ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2018. Том 25, № 3. С. 23–35

УДК 519.854 DOI: 10.17377/daio.2018.25.585

МИНИМИЗАЦИЯ СИММЕТРИЧНОЙ КВАЗИВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ НА ДВУМЕРНОЙ РЕШЁТКЕ *)

С. И. Веселов[a], *Д. В. Грибанов*[b], *Н. Ю. Золотых*[c], *А. Ю. Чирков*[d]

Институт информационных технологий, математики и механики,
Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия

E-mail: [a]sergey.veselov@itmm.unn.ru, [b]dmitry.gribanov@itmm.unn.ru, [c]nikolai.zolotykh@itmm.unn.ru, [d]aleksandr.chirkov@itmm.unn.ru

Аннотация. Рассматривается задача минимизации симметричной квазивыпуклой функции, заданной оракулом на множестве целых точек квадрата. Сформулирован критерий оптимальности решения, получена логарифмическая нижняя оценка сложности задачи и разработан алгоритм, у которого число обращений к оракулу превышает нижнюю оценку не более чем в 3 раза. Библиогр. 14.

Ключевые слова: квазивыпуклая функция, оракул, целочисленная решётка.

Введение

Непустое множество $X \subseteq \mathbf{Z}^2$ называется *дискретно-выпуклым*, если $\operatorname{conv}(X) \cap \mathbf{Z}^2 = X$, где $\operatorname{conv} X$ обозначает выпуклую оболочку точек из X. Функция f называется *дискретно-квазивыпуклой* (DQ) над X, если для любых $y, x_1, \ldots, x_k \in X$ из условий $y \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}$, $y \neq x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ следует, что $f(y) \leqslant \max\{f(x_1), \ldots, f(x_k)\}$, и *строго дискретно-квазивыпуклой* (SDQ), если неравенство строгое.

Область определения функции f обозначим через X_f. Для каждой функции f, рассматриваемой в этой статье, X_f предполагается дискретно-выпуклым множеством. Будем исследовать только такие DQ-функции $f(x)$, для которых при любом r неравенству $|f(x)| \leqslant r$ удовлетворяет конечное число точек $x \in \mathbf{Z}^2$. Это гарантирует существование минимума функции в любом подмножестве множества $\mathbf{Z}^2$.

*) Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01336).

В [4] предлагается алгоритм минимизации SDQ-функции над множеством $Q_r = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2 \mid |x_1| \leqslant r,\ |x_2| \leqslant r\}$ с числом обращений к оракулу не более $2\log_2^2 r + 22\log_2 r$. Оракул, используемый в [4], для двух заданных точек x, y из Q_r проверяет, выполнено или нет неравенство $f(x) \leqslant f(y)$. Алгоритм на каждой итерации решает отдельную задачу минимизации SDQ-функции на отрезке.

Здесь рассматривается задача нахождения точки минимума симметричной (относительно 0) SDQ-функции на множестве $Q_r \setminus \{0\}$. К такой постановке могут быть сведены некоторые важные задачи. Например, вычисление НОД чисел $a, b \in \mathbf{Z}$ сводится к минимизации функции $|ax_1 + bx_2|$, нахождение минимального ненулевого вектора решётки — к минимизации $(a_1x_1 + a_2x_2)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2)^2$.

Предполагается, что функция задана оракулом, для любой точки $x \in Q_r$ возвращающим $f(x)$. Мы предлагаем алгоритм минимизации функции с числом обращений к оракулу не более $4\log_2 r$.

Кроме того, установлена близкая нижняя оценка сложности этой задачи. А именно, доказано, что любой алгоритм минимизации симметричной SDQ-функции на Q_r в худшем случае использует не менее $1{,}44\log_2 r - 2$ обращений к оракулу.

