\}$, we completely reveal all extremal 2-caterpillars on n vertices each of which has degree at most d. Illustr. 9, bibliogr. 10.

Keywords: extremal combinatorics, tree, greatest independent set.

REFERENCES

1. **E. Andriantiana,** Energy, Hosoya index and Merrifield–Simmons index of trees with prescribed degree sequence, *Discrete Appl. Math.,* **161**, No. 6, 724–741, 2013.
2. **J. Griggs**, **C. Grinstead,** and **D. Guichard,** The number of maximal independent sets in a connected graph, *Discrete Math.,* **68**, No. 2–3, 211–220, 1988.
3. **C. Heuberger** and **S. Wagner,** Maximizing the number of independent subsets over trees with bounded degree, *J. Graph Theory,* **58**, No. 1, 49–68, 2007.
4. **M. Hujter** and **Z. Tuza,** The number of maximal independent sets in triangle-free graphs, *SIAM J. Discrete Math.,* **6**, No. 2, 284–288, 1993.
5. **M. Jou** and **G. Chang,** Maximal independent sets in graphs with at most one cycle, *Discrete Appl. Math.,* **79**, No. 1–3, 67–73, 1997.
6. **M. Jou** and **G. Chang,** The number of maximum independent sets in graphs, *J. Graph Theory,* **4**, No. 4, 685–695, 2000.

7. **J. Liu,** Maximal independent sets in bipartite graphs, *J. Graph Theory,* **17**, No. 4, 495–507, 1993.
8. **J. Moon** and **L. Moser,** On cliques in graphs, *Isr. J. Math.,* **3**, 23–28, 1965.
9. **H. Wilf,** The number of maximal independent sets in a tree, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods,* **7**, No. 1, 125–130, 1986.
10. **J. Zito,** The structure and maximum number of maximum independent sets in trees, *J. Graph Theory,* **15**, No. 2, 207–221, 1991.

Dmitry S. Taletskii,
Dmitry S. Malyshev

Received
29 September 2017