ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2018. Том 25, № 3. С. 36–94

УДК 519.714 DOI: 10.17377/daio.2018.25.589

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В КЛАССЕ π-СХЕМ [*)]

К. Л. Рычков

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: rychkov@math.nsc.ru

Аннотация. Для сложности в классе π-схем линейной булевой функции, существенно зависящей от 6 переменных, на основе метода В. М. Храпченко получена точная нижняя оценка 40. Дано упрощённое доказательство ряда нижних оценок сложности линейных булевых функций, полученных ранее на базе того же метода. Библиогр. 18.

Ключевые слова: булева функция, π-схема, нижняя оценка сложности.

Введение

В статьях [8, 9] В. М. Храпченко сформулировал некоторый общий метод получения нижних оценок сложности параллельно-последовательных контактных схем (π-схем), реализующих данную конкретную булеву функцию f. В дальнейшем была получена целая серия результатов [1–6, 10, 13–16, 18], связанных с модификацией и различными вариантами применения этого метода. Под сложностью π-схемы понимается число контактов в ней. Основой метода служит некоторое специальное отображение (отображение Храпченко) множества (0-1)-рёбер функции f в множество контактов реализующей её π-схемы. Мощность порождённого этим отображением разбиения множества (0-1)-рёбер функции даёт нижнюю оценку сложности π-схемы. В случае линейной булевой функции $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n \pmod 2$ множество (0-1)-рёбер функции представляет собой множество всех ориентированных (по направлению от чётного конца к нечётному) рёбер единичного n-мерного куба, а разбиение относится к классу правильных разбиений этого множества.

[*)]Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1, (проект № 0314–2016–0001).

Именно нижним оценкам мощности правильного разбиения множества (0-1)-рёбер единичного n-мерного куба посвящена настоящая статья.

Сложностью булевой функции в классе π-схем называется минимальное число контактов, достаточное для построения π-схемы, реализующей эту функцию. Сложность линейной булевой функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим через λ_n.

Единичным n-мерным кубом B^n называется множество всех двоичных наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. При этом сами двоичные наборы называются *вершинами* куба. Вершину $\alpha \in \mathrm{B}^n$ будем называть *чётной*, если $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0 \pmod 2$. В противном случае назовём её *нечётной*. Через N^0, N^1 обозначим соответственно множество всех чётных и нечётных вершин куба B^n.

Элементы множества $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ назовём (0-1)-*парами* куба B^n, а само множество — *множеством* (0-1)-*пар* куба B^n. Для произвольной (0-1)-пары $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ вершины α, β будем называть *концами пары*. При этом вершину α назовём *чётным концом*, а вершину β — *нечётным*.

Множество вида $A^0 \times A^1$, где $A^0 \subseteq \mathrm{N}^0$, $A^1 \subseteq \mathrm{N}^1$, будем называть *прямоугольным подмножеством* множества $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$, или *прямоугольником*. Множества A^0, A^1 назовём *сторонами прямоугольника*.

Для произвольного подмножества $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ через $\mathrm{N}^0(M)$ и $\mathrm{N}^1(M)$ обозначим множество всех чётных и нечётных концов (0-1)-пар из M соответственно. Прямоугольник $[M] = \mathrm{N}^0(M) \times \mathrm{N}^1(M)$ назовём *прямоугольником, натянутым на M*.

Через $\mathrm{dist}(\alpha, \beta)$ обозначим *расстояние Хэмминга* между вершинами $\alpha, \beta \in \mathrm{B}^n$, т. е. число разрядов, в которых наборы $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ отличаются друг от друга.

Пара вершин $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ называется (0-1)-*ребром* куба B^n, если $\mathrm{dist}(\alpha, \beta) = 1$. Если при этом для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено $\alpha_i \neq \beta_i$, то пара (α, β) называется (0-1)-*ребром направления* i. Если помимо этого $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 0$, то пару (α, β) будем называть *отрицательным*, если $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, то *положительным* (0-1)-*ребром направления* i.

Множество всех (0-1)-рёбер куба B^n обозначим через R. Через R_i, R_i^{-1} и R_i^1 обозначим множество всех (0-1)-рёбер направления i, множество всех отрицательных и всех положительных (0-1)-рёбер направления i куба B^n соответственно, $i = 1, \ldots, n$.

Подмножество Q множества R назовём *однородным*, если существуют $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$ такие, что $Q \subseteq \mathrm{R}_i^\delta$ (другими словами, если Q состоит из (0-1)-рёбер одного направления и одного знака).

Разбиение $P = \{Q_1, \ldots, Q_L\}$ произвольного подмножества $R' \subseteq \mathrm{R}$

будем называть *однородным*, если все блоки $Q_1, \ldots, Q_L$ этого разбиения являются однородными подмножествами R.

Разбиение $P = \{Q_1, \ldots, Q_L\}$ множества R назовём *правильным*, если оно однородно и прямоугольники $[Q_1], \ldots, [Q_L]$ попарно не пересекаются, и *неправильным*, если оно однородно и не является правильным.

Правильное разбиение множества R назовём *минимальным*, если оно имеет наименьшую мощность среди всех правильных разбиений множества R. Мощность минимального правильного разбиения множества R обозначим через μ_n.

Неравенство $\lambda_n \geqslant \mu_n$, как отмечено выше, является результатом применения метода В. М. Храпченко к линейной булевой функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Строгое доказательство этого неравенства можно найти, например, в [3–5].

Цель настоящей статьи заключается в том, чтобы доказать следующие три теоремы.

Теорема 1. *Для величины* μ_n *выполнены неравенства*

$$\mu_n \geqslant \begin{cases} n^2 & \text{при любом } n \geqslant 1, \\ n^2+1 & \text{при } n \neq 2^k. \end{cases}$$

Теорема 2. *Для величины* μ_n *выполнены неравенства*

$$\mu_n \geqslant \begin{cases} n^2+2 & \text{при чётном } n \neq 2^k, \\ n^2+3 & \text{при нечётном } n \geqslant 5. \end{cases}$$

Теорема 3. *При* $n = 6$ *для величины* μ_n *выполнено неравенство*

$$\mu_n \geqslant n^2 + 4 = 40.$$

Автором теоремы 1 является В. М. Храпченко [8], она служит отправной точкой для всех дальнейших исследований в этом направлении. Теорема 2 впервые была доказана в [4]. В настоящей статье те соображения, которые привели к её доказательству, несколько обобщены, на основе этого обобщения доказана теорема 3 и дано более прозрачное доказательство теоремы 2.

Отметим, что нижняя оценка $\lambda_6 \geqslant 40$, которая является следствием неравенства $\lambda_n \geqslant \mu_n$ и теоремы 3, ранее была доказана другим способом. Впервые это было сделано Д. Ю. Черухиным в [10]. Результат основан на идее, позволяющей использовать комбинацию двух методов получения нижних оценок сложности π-схем, а именно методов Б. А. Субботовской [7] и В. М. Храпченко. Эта идея дала возможность понизить размерность задачи и применить к её решению компьютерный перебор. В [5] изложено доказательство указанной оценки, основанное на той же идее, но проведённое, исходя из мощностных соображений.

С. В. Яблонский в [11] показал, что верхней оценкой для λ_n служит величина $\mathrm{t}(n) = n^2 + (2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} - n)(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor})$. Поэтому из неравенства $\lambda_n \geqslant \mu_n$ и теоремы 1 вытекают соотношения $\mathrm{t}(n) \geqslant \lambda_n \geqslant \mu_n \geqslant n^2$. Как следствие, при $n = 2^k$ имеют место равенства $\mathrm{t}(n) = \lambda_n = \mu_n = n^2$. Из теорем 1–3 следует, что при $n = 3, 5, 6, 7$ также справедливы равенства $\mathrm{t}(n) = \lambda_n = \mu_n$. Для полноты картины отметим [6,11], что величина $\mathrm{t}(n)$ удовлетворяет соотношениям $\frac{9}{8} n^2 > \mathrm{t}(n)$ и $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{\mathrm{t}(n)}{n^2} = \frac{9}{8}$.

Добавим, что работа [15], в которой утверждается $\lambda_n = \mathrm{t}(n)$, содержит достаточно грубую ошибку (найденную Д. Ю. Черухиным [10]).

1. Усиленный вариант теоремы 1

Заметим, что при $n = 1$ и при $n = 2$ существует единственное однородное разбиение P множества R всех (0-1)-рёбер куба B^n. В первом случае P состоит из одного блока мощности 1, во втором — из четырёх блоков мощности 1. Очевидно, что в обоих случаях разбиение P является правильным. Поэтому $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 4$, т. е. в этих случаях теорема 1 справедлива (в теоремах 2, 3 эти случаи не рассматриваются). Всюду далее полагаем $n \geqslant 3$.