В [2] установлена нижняя оценка сложности минимизации SDQ-функции на $\mathbf{Z}^n$. В [6,11,12] рассматривается задача минимизации DQ-функции на $\mathbf{Z}^n$ в предположении, что оракул функции возвращает как значение самой функции в точке, так и значение её субградиента. В [7, 9] найдены полиномиальные при фиксированной размерности алгоритмы для задачи, в которой и функция, и ограничения заданы квазивыпуклыми полиномами. В статье [8] показано, что квазивыпуклую функцию можно приблизить квазивыпуклым полиномом.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 приведены необходимое и достаточное условия минимума симметричной SDQ-функции, заданной на двумерной целочисленной решётке. В разд. 2 доказана нижняя оценка числа обращений к оракулу при нахождении этого минимума. Разд. 3 является вспомогательным: в нём приведён алгоритм минимизации SDQ-функции, заданной на отрезке. В разд. 4 описан алгоритм минимизации симметричной SDQ-функции на двумерной целочисленной решётке и получена оценка его сложности.

1. Критерий минимума функции

Следующая теорема представляет собой критерий минимума симметричной SDQ-функции и является уточнением утверждения из [4] относительно произвольных SDQ-функций, заданных на $\mathbf{Z}^2$.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — симметричная относительно начала координат SDQ-функция, множество X_f симметрично относительно 0. Доопределим функцию f в точках $x \in \mathbf{Z}^2 \setminus X_f$ следующим образом:*

$$f(x) = \max_{x \in X_f} f(x) + 1.$$

Равенство $f(a) = \min\limits_{x \in X_f \setminus \{0\}} f(x)$ справедливо тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

1) $\operatorname{conv}(X_f)$ *— отрезок и координаты вектора a не имеют общих делителей, отличных от* 1;

2) *существует $b \in X_f$ такой, что a и b образуют базис решётки $\mathbf{Z}^2$ и выполняются неравенства*

$$f(a) \leqslant f(b) \leqslant \min\{f(a+b), f(a-b)\}. \tag{1}$$

Доказательство. Утверждение очевидно, если $\operatorname{conv} X_f$ — отрезок, поэтому предположим, что аффинная размерность $\operatorname{conv} X_f$ равна 2.

Достаточность. Предположим, что b, удовлетворяющий условиям теоремы, существует. Докажем, что для всякого $x = \alpha a + \beta b \in X_f \setminus \{0\}$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, справедливо неравенство $f(x) \geqslant f(a)$.

Так как $f(\alpha a + \beta b) = f\big((-\alpha)a + (-\beta)b\big)$, достаточно рассмотреть только случай $\alpha \geqslant 0$. Если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то a или b соответственно принадлежит внутренности $\operatorname{conv}\{0,\, x\}$, поэтому в обоих случаях $f(x) > f(b) \geqslant f(a)$.

Пусть теперь $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 1$. Легко убедиться в том, что

$$a + b = \frac{\beta - 1}{\alpha + \beta - 1} a + \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 1} b + \frac{1}{\alpha + \beta - 1} x,$$

т. е. $a+b \in \operatorname{conv}\{a, b, x\}$. Предположим, что $f(x) < f(a)$. Так как f строго квазивыпуклая, то $f(a+b) < \max\{f(a), f(b), f(x)\} = f(b)$; противоречие.

Осталось рассмотреть случай $\alpha \geqslant 1$, $\beta \leqslant -1$. Легко проверить, что $a - b \in \operatorname{conv}\{a, -b, x\}$. Предполагая, что $f(x) < f(a)$, получаем противоречие: $f(a-b) < \max\{f(a), f(-b), f(x)\} = f(-b) = f(b)$.

Необходимость. Пусть $f(a) = \min\limits_{x \in X_f \setminus \{0\}} f(x)$. Выберем треугольник T наименьшей площади S среди треугольников с вершинами 0, a, b, где $b \in X_f$. Ясно, что T не содержит целых точек, отличных от вершин, поэтому $S = 1/2$ (см., например, [1]). Таким образом, множество $X' = \{x \in X_f \mid |\det(a, x)| = 1\}$ непусто, и можно найти $f(b) = \min\limits_{x \in X'} f(x)$. Неравенства (1) справедливы, так как $|\det(a, a \pm b)| = 1$ и $f(b) < f(x)$ для всех $x \in \mathbf{Z}^2 \setminus X_f$. Теорема 1 доказана.

2. Нижняя оценка сложности минимизации

Сначала обсудим хорошо известный в математическом программировании метод нахождения минимума унимодальной функции (т. е. строго квазивыпуклой функции одной переменной). В [3, 14] он описан для непрерывных функций, однако его легко перенести на случай дискретных функций следующим образом.

Утверждение 1. *Пусть интервал* (v_k, w_k) *содержит* t_k, t_{k+1}, *где* $v_k, w_k, t_k, t_{k+1} \in \mathbf{Z}$, $t_k < t_{k+1}$, $t_{k+1} - t_k \geqslant 2$. *Если* t^* — *точка минимума* SDQ-*функции* $g(t)$ *на* (v_k, w_k), *то*

$$t^* \in (v_{k+1}, w_{k+1}) = \begin{cases} (v_k, t_{k+1}), & \text{если } g(t_k) < g(t_{k+1}), \\ (t_k, w_k), & \text{если } g(t_k) > g(t_{k+1}), \\ (t_k, t_{k+1}), & \text{если } g(t_k) = g(t_{k+1}). \end{cases} \qquad (2)$$

Предположим, что по формуле (2) построена цепочка вложенных интервалов $(v_1, w_1) \supset (v_2, w_2) \supset \cdots \supset (v_n, w_n)$, в которой (v_n, w_n) содержит только одну целую точку — она и будет точкой минимума. Стратегия выбора точек $t_1, \ldots, t_{n-1}$ сейчас не имеет значения. Обозначим $d_i = w_i - v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, что длина цепочки максимальна, если $d_{k+1} = \max\{t_{k+1} - v_k,\ w_k - t_k\}$ при любом k.

Покажем, что

$$d_k \leqslant d_{k+1} + d_{k+2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2). \qquad (3)$$

Рассмотрим лишь случай $t_{k+1} - v_k \geqslant w_k - t_k$, поскольку во втором случае выкладки аналогичны. Так как t_k, $t_{k+2} \in (v_k, t_{k+1})$, то $d_{k+2} \geqslant t_k - v_k$, следовательно, $d_{k+1} + d_{k+2} \geqslant (w_k - t_k) + (t_k - v_k) = d_k$.

Символом ψ_n обозначим $(n+1)$-е число Фибоначчи, т. е. $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 2$, $\psi_n = \psi_{n-1} + \psi_{n-2}$ $(n \geqslant 3)$.

Из (3) следует, что $d_1 \leqslant \psi_{n-3} d_n + \psi_{n-2} d_{n-1}$. Учитывая соотношения $d_n = 2$ и $d_{n-1} \geqslant 3$, получаем $d_1 \leqslant \psi_{n+1}$. Отсюда и из формулы Бине

$$\psi_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

получаем

Утверждение 2. *Для любой стратегии выбора точек* $t_1, t_2, \ldots$ *найдётся функция* SDQ-*функция* f, *заданная на отрезке длины* d, *такая, что поиск её минимума потребует не менее* $1{,}44 \log_2 d - 2$ *обращений к оракулу.*

Заметим, что соображения, приводящие к этому утверждению, можно найти в [5, 10]. Здесь они приводятся для полноты изложения.

Теорема 2. *Произвольный алгоритм минимизации симметричной* SDQ-*функции на* Q_r *в худшем случае требует не менее* $1{,}44\log_2 r - 2$ *обращений к оракулу.*

Доказательство. Для каждого целого числа $\alpha \in [-r, r]$ рассмотрим функцию

$$f_\alpha(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 - 0{,}1, & \text{если } x_2 = 0,\\ (x_1 \operatorname{sign}(x_2) - \alpha)^2 + 4r^2\bigl(x_2^2 - 1\bigr), & \text{если } x_2 \neq 0,\end{cases}$$

заданную на Q_r. Функция симметрична. Покажем, что она строго квазивыпуклая. Пусть $y = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_k x^k$ — выпуклая комбинация точек $x^1, x^2, \dots, x^k$, все точки различны и имеют целые координаты. Рассмотрим возможные случаи.