Для произвольных $0 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$, $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \{0, 1\}$ множество $\mathrm{B}^n{}^{\sigma_1, \dots, \sigma_k}_{i_1, \dots, i_k} = \{\alpha \in \mathrm{B}^n \mid \alpha_{i_1} = \sigma_1, \dots, \alpha_{i_k} = \sigma_k\}$ называется *гранью* куба B^n. Число $\dim(F) = n - k$ называется *размерностью* грани $F = \mathrm{B}^n{}^{\sigma_1, \dots, \sigma_k}_{i_1, \dots, i_k}$. Множества $\mathrm{Dir}(F) = \{i_1, \dots, i_k\}$ и $\mathrm{Form}(F) = \{1, \dots, n\} \setminus \mathrm{Dir}(F)$ называются соответственно *направлением* и *множеством образующих* этой грани.

Заметим, что если (0-1)-пара (α, β) является (0-1)-ребром направления i, то множество $\{\alpha, \beta\}$ её концов представляет собой одномерную грань с множеством образующих $\mathrm{Form}(F) = \{i\}$.

Множество всех граней куба B^n обозначим через $\mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$. Через $\mathfrak{F}_k(\mathrm{B}^n)$ и $\mathfrak{F}_{\geqslant k}(\mathrm{B}^n)$ обозначим множество всех граней $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ размерностей $\dim(F) = k$ и $\dim(F) \geqslant k$ соответственно, $k = 0, 1, \dots, n$.

Будем говорить, что (0-1)-ребро (α, β) куба B^n *является* (0-1)*-ребром грани* $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$, если концы α, β этого ребра принадлежат F.

Множество всех (0-1)-рёбер грани $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ обозначим через $\mathrm{R}(F)$. Через $\mathrm{R}_i(F)$, $\mathrm{R}_i^{-1}(F)$ и $\mathrm{R}_i^1(F)$ обозначим соответственно множество всех (0-1)-рёбер направления i, множество всех отрицательных и всех положительных (0-1)-рёбер направления i грани $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$, $i = 1, \dots, n$.

Семейство подмножеств некоторого множества называем *дизъюнктным*, если входящие в это семейство подмножества непустые и попарно не пересекаются.

Для произвольного дизъюнктного семейства P однородных подмножеств множества R подсемейства

$$P_i^{-1} = \bigl\{Q \in P \mid Q \subseteq \mathrm{R}_i^{-1}\bigr\}, \quad P_i^1 = \bigl\{Q \in P \mid Q \subseteq \mathrm{R}_i^1\bigr\}, \quad P_i = P_i^{-1} \cup P_i^1$$

этого семейства назовём соответственно *отрицательной, положительной* и *большой компонентой с номером i семейства P*, $i = 1, \ldots, n$.

Сужением $P \,|\, F$ однородного разбиения P множества R *на грань* $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ назовём семейство всех непустых множеств $Q \cap \mathrm{R}(F)$, где $Q \in P$.

Всюду далее в качестве дизъюнктных семейств однородных подмножеств множества R помимо самих однородных разбиений множества R нас будут интересовать их компоненты, а также сужения этих разбиений на грани куба B^n. Следующие две леммы следуют непосредственно из определений.

Лемма 1. *Для любой грани $F \in \mathfrak{F}_{\geqslant 2}(\mathrm{B}^n)$ справедливы равенства*

$$|\mathrm{R}(F)| = \dim(F) \cdot 2^{\dim(F)-1},$$

$$\bigl|\mathrm{R}_i^\delta(F)\bigr| = \begin{cases} 2^{\dim(F)-2}, & \text{если } i \in \mathrm{Form}(F),\ \delta \in \{-1, 1\},\\ 0, & \text{если } i \in \mathrm{Dir}(F),\ \delta \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

Лемма 2. *Для любого однородного разбиения P множества* R *и любой грани $F \in \mathfrak{F}_{\geqslant 2}(\mathrm{B}^n)$ сужение $K = P \,|\, F$ является однородным разбиением множества* $\mathrm{R}(F)$. *При этом если $i \in \mathrm{Form}(F)$, $\delta \in \{-1, 1\}$, то компонента K_i^δ сужения K является разбиением множества $\mathrm{R}_i^\delta(F)$ и справедливы неравенства $1 \leqslant \bigl|K_i^\delta\bigr| \leqslant \bigl|P_i^\delta\bigr|$; если $i \in \mathrm{Dir}(F)$, $\delta \in \{-1, 1\}$, то справедливо равенство $K_i^\delta = \varnothing$.*

Для произвольного дизъюнктного семейства $P = \{Q_1, \ldots, Q_L\}$ однородных подмножеств множества R множество $\mathrm{G}(P) = \{\,[Q_1], \ldots, [Q_L]\}$ назовём *гирляндой* семейства P, а множество $\widehat{\mathrm{G}}(P) = [Q_1] \cup \cdots \cup [Q_L]$ — *телом гирлянды* $\mathrm{G}(P)$. Величины $\mathrm{length}(P) = |Q_1| + \cdots + |Q_L|$ и $\mathrm{s}(P) = |\,[Q_1]\,| + \cdots + |\,[Q_L]\,|$ назовём соответственно *длиной* и *площадью гирлянды* $\mathrm{G}(P)$.

Точкой самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$ будем называть любую такую (0-1)-пару $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$, что $(\alpha, \beta) \in [Q_i] \cap [Q_j]$ для некоторых $[Q_i], [Q_j] \in \mathrm{G}(P)$, $i \neq j$. Будем говорить, что *гирлянда* $\mathrm{G}(P)$ *не имеет* *самопересечений*, если множество $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$.

Определение правильности однородного разбиения P множества R теперь можно сформулировать следующим образом: однородное разбиения P множества R называется *правильным*, если гирлянда $\mathrm{G}(P)$ не имеет самопересечений. Отметим, что если гирлянда $\mathrm{G}(P)$ не имеет самопересечений, то справедливо равенство $\mathrm{s}(P) = |\widehat{\mathrm{G}}(P)|$.

Заметим также, что для любого дизъюнктного семейства P однородных подмножеств множества R справедливо равенство $\mathrm{s}(P) = \sum\limits_{Q \in P} |Q|^2$. Действительно, любое множество $Q \in P$ является однородным подмножеством множества R. Следовательно, (0-1)-рёбра из Q имеют одно направление и потому не имеют общих концов. Значит, выполнены равенства $|\mathrm{N}^0(Q)| = |\mathrm{N}^1(Q)| = |Q|$, и тем самым равенство $|[\![Q]\!]| = |Q|^2$.

Докажем неравенство В. М. Храпченко $\mu_n \geqslant n^2$ из теоремы 1. Достаточно показать, что для любого правильного разбиения P множества R справедливо неравенство $|P| \geqslant n^2$. Отправной точкой для этого служат следующие два очевидных утверждения.

Лемма 3. *Если для однородного разбиения P множества R выполнено неравенство $\mathrm{s}(P) > |\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1|$, то множество $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ содержит точку самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$.*

Лемма 4. *Для любого дизъюнктного семейства P однородных подмножеств множества R величины $\mathrm{length}(P)$, $|P|$ и $\mathrm{s}(P)$ связаны неравенством Коши — Буняковского:*

$$(\mathrm{length}(P))^2 = \Big(\sum_{Q \in P} |Q|\Big)^2 \leqslant |P| \sum_{Q \in P} |Q|^2 = |P| \cdot \mathrm{s}(P).$$

В силу леммы 3 необходимым условием правильности однородного разбиения P множества R является неравенство $\mathrm{s}(P) \leqslant |\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1|$. Для любого правильного разбиения P из этого неравенства, а также из выполненного по лемме 4 неравенства $(\mathrm{length}(P))^2 \leqslant |P| \cdot \mathrm{s}(P)$, верного в силу леммы 1 равенства $\mathrm{length}(P) = |\mathrm{R}| = n2^{n-1}$ и очевидного равенства $|\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1| = (2^{n-1})^2$ следует оценка

$$|P| \geqslant \frac{(\mathrm{length}(P))^2}{\mathrm{s}(P)} \geqslant \frac{|\mathrm{R}|^2}{|\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1|} = n^2,$$

что и требовалось доказать.