1. Если $1 \leqslant |y_2| < |x_2^j|$ для некоторого j, то

$$f_\alpha\bigl(x_1^j, x_2^j\bigr) \geqslant 4r^2\bigl(y_2^2 + 2y_2\bigr) > 4r^2 + 4r^2\bigl(y_2^2 - 1\bigr) \geqslant f_\alpha(y_1, y_2).$$

2. Если $0 = |y_2|$ и $|x_2^j| \geqslant 2$ для некоторого j, то

$$f_\alpha\bigl(x_1^j, x_2^j\bigr) \geqslant 4r^2 > f_\alpha(y_1, 0).$$

3. Если $0 = |y_2|$ и $|x_2^j| = 1$ для всякого j, то y можно представить в виде полусуммы некоторых точек $(z_1, 1)$ и $(z_2, -1)$. Пусть $v_1 = z_1 - \alpha$, $v_2 = z_2 + \alpha$, тогда

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_\alpha\bigl(x_1^j, x_2^j\bigr) \geqslant \frac{f_\alpha(z_1, 1) + f_\alpha(z_2, -1)}{2} = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2}$$
$$\geqslant \frac{(v_1 + v_2)^2}{4} = \frac{(z_1 + z_2)^2}{4} = y_1^2 > f_\alpha(y_1, 0).$$

4. Если $|y_2| = \bigl|x_2^j\bigr|$ для любого j, то $y_2 = x_2^j$ для любого j и неравенство $f_\alpha(y_1, y_2) < \max\limits_j f_\alpha\bigl(x_1^j, x_2^j\bigr)$ справедливо в силу строгой выпуклости функции $g(t) = (t - \alpha)^2$.

Теперь для функции $g(x_1) = f_\alpha(x_1, 1)$ применим утверждение 2. Теорема 2 доказана.

3. Минимизация SDQ-функции на отрезке

В этом разделе приведён алгоритм минимизации SDQ-функции на отрезке, основанный на утверждении 1. Алгоритм вычисляет последовательность целых чисел $d_1, d_2, \ldots, d_{s-1}$ и последовательность вложенных интервалов $(v_1, w_1) \supset (v_2, w_2) \supset \cdots \supset (v_s, w_s)$. Интервал $(v_{j+1},\, w_{j+1})$ для всякого $j \in \{1, \ldots, s-1\}$ содержится в множестве

$$M = \{(v_j + d_j, w_j),\, (v_j, w_j - d_j),\, (v_j + d_j, w_j - d_j)\}.$$

Если $w_s - v_s$ не превышает некоторой наперёд заданной константы, то t^* находится перебором целых точек на s-м интервале. Первые два элемента множества M назовём *интервалами первого типа,* последний элемент — *интервалом второго типа.*

Для удобства изложения, наравне с SDQ-функцией $g(t)$, заданной на интервале $[1, v]$, будем рассматривать SDQ-функцию

$$g'(t) = \begin{cases} g(t) & \text{при } t \in [1, v], \\ \max\limits_{x \in [1,v]} g(x) + t & \text{при } t > v. \end{cases}$$

Очевидно, что минимальные значения функций $g(t)$, $g'(t)$ совпадают и достигаются в одной точке.

В описании алгоритма комментарии заключены в квадратные скобки.

Алгоритм 1 (минимизации SDQ-функции $h(t)$ на интервале $[\alpha, \beta]$)

1. Если $h(0) = h(1)$, то $t' = 0$, стоп.
2. Если $h(0) > h(1)$, то полагаем $g(t) := h(t)$, $v := \beta$. В противном случае $g(t) := h(-t)$, $v := -\alpha$.
3. Если $g(2) > g(4)$, то шаг 7.
4. Если $g(1) \leqslant g(2)$, то $t' = 1$, стоп.
5. Если $g(2) \leqslant g(3)$, то $t' = 2$, стоп.
6. Если $g(3) \leqslant g(4)$, то $t' = 3$, стоп.
7. Найдём $l = \max\{i \mid g'(2\psi_i) > g'(2\psi_{i+1})\}$.
   [Требуется l обращений к оракулу в точках $2\psi_3, 2\psi_4, \ldots, 2\psi_{l+2}$, так как в точках $2\psi_1, 2\psi_2$ значение функции уже известно.]
8. [Строим последовательность (v_j, w_j), $1 \leqslant j \leqslant s$. Символом c_j обозначаем целое число такое, что $w_j - v_j = \psi_{c_j}$. Для всякого j имеем $d_j = 2\psi_{c_j - 2}$.]
   8.1. Положим $(v_1, w_1) = (2\psi_l, 2\psi_{l+2})$, $c_1 = l + 1$.
   8.2. Предположим, что уже найдены $c_j, (v_j, w_j)$ при $j \leqslant m - 1$. Если (v_m, w_m) — интервал первого типа, то $c_m := c_{m-1} - 1$,

в противном случае $c_m := c_{m-1} - 3$. Номер s удовлетворяет неравенству $c_s \leqslant 2$.