Величину $\operatorname{def}(P) = |\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1| - |\widehat{\mathrm{G}}(P)|$ назовём *дефицитом гирлянды* $\mathrm{G}(P)$. Для произвольного подмножества $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ величины

$$\mathrm{s}(P, M) = \sum_{Q \in P} |\,[\![Q]\!] \cap M|, \quad \operatorname{def}(P, M) = |M| - |\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap M|$$

назовём соответственно *площадью* и *дефицитом гирлянды* $\mathrm{G}(P)$ *относительно* M. Заметим, что $\mathrm{s}(P) = \mathrm{s}(P, \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)$ и $\operatorname{def}(P) = \operatorname{def}(P,\, \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)$.

Источником для усиления нижней оценки В. М. Храпченко служат следующие три взаимосвязанные идеи. Первая представляет собой то простое соображение, что аргумент P величин $|P|$ и $\mathrm{s}(P)$ имеет матричную природу. Вторая заключается в возможности для правильного разбиения P, исходя из матричной природы P, получить нижнюю оценку величины $\operatorname{def}(P)$. Третья состоит в том, что эту нижнюю оценку можно получить не только для величины $\operatorname{def}(P) = \operatorname{def}(P,\, \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)$, но и для целой серии величин $\operatorname{def}(P, M)$, связанных с некоторым классом подмножеств M множества $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ (классом сильно симметричных подмножеств $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$).

Для реализации этих идей понадобится следующий усиленный вариант леммы 3.

Лемма 5. *Если для однородного разбиения P множества* R *и подмножества $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ выполнено неравенство* $\mathrm{s}(P, M) + \operatorname{def}(P, M) > |M|$, *то M содержит точку самопересечения гирлянды* $\mathrm{G}(P)$.

В данном разделе реализована первая из трёх перечисленных идей: для доказательства усиленного варианта теоремы 1 (теорема 5) приведённое выше доказательство неравенства В. М. Храпченко модифицировано с учётом матричной природы аргумента P величин $|P|$ и $\mathrm{s}(P)$. Вторая и третья идеи реализованы в разд. 2 (теоремы 9, 6, 7) на основе так называемого эффекта сильно симметричных подмножеств множества $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ (теорема 8).

Для произвольного дизъюнктного семейства P однородных подмножеств множества R гирлянды $\mathrm{G}\big(P_1^{-1}\big), \ldots, \mathrm{G}\big(P_n^{-1}\big), \mathrm{G}\big(P_1^{1}\big), \ldots, \mathrm{G}\big(P_n^{1}\big)$ будем называть *компонентами*, а гирлянды $\mathrm{G}(P_1), \ldots, \mathrm{G}(P_n)$ — *большими компонентами гирлянды* $\mathrm{G}(P)$.

Лемма 6. *Для любого однородного разбиения P множества* R *компоненты гирлянды* $\mathrm{G}(P)$ *не имеют самопересечений.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную компоненту $\mathrm{G}\big(P_i^{\delta}\big)$ гирлянды $\mathrm{G}(P)$. По определению для любого $Q \in P_i^{\delta}$ справедливо включение $Q \subseteq \mathrm{R}_i^{\delta}$. Поэтому любые два множества $Q, U \in P_i^{\delta}$ содержат

(0-1)-рёбра одного направления i. В силу того, что (0-1)-рёбра одного направления не имеют общих концов, из неравенства $Q \neq U$ следует, что $[Q] \cap [U] = \varnothing$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Для любого однородного разбиения P множества* R *и любого подмножества $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$ справедливы равенства*

$$\mathrm{s}\big(P_i^\delta\big) = \big|\widehat{\mathrm{G}}\big(P_i^\delta\big)\big|, \quad \mathrm{s}\big(P_i^\delta, M\big) = \big|\widehat{\mathrm{G}}\big(P_i^\delta\big) \cap M\big|.$$

Доказательство. Утверждение следует из определений и леммы 6. Лемма 7 доказана.

Для однородного разбиения P множества R *матрицей сложности* назовём матрицу $\mathbb{L}(P) = \big(\ell_i^\delta\big)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$ размера $2 \times n$, где $\ell_i^\delta = \big|P_i^\delta\big|$.

Для однородного разбиения P множества R *матрицей площадей гирлянды* $\mathrm{G}(P)$ назовём матрицу $\mathbb{S}(P) = \big(s_i^\delta\big)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$ размера $2 \times n$, где $s_i^\delta = |\widehat{\mathrm{G}}\big(P_i^\delta\big)|$.

Заметим, что элементы матриц $\mathbb{L}(P)$ и $\mathbb{S}(P)$ являются целыми положительными числами. Величины $\|\mathbb{L}\|_{-1}$ и $\|\mathbb{L}\|_1$ для числовой матрицы $\mathbb{L} = \big(\ell_i^\delta\big)$ с ненулевыми элементами определим формулами

$$\|\mathbb{L}\|_{-1} = \sum_{i,\delta} \frac{1}{\ell_i^\delta}, \quad \|\mathbb{L}\|_1 = \sum_{i,\delta} \ell_i^\delta.$$

Лемма 8. *Для любого однородного разбиения P множества* R *справедливы равенства $|P| = \|\mathbb{L}(P)\|_1$ и $\mathrm{s}(P) = \|\mathbb{S}(P)\|_1$.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из определений и леммы 7. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Для любого однородного разбиения P множества* R *любая пара соответствующих элементов s_i^δ и ℓ_i^δ матриц $\mathbb{S}(P) = \big(s_i^\delta\big)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$ и $\mathbb{L}(P) = \big(\ell_i^\delta\big)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$ связана неравенством $s_i^\delta \geqslant 4^{n-2}\frac{1}{\ell_i^\delta}$. Если при этом ℓ_i^δ не является степенью двойки, то справедливо неравенство $s_i^\delta > 4^{n-2}\frac{1}{\ell_i^\delta}$.*

Доказательство. Любая компонента P_i^δ разбиения P является дизъюнктным семейством однородных подмножеств множества R. Поэтому по лемме 4 справедливо неравенство $\big(\mathrm{length}\big(P_i^\delta\big)\big)^2 \leqslant \big|P_i^\delta\big| \cdot \mathrm{s}\big(P_i^\delta\big)$. По лемме 2 эта компонента является разбиением множества $\mathrm{R}_i^\delta = \mathrm{R}_i^\delta(\mathrm{B}^n)$. Значит, по лемме 1 справедливо равенство $\mathrm{length}\big(P_i^\delta\big) = \big|\mathrm{R}_i^\delta\big| = 2^{n-2}$. Отсюда, учитывая равенство $\big|P_i^\delta\big| = \ell_i^\delta$ и выполненное по лемме 7 равенство

$\mathrm{s}(P_i^\delta) = \left|\widehat{\mathrm{G}}(P_i^\delta)\right| = s_i^\delta$, имеем $4^{n-2} \leqslant \ell_i^\delta s_i^\delta$. Заметим, что ℓ_i^δ, s_i^δ — целые положительные числа. Поэтому если ℓ_i^δ не является степенью двойки, то $4^{n-2} \neq \ell_i^\delta s_i^\delta$, а значит, $4^{n-2} < \ell_i^\delta s_i^\delta$. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Для любого однородного разбиения P множества R справедливо неравенство $\|\mathbb{S}(P)\|_1 \geqslant 4^{n-2}\|\mathbb{L}(P)\|_{-1}$. Если при этом не все элементы матрицы $\mathbb{L}(P)$ являются степенями двойки, то имеет место строгое неравенство $\|\mathbb{S}(P)\|_1 > 4^{n-2}\|\mathbb{L}(P)\|_{-1}$.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из определений и леммы 9. Лемма 10 доказана.

Через $\mathfrak{L}(k)$ обозначим множество всех матриц с целыми положительными элементами размера $2 \times k$. Пусть $\mathfrak{L} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{L}(k)$.

Через $\mathfrak{L}_{-1}^4$ обозначим класс всех таких матриц $\mathbb{L} \in \mathfrak{L}$, что $\mathbb{L}$ удовлетворяет одному из двух условий:

1) справедливо неравенство $\|\mathbb{L}\|_{-1} > 4$;
2) справедливо равенство $\|\mathbb{L}\|_{-1} = 4$ и не все элементы матрицы $\mathbb{L}$ являются степенями двойки.

Через $\mathfrak{L}(k, L)$ обозначим множество всех матриц $\mathbb{L} \in \mathfrak{L}(k)$ таких, что $\|\mathbb{L}\|_1 = L$.

Теорема 4. *Если матрица сложности однородного разбиения P множества R принадлежит классу $\mathfrak{L}_{-1}^4$, то разбиение P является неправильным.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$. Если $\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} > 4$, то из леммы 10 следует, что

$$\|\mathbb{S}(P)\|_1 \geqslant 4^{n-2}\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} > 4^{n-1} = |\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1|.$$

Если $\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} = 4$ и не все элементы матрицы $\mathbb{L}(P)$ являются степенями двойки, то из леммы 10 получаем

$$\|\mathbb{S}(P)\|_1 > 4^{n-2}\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} = 4^{n-1} = |\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1|.$$

В обоих случаях по лемме 8 имеем $s(P) = \|\mathbb{S}(P)\|_1 > |\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1|$. Значит, по лемме 3 множество $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ содержит точку самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$, т. е. разбиение P неправильное. Теорема 4 доказана.

Следующие две леммы являются очевидными следствиями теорем 27 и 28 из разд. 10.

Лемма 11. *При чётном $n \neq 2^k$ и при $n = 3$ для любого $L \leqslant n^2$ справедливо включение $\mathfrak{L}(n, L) \subseteq \mathfrak{L}_{-1}^4$.*

Лемма 12. *При нечётном $n \geqslant 5$ для любого $L \leqslant n^2 + 1$ справедливо включение $\mathfrak{L}(n, L) \subseteq \mathfrak{L}^4_{-1}$.*

Теорема 5. *Для величины μ_n имеют место неравенства*

$$\mu_n \geqslant \begin{cases} n^2 & \text{при любом } n \geqslant 1, \\ n^2 + 1 & \text{при чётном } n \neq 2^k \text{ и при } n = 3, \\ n^2 + 2 & \text{при нечётном } n \geqslant 5. \end{cases}$$

Доказательство. Из уже доказанного неравенства В. М. Храпченко $\mu_n \geqslant n^2$ следует, что все однородные разбиения P множества R мощности $|P| \leqslant n^2 - 1$ неправильные. Поэтому чтобы доказать теорему 5, достаточно доказать следующие два утверждения.

1. При чётном $n \neq 2^k$ и при $n = 3$ любое однородное разбиение P множества R мощности $|P| = n^2$ является неправильным.

2. При нечётном $n \geqslant 5$ любое однородное разбиение P множества R мощности $n^2 \leqslant |P| \leqslant n^2 + 1$ является неправильным.

В силу выполненного по лемме 8 равенства $\|\mathbb{L}(P)\|_1 = |P|$ в первом случае имеем $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}(n, n^2)$, во втором $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}(n, n^2) \cup \mathfrak{L}(n, n^2 + 1)$. В первом случае из леммы 11, а во втором из леммы 12 следует включение $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}^4_{-1}$. Справедливость утверждений 1, 2 вытекает из этого включения и теоремы 4. Теорема 5 доказана.

2. Эффект сильно симметричных подмножеств множества $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$

Будем говорить, что (0-1)-пара $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ *разделима по направлению* $i \in \{1, \ldots, n\}$, если $\alpha_i \neq \beta_i$. Если при этом выполнено неравенство $\alpha_i > \beta_i$, то будем говорить, что эта (0-1)-пара *отрицательно разделима по направлению* i, а если выполнено неравенство $\alpha_i < \beta_i$, то — *положительно разделима по направлению* i.

Множество всех (0-1)-пар, разделимых по направлению i, обозначим через $(\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)_i$. Через $(\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)^{-1}_i$ и $(\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)^1_i$ обозначим множество всех (0-1)-пар, отрицательно и положительно разделимых по направлению i соответственно, $i = 1, \ldots, n$. Для подмножества $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ и направления $i \in \{1, \ldots, n\}$ множества

$$M^{-1}_i = M \cap (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)^{-1}_i, \quad M^1_i = M \cap (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)^1_i, \quad M_i = M^{-1}_i \cup M^1_i$$

назовём *отрицательной, положительной* и *большой компонентой с номером i множества M* соответственно.

Заметим, что определённые ранее множества R_i^{-1}, R_i^1 и R_i были определены именно как отрицательная, положительная и большая компоненты с номером i подмножества $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ соответственно.

Нам будет удобно рассматривать единичный n-мерный куб B^n как векторное пространство над полем GF(2). Операции сложения векторов и произведения вектора на число понимаются в обычном смысле, т. е. как поразрядная сумма двоичных наборов по модулю 2 и поразрядное умножение двоичного набора на число. Пусть

$$\mathbf{e^1} = (1, 0, \ldots, 0), \ \mathbf{e^2} = (0, 1, 0 \ldots, 0), \ \ldots, \ \mathbf{e^n} = (0, \ldots, 0, 1).$$

Большие компоненты $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n$ множества R будем называть *диагоналями множества* $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$.

Для каждого $i = 1, \ldots, n$ отображение $\mathrm{T}_i \colon \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1 \to \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$, заданное посредством равенства $\mathrm{T}_i(\alpha, \beta) = (\beta + \mathbf{e^i}, \alpha + \mathbf{e^i})$, назовём *операцией транспонирования множества* $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ *относительно диагонали* R_i, или просто *операцией* T_i.

Заметим, что при каждом $i = 1, \ldots, n$ операция T_i является взаимно однозначным отображением множества $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ на себя. Это следует из равенства $\mathrm{T}_i(\mathrm{T}_i(\alpha, \beta)) = (\alpha, \beta)$, выполненного по определению T_i для любого $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$.

Будем говорить, что подмножество $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ *симметрично относительно диагонали* R_i, если $\mathrm{T}_i(M) = M$. Направление $i \in \{1, \ldots, n\}$ является *внутренним*, или *собственным для подмножества* $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$, если $M_i \neq \varnothing$ (другими словами, если в M найдётся (0-1)-пара, разделимая по направлению i). Если $M_i = \varnothing$, то будем говорить, что направление i является *внешним для* M.

Через $\mathrm{Own}(M)$ обозначим множество всех таких $i \in \{1, \ldots, n\}$, что направление i является внутренним для M. Через $\mathrm{Out}(M)$ обозначим множество всех таких $i \in \{1, \ldots, n\}$, что направление i является внешним для M.

Подмножество $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ назовём *сильно симметричным*, если $|\mathrm{Own}(M)| \geqslant 2$ и для любого $i \in \mathrm{Own}(M)$ множество M симметрично относительно диагонали R_i.

Теорема 6. *При $n \geqslant 2$ множество $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ является своим сильно симметричным подмножеством.*

Доказательство. Теорема 6 вытекает из очевидного равенства $|\mathrm{Own}(\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)| = n$ и взаимной однозначности отображений T_i для $i = 1, \ldots, n$. Теорема 6 доказана.

Для произвольной грани $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ *диаметральной* (0-1)-*парой* этой грани назовём такую пару $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$, что $\alpha, \beta \in F$ и $\mathrm{dist}(\alpha, \beta) = \dim(F)$. Множество $\mathrm{D}(F)$ всех диаметральных (0-1)-пар грани F назовём *диаметральным множеством* грани F.

Заметим, что диаметральные множества $\mathrm{D}(F)$, $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ попарно не пересекаются и имеет место равенство $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1 = \bigcup\limits_{F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)} \mathrm{D}(F)$.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определений.

Лемма 13. *Для любой грани $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ справедливо равенство*

$$|\mathrm{D}(F)| = \begin{cases} \frac{|F|}{2} = 2^{\dim(F)-1}, & \text{если } \dim(F) \text{ нечётна,} \\ 0, & \text{если } \dim(F) \text{ чётна.} \end{cases}$$

Через $\mathfrak{F}^1_{\geqslant 3}(\mathrm{B}^n)$ обозначим множество всех граней $F \in \mathfrak{F}_{\geqslant 3}(\mathrm{B}^n)$ таких, что число $\dim(F)$ нечётно.

Теорема 7. *Для любой грани $F \in \mathfrak{F}^1_{\geqslant 3}(\mathrm{B}^n)$ диаметральное множество $\mathrm{D}(F)$ является сильно симметричным подмножеством множества $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$.*

Доказательство. По лемме 13 для грани $F \in \mathfrak{F}^1_{\geqslant 3}(\mathrm{B}^n)$ справедливо неравенство $\mathrm{D}(F) \neq \varnothing$. Для произвольной (0-1)-пары $(\alpha, \beta) \in \mathrm{D}(F)$ из определения множества $\mathrm{D}(F)$ следует, что неравенство $\alpha_i \neq \beta_i$ выполнено тогда и только тогда, когда $i \in \mathrm{Form}(F)$. Значит, справедливо равенство $\mathrm{Own}(\mathrm{D}(F)) = \mathrm{Form}(F)$, тем самым из $|\mathrm{Form}(F)| = \dim(F) \geqslant 3$ вытекает, что $|\mathrm{Own}(\mathrm{D}(F))| \geqslant 2$.