8.3. Если $c_s = 2$, то t' содержится среди чисел $v_s + 1, v_s + 2, v_s + 3$. В противном случае $t' = v_s + 1$.

Замечание 1. 1. Если (v_{j-1}, w_{j-1}) — интервал первого типа, то для вычисления (v_j, w_j) при $2 \leqslant j \leqslant s - 1$ требуется лишь одно обращение к оракулу, так как одно из чисел $g'(v_{j-1} + d_{j-1})$ или $g'(w_{j-1} - d_{j-1})$ уже найдено при вычислении v_{j-1}, w_{j-1}. Например, если $j = 2$, то число $g'(2\psi_{l+2} - d_1) = g'(2\psi_l)$ использовалось при нахождении интервала (v_1, w_1).

2. Если (v_{j-1}, w_{j-1}), $2 \leqslant j \leqslant s - 1$, — интервал второго типа, то для вычисления (v_j, w_j) требуется два обращения к оракулу.

3. При $c_s = 2$ последний интервал содержит ровно три точки $v_s + 1$, $v_s + 2$, $v_s + 3$. Если этот интервал имеет тип 1, то требуется два обращения к оракулу, поскольку $g'(v_s + 2)$ вычислено ранее. Если тип равен 2, то требуется три обращения к оракулу.

4. При $c_s = 1$ требуется одно обращение к оракулу в точке $t' = v_{s+1}$.

Замечание 2. Пусть в последовательности (v_j, w_j), $1 \leqslant j \leqslant s$, содержится ровно h интервалов второго типа, тогда

$$l + 1 = (s - h) + 3h + c_s = s + c_s + 2h.$$

Число обращений к оракулу равно

$$(s - h) + 2h + 1 = s + h + 1 = l + 2 - h - c_s \leqslant l + 1.$$

Замечание 3. Если $t' > 2\psi_l$ $(l \geqslant 2)$, то для нахождения t' требуется одно вычисление $g(t)$ на шаге 1, два на шаге 3, l на шаге 7 и не более чем $l + 1$ на шаге 8. Общее число обращений к оракулу не превышает $2l + 4$. При $t' = 2$ и $t' = 3$ число обращений к оракулу не превышает четырёх.

4. Минимизация симметричной SDQ-функции на Q_r

Теперь опишем алгоритм минимизации SDQ-функции. Он строит последовательности векторов $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1} \in Q_r$ и чисел $t_2, t_3, \ldots, t_k \in \mathbf{Z}$ следующим образом.

Алгоритм 2 (минимизации SDQ-функции $f(t)$ на множестве Q_r)

1. Выберем $a_1, a_2 \in Q_r$ такие, что матрица $(a_1,\, a_2)$ унимодулярна и $f(a_1) \geqslant f(a_2)$. Не уменьшая общности, в дальнейшем считаем, что $a_1 = (0, 1)$, $a_2 = (1, 0)$.

2. Допустим, что уже получены векторы a_i ($i \leqslant k$). Найдём t' — точку минимума функции $h(t) = f(ta_k+a_{k-1})$ на отрезке $[u, v]$, где u и v — соответственно наименьшее и наибольшее целые числа, удовлетворяющие условию $ta_k + a_{k-1} \in Q_r$. Положим $a' := t'a_k + a_{k-1}$.
3. Если $f(a') \geqslant f(a_k)$, то a_k — точка минимума функции $f(x)$, стоп.
4. Если $|t'| = 1$ и $f(a') < f(a_k)$, то a' — точка минимума, стоп.
5. Положим $k := k + 1$, $t_k := t'$, $a_k := a'$ и перейдём к шагу 2.

Замечание 4. Для заданного вектора a_1 с несократимыми координатами можно построить унимодулярную матрицу (a_1, a_2) с помощью алгоритма Евклида [1]. В [13] можно найти решение вопроса для квадратных матриц любой размерности.