При любом $i \in \mathrm{Form}(F)$ из равенства $\mathrm{T}_i(\alpha, \beta) = (\beta + \mathbf{e^i}, \alpha + \mathbf{e^i})$ следует $\mathrm{T}_i(\alpha, \beta) \in \mathrm{D}(F)$, поэтому $\mathrm{T}_i(\mathrm{D}(F)) \subseteq \mathrm{D}(F)$. Это включение влечёт равенство $\mathrm{T}_i(\mathrm{D}(F)) = \mathrm{D}(F)$ в силу взаимной однозначности T_i. Это означает, что для любого $i \in \mathrm{Form}(F) = \mathrm{Own}(\mathrm{D}(F))$ множество $\mathrm{D}(F)$ симметрично относительно R_i. Теорема 7 доказана.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определений.

Лемма 14. *Для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$ справедливо равенство $(\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)^\delta_i = [\mathrm{R}^\delta_i]$.*

Лемма 15. *Для любого однородного разбиения P множества R при любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$ справедливо включение*

$$\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P^\delta_i\bigr) \subseteq (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)^\delta_i.$$

Доказательство. Из определения множества $\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P^\delta_i\bigr)$ и леммы 14 следует, что $\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P^\delta_i\bigr) = \bigcup\limits_{Q \in P^\delta_i} [Q] \subseteq [\mathrm{R}^\delta_i] = (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)^\delta_i$. Лемма 15 доказана.

Лемма 16. *Для любых однородного разбиения P множества* R *и подмножества* $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ *для всех* $j, i \in \{1, \dots, n\}$, $\delta, \sigma \in \{-1, 1\}$ *справедливо включение* $\widehat{\mathrm{G}}(P_j^\delta) \cap M_i^\sigma \subseteq M_j^\delta \cap M_i^\sigma$.

Доказательство. По лемме 15 и определению компонент M_i^σ, M_j^δ множества M имеем

$$\widehat{\mathrm{G}}(P_j^\delta) \cap M_i^\sigma \subseteq (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)_j^\delta \cap M_i^\sigma \\ = (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)_j^\delta \cap M \cap (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)_i^\sigma = M_j^\delta \cap M_i^\sigma.$$

Лемма 16 доказана.

Лемма 17. *Для любого однородного разбиения P множества* R *при каждом* $i \in \{1, \dots, n\}$ *справедливо равенство* $\mathrm{T}_i(\widehat{\mathrm{G}}(P_i)) = \widehat{\mathrm{G}}(P_i)$.

Доказательство. Пусть $P_i = \{Q_1, \dots, Q_k\}$. По определению большой компоненты P_i имеем $Q_1, \dots, Q_k \subseteq \mathrm{R}_i$.

Заметим, что для любого $Q \subseteq \mathrm{R}_i$ множество $[Q]$ симметрично относительно диагонали R_i. Действительно, по определению прямоугольника $[Q]$ для любой (0-1)-пары $(\alpha, \beta) \in [Q]$ инцидентные её концам (0-1)-рёбра $(\alpha, \alpha + \mathbf{e^i})$ и $(\beta + \mathbf{e^i}, \beta)$ из R_i обязаны принадлежать Q. А значит, справедливо включение $\mathrm{T}_i(\alpha, \beta) = (\beta + \mathbf{e^i}, \alpha + \mathbf{e^i}) \in [Q]$. Отсюда и из взаимной однозначности отображения T_i следует, что $\mathrm{T}_i([Q]) = [Q]$.

Поэтому в силу того, что $\widehat{\mathrm{G}}(P_i) = [Q_1] \cup \dots \cup [Q_k]$, имеем

$$\mathrm{T}_i(\widehat{\mathrm{G}}(P_i)) = \mathrm{T}_i([Q_1] \cup \dots \cup [Q_k]) \\ = \mathrm{T}_i([Q_1]) \cup \dots \cup \mathrm{T}_i([Q_k]) = [Q_1] \cup \dots \cup [Q_k] = \widehat{\mathrm{G}}(P_i).$$

Лемма 17 доказана.

Будем говорить, что отображение $\mathrm{O}\colon \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1 \to \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ *сохраняет свойство разделимости по направлению* i, если для любой (0-1)-пары $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ из включения $(\alpha, \beta) \in (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)_i$ следует включение $\mathrm{O}((\alpha, \beta)) \in (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)_i$.

Будем говорить, что отображение $\mathrm{O}\colon \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1 \to \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ *сохраняет знак разделимости по направлению* i, если для любой (0-1)-пары $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ и произвольного $\delta \in \{-1, 1\}$ из включения $(\alpha, \beta) \in (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)_i^\delta$ следует включение $\mathrm{O}((\alpha, \beta)) \in (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)_i^\delta$.

Будем говорить, что отображение $\mathrm{O}\colon \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1 \to \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ *меняет знак разделимости по направлению* i, если для любой (0-1)-пары $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ и произвольного $\delta \in \{-1, 1\}$ из включения $(\alpha, \beta) \in (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)_i^\delta$ следует включение $\mathrm{O}((\alpha, \beta)) \in (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)_i^{-\delta}$.

Лемма 18. *Для любых $j, i \in \{1, \ldots, n\}$ операция T_j сохраняет свойство разделимости по направлению i. Если при этом $j = i$, то T_j сохраняет знак разделимости по направлению i, если $j \neq i$, то T_j меняет знак разделимости по направлению i.*

Доказательство. Проверим сохранение свойства разделимости операцией T_j по направлению i. Рассмотрим произвольную (0-1)-пару $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$. Через (π, τ) обозначим (0-1)-пару $\mathrm{T}_j((\alpha, \beta))$. По определению T_j имеем $\pi = \beta + \mathbf{e^j}$, $\tau = \alpha + \mathbf{e^j}$. Поэтому при $j = i$ выполнены равенства $\pi_i = \beta_i + 1 \pmod 2$, $\tau_i = \alpha_i + 1 \pmod 2$, при $j \neq i$ выполнены равенства $\pi_i = \beta_i$, $\tau_i = \alpha_i$. В обоих случаях из $\alpha_i \neq \beta_i$ следует $\pi_i \neq \tau_i$. Проверка сохранения и смены знака разделимости осуществляется аналогично. Лемма 18 доказана.

Лемма 19. *Для любого сильно симметричного $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ при любых $j \in \mathrm{Own}(M)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$ справедливы равенства*

$$\mathrm{T}_j(M_i^\delta) = \begin{cases} M_i^\delta, & \text{если } j = i, \\ M_i^{-\delta}, & \text{если } j \neq i. \end{cases}$$

Доказательство. В силу взаимной однозначности операций T_j достаточно доказать включения

$$\mathrm{T}_j(M_i^\delta) \subseteq \begin{cases} M_i^\delta, & \text{если } j = i, \\ M_i^{-\delta}, & \text{если } j \neq i. \end{cases}$$

Эти включения следуют из выполненных по определению сильно симметричного множества M равенств $\mathrm{T}_j(M) = M$ для $j \in \mathrm{Own}(M)$ и леммы 18. Лемма 19 доказана.

Лемма 20. *Для любого сильно симметричного $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ при каждом $i = 1, \ldots, n$ справедливо равенство $\left|M_i^{-1}\right| = \left|M_i^1\right|$.*

Доказательство. По определению для сильно симметричного M справедливо неравенство $|\mathrm{Own}(M)| \geqslant 2$. Утверждение леммы следует из выполненного по лемме 19 при любом $j \in \mathrm{Own}(M) \setminus \{i\}$ равенства $\mathrm{T}_j\bigl(M_i^{-1}\bigr) = M_i^1$ и взаимной однозначности отображения T_j. Лемма 20 доказана.

Теорема 8. *Если сильно симметричное подмножество $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$ однородного разбиения P множества R, то при каждом $i = 1, \ldots, n$ справедливо равенство*

$$\left|\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap M_i^{-1}\right| - \left|\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap M_i^1\right| = \left|\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^{-1}\bigr) \cap M\right| - \left|\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^1\bigr) \cap M\right|. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть M — произвольное сильно симметричное подмножество $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ и P — однородное разбиение множества R такое, что M не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$. В силу леммы 15 при любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$ справедливо равенство $\widehat{\mathrm{G}}\big(P_i^\delta\big) = \widehat{\mathrm{G}}\big(P_i^\delta\big) \cap (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)_i^\delta$. Отсюда и из определения компонент M_i^δ множества M следует, что при любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$ имеет место равенство

$$\widehat{\mathrm{G}}\big(P_i^\delta\big) \cap M = \widehat{\mathrm{G}}\big(P_i^\delta\big) \cap (\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)_i^\delta \cap M = \widehat{\mathrm{G}}\big(P_i^\delta\big) \cap M_i^\delta.$$

Значит, правая часть равенства (1) равна $\big|\widehat{\mathrm{G}}\big(P_i^{-1}\big) \cap M_i^{-1}\big| - \big|\widehat{\mathrm{G}}\big(P_i^1\big) \cap M_i^1\big|$. Стало быть, чтобы доказать равенство (1), достаточно убедиться в том, что

$$\big|\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap M_i^{-1}\big| - \big|\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap M_i^1\big| = \big|\widehat{\mathrm{G}}\big(P_i^{-1}\big) \cap M_i^{-1}\big| - \big|\widehat{\mathrm{G}}\big(P_i^1\big) \cap M_i^1\big|. \quad (2)$$

В случае $i \in \mathrm{Out}(M)$ по определению выполнено $M_i^{-1} = M_i^1 = \varnothing$, поэтому равенство (2) очевидно.