Замечание 5. Покажем, что задача решена, если выполняются условия шага 3 или шага 4. Поскольку $f(a') \leqslant f((t' \pm 1)a_k + a_{k-1})$, в случае $f(a') \geqslant f(a_k)$ выполняется критерий оптимальности из теоремы 1, при $a = a_k$, $b = a'$. Случай $|t'| = 1$ рассмотрен в п. 2 леммы 1, приведённой далее.

Для доказательства конечности алгоритма 2 исследуем последовательность $t_3, \ldots, t_k$.

Лемма 1. (1) *Если* $3 \leqslant s \leqslant k$, *то*

$$f(a_s) \leqslant \min\{f(a_s + a_{s-1}), f(a_s - a_{s-1})\}.$$

(2) *Если* $3 \leqslant s \leqslant k - 1$, *то* $|t_s| \geqslant 2$.

(3) *Если* $3 \leqslant s \leqslant k - 2$ *и* $|t_s| = 2$, *то* $t_{s+1}t_s > 0$.

Доказательство. (1)

$$\begin{aligned} f(a_s) = \min_{t\in\mathbb{Z}} f(ta_{s-1} + a_{s-2}) &= f(t_{s-1}a_{s-1} + a_{s-2}) \\ &\leqslant \min\{f(a_s + (t_{s-1} + 1)a_{s-1}), f(a_s + (t_{s-1} - 1)a_{s-1})\} \\ &\leqslant \min\{f(a_s + a_{s-1}), f(a_s - a_{s-1})\}. \end{aligned}$$

(2) Предположим, что $|t_s| = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} f(a_{s+1}) = f(t_sa_s + a_{s-1}) &= f((t_st_{s-1} + 1)a_{s-1} + t_sa_{s-2}) \\ &= f((t_{s-1} + t_s)a_{s-1} + a_{s-2}) \geqslant f(a_s) > f(a_{s+1}); \end{aligned}$$

противоречие.

(3) Пусть $|t_s| = 2$, $t_st_{s+1} < 0$, тогда

$$a_{s+2} = (t_st_{s+1} + 1)a_s + t_{s+1}a_{s-1} = (-2|t_{s+1}| + 1)a_s + t_{s+1}a_{s-1}.$$

Так как $f(a_{s+2}) < f(a_s)$, то

$$f(-a_s - \operatorname{sign}(t_{s+1})a_{s-1}) = f\left(\frac{a_{s+2} + (|t_{s+1}| - 1)a_s}{|t_{s+1}|}\right) < f(a_s),$$

а это противоречит п. (1). Лемма 1 доказана.

Теперь исследуем последовательность p_i, где $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_i = t_{i-1}p_{i-1} + p_{i-2}$, $i \geqslant 3$, состоящую из первых координат векторов a_i, $i \geqslant 1$.

Лемма 2. (1) $|p_{i+1}| > |p_i|$;

(2) $\operatorname{sign}(p_{i+1}) = \operatorname{sign}(t_i p_i)$;

(3) $|p_{i+1}| = |t_i||p_i| + \delta_i |p_{i-1}|$, *где* $\delta_i = \operatorname{sign}(t_i t_{i-1})$;

(4) *существует последовательность* $p'_0 = 0$, $p'_1 = 1$, $p'_{i+1} = t'_i p'_i + p'_{i-1}$, $i \geqslant 1$, *такая, что* $t'_i \geqslant |t_i| - 1 \geqslant 2$, $|p_i| \geqslant p'_i$ *для всякого* $i \geqslant 1$.

Доказательство. П. (1) следует из неравенств $|p_2| > |p_1||t_i| \geqslant 2$, $i \geqslant 3$.

П. (2) следует из п. (1).

(3) Воспользуемся формулой $|x + y| = |x| + \operatorname{sign}(xy)|y|$, справедливой при $|x| \geqslant |y|$. Так как

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}(t_i p_i p_{i-1}) &= \operatorname{sign}(t_i p_{i-1}) \operatorname{sign}(p_i) \\ &= \operatorname{sign}(t_i p_{i-1}) \operatorname{sign}(t_{i-1} p_{i-1}) = \operatorname{sign}(t_i t_{i-1}),\end{aligned}$$

то

$$|p_{i+1}| = |t_i p_i| + \operatorname{sign}(t_i p_i p_{i-1})|p_{i-1}| = |t_i||p_i| + \operatorname{sign}(t_i t_{i-1})|p_{i-1}|.$$

(4) Построим последовательность p' следующим образом.

(а) Положим $p'_i := |p_i|$, $t'_i := |t_i|$, $\delta'_i := \delta_i$ для всех i.

(б) Если $\delta'_i = 1$ для всех i, то p' построена.

(в) Пусть j — максимальный номер такой, что $\delta'_j = -1$. Заметим, что $t'_{j-1} \geqslant 3$. Положим $p''_i := p'_i$ для всех $i \leqslant j - 2$, $p''_{j-1} := p'_{j-1} - p'_{j-2}$, $p''_i := t'_{i-1}p''_i + p''_{i-2}$ для всех $i \geqslant j$. Поскольку $p''_j < p'_j$, $p''_{j+1} < p'_{j+1}$, имеем $p''_i \leqslant p'_i$ для всех i. Положим $p'_i := p''_i$ для всех i, $\delta'_j := 1$, $t'_{j-1} := t'_{j-1} - 1$ и перейдём к п. (б). Лемма 2 доказана.

Теорема 3. *Число* $T(r)$ *обращений к оракулу в алгоритме* 2 *не превосходит* $4\log_2 r$.

Доказательство. Пусть m — число двоек и троек в последовательности $t_2, \ldots, t_k$. Пусть элементы $t_{i_1}, \ldots, t_{i_s}$ этой же последовательности получены на шаге 8 алгоритма 1, причём $t_{i_j} > 2\psi_{l_j}$. Для общего числа обращений к оракулу получаем $T(r) \leqslant 4m + 2\sum\limits_{j=1}^{s} l_j + 4s$. Учитывая неравенство $\psi_n \geqslant 2^{n/2}$ $(n \geqslant 2)$, из леммы 2 выводим

$$r > |p_k| > |p'_k| \geqslant \prod_{i=2}^{k} |t'_i| \geqslant 2^m \prod_{j=1}^{s} 2\psi_{l_i} \geqslant 2^{\frac{4m+4s+2\sum l_j}{4}},$$

следовательно, $T(r) < 4\log_2 r$. Теорема 3 доказана.

Авторы благодарят анонимного рецензента за полезные замечания, которые помогли улучшить изложение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Виноградов И. М.** Основы теории чисел. М.: Лань, 2009.
2. **Золотых Н. Ю., Чирков А. Ю.** Нижняя оценка сложности минимизации строго квазивыпуклой функции на целочисленной решётке // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2012. № 5. С. 93–96.
3. **Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Фёдоров В. В.** Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.
4. **Чирков А. Ю.** Минимизация квазивыпуклой функции на двумерной целочисленной решётке // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. Сер. Мат. моделирование и оптим. управление. 2003. № 1. С. 227–238.
5. **Avriel M., Wilde D. J.** Optimality proof for the symmetric Fibonacci search technique // Fibonacci Q. 1966. Vol. 4, No. 3. P. 265–269.
6. **Basu A., Oertel T.** Centerpoints: A link between optimization and convex geometry // SIAM J. Optim. 2017. Vol. 27, No. 2. P. 866–889.
7. **Heinz S.** Complexity of integer quasiconvex polynomial optimization // J. Complexity. 2005. Vol. 21, No. 4 P. 543–556.
8. **Heinz S.** Quasiconvex functions can be approximated by quasiconvex polynomials // ESAIM, Control Optim. Calc. Var. 2008. Vol. 14, No. 4. P. 795–801.
9. **Hildebrand R., Koppe M.** A new Lenstra-type algorithm for quasiconvex polynomial integer minimization with complexity $2^{n\log n}$// Discrete Optim. 2013. Vol. 10, No. 1. P. 69–84.
10. **Kiefer J.** Sequential minimax search for a maximum // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 4, No. 3. P. 502–506.
11. **Oertel T.** Integer convex minimization in low dimensions: Thes. ... doct. phylosophy. Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, 2014.
12. **Oertel T., Wagner C., Weismantel R.** Integer convex minimization by mixed integer linear optimization // Oper. Res. Lett. 2014. Vol. 42, No. 6. P. 424–428.

13. **Schrijver A.** Theory of linear and integer programming. Chichester: John Wiley & Sons, 1998.
14. **Sun W., Yuan Y.** Optimization theory and methods: Nonlinear programming. Vol. 1. New York: Springer, 2006. (Springer Optim. Its Appl.; Vol. 1).