Докажем равенство (2) в случае $i \in \mathrm{Own}(M)$. Рассмотрим слагаемые левой части этого равенства. Из отсутствия в множестве M точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$ вытекают равенства

$$\big|\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap M_i^{-1}\big| = \sum_{j \in \{1, \ldots, n\}} \big|\widehat{\mathrm{G}}(P_j) \cap M_i^{-1}\big|,$$

$$\big|\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap M_i^1\big| = \sum_{j \in \{1, \ldots, n\}} \big|\widehat{\mathrm{G}}(P_j) \cap M_i^1\big|.$$

Если $j \in \mathrm{Out}(M)$, то $M_j^{-1} = M_j^1 = \varnothing$ по определению. Отсюда в силу равенства $\widehat{\mathrm{G}}(P_j) = \widehat{\mathrm{G}}(P_j^{-1}) \cup \widehat{\mathrm{G}}(P_j^1)$ и леммы 16 как при $\delta = -1$, так и при $\delta = 1$ получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{G}}(P_j) \cap M_i^\delta \subseteq \big(\widehat{\mathrm{G}}\big(P_j^{-1}\big) \cap M_i^\delta\big) \cup \big(\widehat{\mathrm{G}}\big(P_j^1\big) \cap M_i^\delta\big) \\ \subseteq \big(M_j^{-1} \cap M_i^\delta\big) \cup \big(M_j^1 \cap M_i^\delta\big) = \varnothing. \end{aligned}$$

Тем самым при $j \in \mathrm{Out}(M)$ справедливы равенства $\big|\widehat{\mathrm{G}}(P_j) \cap M_i^{-1}\big| = 0$ и $\big|\widehat{\mathrm{G}}(P_j) \cap M_i^1\big| = 0$. Поэтому для слагаемых левой части равенства (2) имеем

$$\big|\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap M_i^{-1}\big| = \sum_{j \in \mathrm{Own}(M)} \big|\widehat{\mathrm{G}}(P_j) \cap M_i^{-1}\big|,$$

$$\bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P)\cap M_i^1\bigr| = \sum_{j\in\mathrm{Own}(M)} \bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_j)\cap M_i^1\bigr|.$$

Рассмотрим слагаемые с индексом $j = i$ из правых частей последних двух равенств, т. е. слагаемые $\bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_i)\cap M_i^{-1}\bigr|$ и $\bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_i)\cap M_i^1\bigr|$. Ввиду отсутствия в множестве M точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$ и равенства $\widehat{\mathrm{G}}(P_i) = \widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^{-1}\bigr)\cup\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^1\bigr)$ получаем

$$\bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_i)\cap M_i^{-1}\bigr| = \bigl|\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^{-1}\bigr)\cap M_i^{-1}\bigr| + \bigl|\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^1\bigr)\cap M_i^{-1}\bigr|,$$

$$\bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_i)\cap M_i^1\bigr| = \bigl|\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^{-1}\bigr)\cap M_i^1\bigr| + \bigl|\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^1\bigr)\cap M_i^1\bigr|.$$

По лемме 16 имеем $\widehat{\mathrm{G}}(P_i^1)\cap M_i^{-1}\subseteq M_i^1\cap M_i^{-1} = \varnothing$ и $\widehat{\mathrm{G}}(P_i^{-1})\cap M_i^1\subseteq M_i^{-1}\cap M_i^1 = \varnothing$, поэтому $\bigl|\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^1\bigr)\cap M_i^{-1}\bigr| = 0$ и $\bigl|\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^{-1}\bigr)\cap M_i^1\bigr| = 0$. Отсюда следует, что

$$\bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_i)\cap M_i^{-1}\bigr| = \bigl|\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^{-1}\bigr)\cap M_i^{-1}\bigr|,\quad \bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_i)\cap M_i^1\bigr| = \bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_i^1)\cap M_i^1\bigr|.$$

Значит, для слагаемых левой части равенства (2) справедливы равенства

$$\bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P)\cap M_i^{-1}\bigr| = \bigl|\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^{-1}\bigr)\cap M_i^{-1}\bigr| + \sum_{j\in\mathrm{Own}(M)\setminus\{i\}} \bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_j)\cap M_i^{-1}\bigr|,$$

$$\bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P)\cap M_i^1\bigr| = \bigl|\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^1\bigr)\cap M_i^1\bigr| + \sum_{j\in\mathrm{Own}(M)\setminus\{i\}} \bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_j)\cap M_i^1\bigr|.$$

Тем самым чтобы доказать (2), достаточно доказать равенство

$$\sum_{j\in\mathrm{Own}(M)\setminus\{i\}} \bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_j)\cap M_i^{-1}\bigr| = \sum_{j\in\mathrm{Own}(M)\setminus\{i\}} \bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_j)\cap M_i^1\bigr|,$$

для чего, в свою очередь, достаточно показать, что при каждом $j\in\mathrm{Own}(M)\setminus\{i\}$ соответствующие слагаемые $\bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_j)\cap M_i^{-1}\bigr|$ и $\bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_j)\cap M_i^1\bigr|$ левой и правой частей этого равенства равны между собой. Убедимся в этом.

В силу лемм 17 и 19 при любых $i\in\mathrm{Own}(M)$, $j\in\mathrm{Own}(M)\setminus\{i\}$ выполнены равенства $\mathrm{T}_j(\widehat{\mathrm{G}}(P_j)) = \widehat{\mathrm{G}}(P_j)$, $\mathrm{T}_j\bigl(M_i^{-1}\bigr) = M_i^1$. Из этих равенств и взаимной однозначности отображений T_j следует, что

$$\mathrm{T}_j\bigl(\widehat{\mathrm{G}}(P_j)\cap M_i^{-1}\bigr) = \mathrm{T}_j(\widehat{\mathrm{G}}(P_j))\cap\mathrm{T}_j\bigl(M_i^{-1}\bigr) = \widehat{\mathrm{G}}(P_j)\cap M_i^1,$$

поэтому $\bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_j)\cap M_i^{-1}\bigr| = \bigl|\widehat{\mathrm{G}}(P_j)\cap M_i^1\bigr|$. Теорема 8 доказана.

Для произвольных однородного разбиения P множества R и подмножества $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ матрицу $\mathbb{S}(P, M) = \left(s_i^\delta\right)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$ размера $2 \times n$, где $s_i^\delta = \left|\widehat{\mathrm{G}}\left(P_i^\delta\right) \cap M\right|$, назовём *матрицей площадей гирлянды* $\mathrm{G}(P)$ *относительно* M. Для каждого $i = 1, \dots, n$ положим

$$\Delta_i \mathbb{S}(P, M) = \left|s_i^{-1} - s_i^1\right| = \left|\left|\widehat{\mathrm{G}}\left(P_i^{-1}\right) \cap M\right| - \left|\widehat{\mathrm{G}}\left(P_i^1\right) \cap M\right|\right|.$$

Заметим, что $\mathbb{S}(P, \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1) = \mathbb{S}(P)$.

Лемма 21. *Для любых однородного разбиения P множества R и подмножества $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ справедливо равенство $\mathrm{s}(P, M) = \|\mathbb{S}(P, M)\|_1$.*

Доказательство. Утверждение этой леммы следует из определений и леммы 6. Лемма 21 доказана.