Веселов Сергей Иванович,
Грибанов Дмитрий Владимирович,
Золотых Николай Юрьевич,
Чирков Александр Юрьевич

Статья поступила
6 июля 2017 г.

Исправленный вариант —
15 декабря 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2018. Volume 25, No. 3. P. 23–35

UDC 519.854 DOI: 10.17377/daio.2018.25.585

MINIMIZING A SYMMETRIC QUASICONVEX FUNCTION ON A TWO-DIMENSIONAL LATTICE

S. I. Veselov[a], *D. V. Gribanov*[b],
N. Yu. Zolotykh[c], and *A. Yu. Chirkov*[d]

Institute of Information Technology, Mathematics, and Mechanics,
Lobachevsky Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., 603950 Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: [a]sergey.veselov@itmm.unn.ru, [b]dmitry.gribanov@itmm.unn.ru,
[c]nikolai.zolotykh@itmm.unn.ru, [d]aleksandr.chirkov@itmm.unn.ru

Abstract. We consider the minimization problem for a symmetric quasiconvex function defined by an oracle on the set of integer points of a square. We formulate an optimality criterion for the solution, obtain a logarithmic lower bound for the complexity of the problem, and propose an algorithm for which the number of inquiries to the oracle is at most thrice the lower bound. Bibliogr. 14.

Keywords: quasiconvex function, oracle, integer lattice.

REFERENCES

1. **I. M. Vinogradov,** *Osnovy teorii chisel,* Lan', Moscow, 2009. Translated under the title *Elements of Number Theory,* Dover, Mineola, NY, 2016.
2. **N. Yu. Zolotykh** and **A. Yu. Chirkov,** Lower bound for complexity of minimization of quasi-convex function on integer lattice, *Vestn. Nizhegorod. Univ. N. I. Lobachevskogo,* No. 5 (2), 93–96, 2012.
3. **A. G. Sukharev, A. V. Timokhov,** and **V. V. Fyodorov,** *Kurs metodov optimizatsii* (A Course in Optimization Methods), Nauka, Moscow, 1986.
4. **A. Yu. Chirkov,** Minimization of quasi-convex function on two-dimensional integer lattice, *Vestn. Nizhegorod. Univ. N. I. Lobachevskogo, Mat. Model. Optim. Upr.,* No. 1, 227–238, 2003.
5. **M. Avriel** and **D. J. Wilde,** Optimality proof for the symmetric Fibonacci search technique, *Fibonacci Q.*, **4**, No. 3, 265–269, 1966.
6. **A. Basu** and **T. Oertel,** Centerpoints: A link between optimization and convex geometry, *SIAM J. Optim.,* **27**, No. 2, 866–889, 2017.
7. **S. Heinz,** Complexity of integer quasiconvex polynomial optimization, *J. Complexity,* **21**, No. 4, 543–556, 2005.

8. S. Heinz, Quasiconvex functions can be approximated by quasiconvex polynomials, *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.,* **14**, No. 4, 795–801, 2008.

9. R. Hildebrand and **M. Köppe,** A new Lenstra-type algorithm for quasiconvex polynomial integer minimization with complexity $2^{O(n \log n)}$, *Discrete Optim.,* **10**, No. 1, 69–84, 2013.

10. J. Kiefer, Sequential minimax search for a maximum, *Proc. AMS,* **4**, No. 3, 502–506, 1953.

11. T. Oertel, Integer convex minimization in low dimensions, *PhD Dissertation,* ETH Zurich, 2014.

12. T. Oertel, C. Wagner, and **R. Weismantel,** Integer convex minimization by mixed integer linear optimization, *Oper. Res. Lett.,* **42**, No. 6, 424–428, 2014.

13. A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming,* John Wiley & Sons, Chichester, GB, 1998.

14. W. Sun and **Y. Yuan,** *Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming,* Springer, New York, 2006 (Springer Optim. Its Appl., Vol. 1).

Sergey I. Veselov,
Dmitry V. Gribanov,
Nikolay Yu. Zolotykh,
Aleksandr Yu. Chirko

Received
6 July 2017
Revised
15 December 2017