Теорема 9. *Если сильно симметричное подмножество $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$ однородного разбиения P множества R, то при каждом $i = 1, \dots, n$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{def}(P, M) \geqslant \Delta_i \mathbb{S}(P, M).$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $i \in \{1, \dots, n\}$. Чтобы получить нижнюю оценку величины $\operatorname{def}(P, M)$, воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 22. *Пусть $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ и подмножества $X, Y \subseteq M$ такие, что $X \cap Y = \varnothing$ и $|X| = |Y|$. Тогда для любого однородного разбиения P множества R справедливо неравенство*

$$\operatorname{def}(P, M) \geqslant ||\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap X| - |\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap Y||.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $|\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap X| \geqslant |\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap Y|$. Тогда из определения величины $\operatorname{def}(P, M)$ и очевидного включения $M \setminus (\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap M) \supseteq Y \setminus (\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap Y)$ следует, что

$$\begin{aligned}
\operatorname{def}(P, M) = |M| - |\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap M| &\geqslant |Y| - |\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap Y| \\
= |X| - |\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap Y| &\geqslant |\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap X| - |\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap Y| \\
&= ||\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap X| - |\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap Y||.
\end{aligned}$$

Лемма 22 доказана.

В качестве X, Y рассмотрим компоненты M_i^{-1}, M_i^1 сильно симметричного $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$. Равенство $M_i^{-1} \cap M_i^1 = \varnothing$ выполнено по определению, а равенство $\left|M_i^{-1}\right| = \left|M_i^1\right|$ — по лемме 20. По лемме 22 и теореме 8, учитывая, что M не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$, имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{def}(P,M) &\geqslant \Big|\big|\widehat{\mathrm{G}}(P)\cap M_i^{-1}\big| - \big|\widehat{\mathrm{G}}(P)\cap M_i^{1}\big|\Big| \\ &= \Big|\big|\widehat{\mathrm{G}}\big(P_i^{-1}\big)\cap M\big| - \big|\widehat{\mathrm{G}}\big(P_i^{1}\big)\cap M\big|\Big| = \Delta_i\mathbb{S}(P,M).\end{aligned}$$

Теорема 9 доказана.

Для произвольной числовой матрицы $\mathbb{S} = \big(s_i^\delta\big)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$ размера $2\times n$ и любого $i\in\{1,\dots,n\}$ матрицу

$$\mathbb{S}^{(i)} = \begin{pmatrix} s_1^{-1} & \dots & s_{i-1}^{-1} & \max\left\{s_i^{-1}, s_i^1\right\} & s_{i+1}^{-1} & \dots & s_n^{-1} \\ s_1^{1} & \dots & s_{i-1}^{1} & \max\left\{s_i^{-1}, s_i^1\right\} & s_{i+1}^{1} & \dots & s_n^{1}\end{pmatrix}$$

назовём *верхней производной матрицы* $\mathbb{S}$ *по столбцу с номером* i.

Теорема 10. *Если сильно симметричное подмножество* $M\subseteq \mathrm{N}^0\times\mathrm{N}^1$ *не содержит точек самопересечения гирлянды* $\mathrm{G}(P)$ *однородного разбиения* P *множества* R, *то при каждом* $i=1,\dots,n$ *справедливо неравенство*

$$\mathrm{s}(P,M)+\operatorname{def}(P,M)\geqslant \|\mathbb{S}^{(i)}(P,M)\|_1.$$

Доказательство. Учитывая, что матрицы $\mathbb{S}(P,M) = \big(s_i^\delta\big)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$ и $\mathbb{S}^{(i)}(P,M)$ связаны равенством $\|\mathbb{S}(P,M)\|_1 + \big|s_i^{-1}-s_i^1\big| = \|\mathbb{S}^{(i)}(P,M)\|_1$, по лемме 21, теореме 9 и определению величины $\Delta_i\mathbb{S}(P,M)$ имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{s}(P,M)+\operatorname{def}(P,M) &\geqslant \|\mathbb{S}(P,M)\|_1 + \Delta_i\mathbb{S}(P,M) \\ &= \|\mathbb{S}(P,M)\|_1 + \big|s_i^{-1}-s_i^1\big| = \|\mathbb{S}^{(i)}(P,M)\|_1.\end{aligned}$$

Теорема 10 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Для произвольной числовой матрицы $\mathbb{L} = \big(\ell_i^\delta\big)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$ размера $2\times n$ и любого $i\in\{1,\dots,n\}$ матрицу

$$\mathbb{L}_{(i)} = \begin{pmatrix} \ell_1^{-1} & \dots & \ell_{i-1}^{-1} & \min\left\{\ell_i^{-1}, \ell_i^1\right\} & \ell_{i+1}^{-1} & \dots & \ell_n^{-1} \\ \ell_1^{1} & \dots & \ell_{i-1}^{1} & \min\left\{\ell_i^{-1}, \ell_i^1\right\} & \ell_{i+1}^{1} & \dots & \ell_n^{1}\end{pmatrix}$$

назовём *нижней производной матрицы* $\mathbb{L}$ *по столбцу с номером* i.

Лемма 23. *Для любого однородного разбиения P множества* R *при любом $i \in \{1,\dots,n\}$ справедливо неравенство*

$$\|\mathbb{S}^{(i)}(P)\|_1 \geqslant 4^{n-2}\|\mathbb{L}_{(i)}(P)\|_{-1}.$$

Если при этом не все элементы матрицы $\mathbb{L}_{(i)}(P)$ являются степенями двойки, то имеет место строгое неравенство

$$\|\mathbb{S}^{(i)}(P)\|_1 > 4^{n-2}\|\mathbb{L}_{(i)}(P)\|_{-1}.$$

Доказательство. Зафиксируем $i \in \{1,\dots,n\}$. По лемме 9 каждая пара соответствующих элементов s_j^δ и ℓ_j^δ матриц $\mathbb{S}(P)$ и $\mathbb{L}(P)$ связана неравенством $s_j^\delta \geqslant 4^{n-2}/\ell_j^\delta$, а при $\ell_j^\delta \neq 2^k$ — неравенством $s_j^\delta > 4^{n-2}/\ell_j^\delta$. Значит, чтобы доказать лемму 23, нужно, во-первых, показать, что

$$\max\left\{s_i^{-1}, s_i^1\right\} \geqslant \frac{4^{n-2}}{\min\left\{\ell_i^{-1}, \ell_i^1\right\}},$$

а во-вторых, в случае $\min\left\{\ell_i^{-1}, \ell_i^1\right\} \neq 2^k$ показать, что

$$\max\left\{s_i^{-1}, s_i^1\right\} > \frac{4^{n-2}}{\min\left\{\ell_i^{-1}, \ell_i^1\right\}}.$$

Без ограничения общности полагаем, что $\min\left\{\ell_i^{-1}, \ell_i^1\right\} = \ell_i^1$. Из неравенства $s_i^1 \geqslant 4^{n-2}/\ell_i^1$ следует, что

$$\max\left\{s_i^{-1}, s_i^1\right\} \geqslant s_i^1 \geqslant \frac{4^{n-2}}{\ell_i^1} = \frac{4^{n-2}}{\min\left\{\ell_i^{-1}, \ell_i^1\right\}}.$$

В случае $\min\left\{\ell_i^{-1}, \ell_i^1\right\} \neq 2^k$ имеем $\ell_i^1 \neq 2^k$, а значит, и $s_i^1 > 4^{n-2}/\ell_i^1$, поэтому

$$\max\left\{s_i^{-1}, s_i^1\right\} \geqslant s_i^1 > \frac{4^{n-2}}{\ell_i^1} = \frac{4^{n-2}}{\min\left\{\ell_i^{-1}, \ell_i^1\right\}}.$$

Лемма 23 доказана.

Теорема 11. *Если для однородного разбиения P множества* R *при некотором $i \in \{1,\dots,n\}$ справедливо включение $\mathbb{L}_{(i)}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$, то разбиение P является неправильным.*

Доказательство. Предположим, напротив, что для некоторого однородного разбиения P множества R при некотором $i \in \{1,\dots,n\}$ выполнено $\mathbb{L}_{(i)}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$, но разбиение P правильно. Тогда если $\|\mathbb{L}_{(i)}(P)\|_{-1} > 4$, то по лемме 23 имеем

$$\|\mathbb{S}^{(i)}(P)\|_1 \geqslant 4^{n-2}\|\mathbb{L}_{(i)}(P)\|_{-1} > 4^{n-1} = |\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1|.$$

Если $\|\mathbb{L}_{(i)}(P)\|_{-1} = 4$ и не все элементы матрицы $\mathbb{L}_{(i)}(P)$ являются степенями двойки, то по лемме 23 получаем

$$\|\mathbb{S}^{(i)}(P)\|_1 > 4^{n-2}\|\mathbb{L}_{(i)}(P)\|_{-1} = 4^{n-1} = |\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1|.$$

В обоих случаях из правильности разбиения P и теорем 6, 10 следует, что

$$\begin{aligned} &\mathrm{s}(P, \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1) + \mathrm{def}(P, \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1) \\ &\qquad\qquad \geqslant \|\mathbb{S}^{(i)}(P, \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1)\|_1 = \|\mathbb{S}^{(i)}(P)\|_1 > |\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1|. \end{aligned}$$

Поэтому по лемме 5 множество $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ содержит точку самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$, т. е. разбиение P является неправильным. Значит, наше предположение неверно. Теорема 11 доказана.

Чтобы доказать теорему 2, достаточно (поскольку теорема 5 уже доказана) установить истинность следующих двух утверждений.

1. При чётном $n \neq 2^k$ любое однородное разбиение P множества R мощности $|P| = n^2 + 1$ является неправильным.

2. При нечётном $n \geqslant 5$ любое однородное разбиение P множества R мощности $|P| = n^2 + 2$ является неправильным.

Заметим, что при чётном n число $n^2 + 1$ нечётно, а при нечётном n число $n^2 + 2$ нечётно. Поэтому как в рамках первого, так и в рамках второго утверждения из выполненного по лемме 8 равенства $\|\mathbb{L}(P)\|_1 = |P|$ следует нечётность числа $\|\mathbb{L}(P)\|_1$. Стало быть, в обоих случаях найдётся такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, что элементы ℓ_i^{-1} и ℓ_i^1 матрицы $\mathbb{L}(P)$ не равны между собой. Для этого i справедливо строгое неравенство $\|\mathbb{L}_{(i)}(P)\|_1 < \|\mathbb{L}(P)\|_1$. Значит, в первом случае $\mathbb{L}_{(i)}(P) \in \bigcup\limits_{L=1}^{n^2} \mathfrak{L}(n, L)$, а во втором — $\mathbb{L}_{(i)}(P) \in \bigcup\limits_{L=1}^{n^2+1} \mathfrak{L}(n, L)$. В первом случае из леммы 11, а во втором из леммы 12 следует включение $\mathbb{L}_{(i)}(P) \in \mathfrak{L}^4_{-1}$. Справедливость утверждений 1 и 2 вытекает из этого включения и теоремы 11. Теорема 2 доказана.

4. Об используемой при доказательстве теоремы 3 классификации однородных разбиений множества R

Через $\mathcal{K}$ обозначим класс всех однородных разбиений P множества R всех (0-1)-рёбер куба B^6 таких, что $38 \leqslant |P| \leqslant 39$. Из выполненного по лемме 8 равенства $|P| = \|\mathbb{L}(P)\|_1$ следует, что для любого $P \in \mathcal{K}$ справедливо включение $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}(6, 38) \cup \mathfrak{L}(6, 39)$.

Через $\mathfrak{L}(6, L, m)$ обозначим множество всех матриц $\mathbb{L} \in \mathfrak{L}(6, L)$ таких, что минимальный элемент матрицы $\mathbb{L}$ равен m, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Через $\mathcal{K}_m$ обозначим класс всех таких разбиений $P \in \mathcal{K}$, что выполнено включение $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}(6, 38, m) \cup \mathfrak{L}(6, 39, m)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Заметим, что $\mathfrak{L}(6, 38, m) = \mathfrak{L}(6, 39, m) = \varnothing$ при $m \geqslant 4$ и, значит, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$.

Из теоремы 2 следует, что все однородные разбиения P множества R мощности $|P| \leqslant 37$ являются неправильными. Тем самым, чтобы доказать теорему 3, достаточно показать, что все разбиения из класса $\mathcal{K}$ также неправильны.

Докажем неправильность разбиений из классов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$. Через $\mathfrak{L}(6, L, 2, 2)$ обозначим множество всех матриц $\mathbb{L} \in \mathfrak{L}(6, L, 2)$ таких, что по крайней мере два элемента матрицы $\mathbb{L}$ равны 2.

Для доказательства будем использовать следующие две леммы, которые являются очевидными следствиями теорем 29 и 30 из разд. 10.

Лемма 24. *Справедливо включение* $\mathfrak{L}(6, 38, 1) \cup \mathfrak{L}(6, 39, 1) \subseteq \mathfrak{L}^4_{-1}$.

Лемма 25. *При* $L \leqslant 38$ *справедливо включение* $\mathfrak{L}(6, L, 2, 2) \subseteq \mathfrak{L}^4_{-1}$.

Теорема 12. *Любое разбиение* $P \in \mathcal{K}_1$ *является неправильным.*

Доказательство. Для произвольного $P \in \mathcal{K}_1$ по определению класса $\mathcal{K}_1$ выполнено $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}(6, 38, 1) \cup \mathfrak{L}(6, 39, 1)$ и, значит, по лемме 24 $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}^4_{-1}$. Неправильность разбиения P вытекает из этого включения и теоремы 4. Теорема 12 доказана.

Теорема 13. *Любое разбиение* $P \in \mathcal{K}_2$ *является неправильным.*

Доказательство. Для произвольного $P \in \mathcal{K}_2$ по определению класса $\mathcal{K}_2$ выполнено включение $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}(6, 38, 2) \cup \mathfrak{L}(6, 39, 2)$. Без ограничения общности считаем, что ℓ_1^{-1} является минимальным элементом матрицы $\mathbb{L}(P) = \bigl(\ell_i^\delta\bigr)_{i=1,\ldots,6}^{\delta=-1,1}$, т. е. $\ell_1^{-1} = 2$. Рассмотрим три возможных случая.

1) $\ell_1^1 = \ell_1^{-1} = 2$ и $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}(6, 38, 2)$. В этом случае $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}(6, 38, 2, 2)$, значит, по лемме 24 имеем $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}^4_{-1}$.

2) $\ell_1^1 = \ell_1^{-1} = 2$ и $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}(6, 39, 2)$. В этом случае $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}(6, 39, 2, 2)$ и из нечётности $\|\mathbb{L}(P)\|_1 = 39$ следует существование $i \in \{2, \ldots, 6\}$ такого, что $\ell_i^1 \neq \ell_i^{-1}$. Для этого i выполнено $\|\mathbb{L}_{(i)}(P)\|_1 < \|\mathbb{L}(P)\|_1$, а значит, $\mathbb{L}_{(i)}(P) \in \bigcup\limits_{L=1}^{38} \mathfrak{L}(6, L, 2, 2)$, откуда по лемме 25 имеем $\mathbb{L}_{(i)}(P) \in \mathfrak{L}^4_{-1}$.

3) $\ell_1^1 > \ell_1^{-1}$. В этом случае выполнено $\|\mathbb{L}_{(1)}(P)\|_1 < \|\mathbb{L}(P)\|_1$, а значит, и $\mathbb{L}_{(1)}(P) \in \bigcup\limits_{L=1}^{38} \mathfrak{L}(6, L, 2, 2)$. Как и во втором случае, по лемме 25 имеем $\mathbb{L}_{(1)}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$.

В случае 1 разбиение P является неправильным по теореме 4, в случаях 2, 3 — по теореме 11. Теорема 13 доказана.

В силу теорем 2, 12 и 13 для доказательства теоремы 3 осталось показать, что любое разбиение P из класса $\mathcal{K}_3$ является неправильным. Для этого разобьём класс $\mathcal{K}_3$ на три подкласса.

По определению для любого $P \in \mathcal{K}_3$ минимальный элемент матрицы $\mathbb{L}(P)$ равен 3, а сумма элементов этой матрицы не меньше 38 и не больше 39. Таким образом, возможны только три случая:

1) в каждом столбце матрицы $\mathbb{L}(P)$ имеется тройка;

2) матрица $\mathbb{L}(P)$ состоит из пяти столбцов с двумя тройками и одного столбца с минимальным элементом 4 (этот столбец может состоять либо из двух четвёрок, либо из четвёрки и пятёрки);

3) матрица $\mathbb{L}(P)$ состоит из четырёх столбцов с двумя тройками, одного столбца с тройкой и четвёркой и одного столбца с двумя четвёрками.

Классы разбиений $P \in \mathcal{K}_3$, соответствующих первому, второму и третьему случаю, обозначим через $\mathcal{K}_3^0$, $\mathcal{K}_3^1$ и $\mathcal{K}_3^2$ соответственно. Очевидно, что $\mathcal{K}_3 = \mathcal{K}_3^0 \cup \mathcal{K}_3^1 \cup \mathcal{K}_3^2$.

Заметим, что для любого $P \in \mathcal{K}_3^1 \cup \mathcal{K}_3^2$ матрица сложности $\mathbb{L}(P)$ имеет ровно один столбец без троек и не более одного столбца с неравными элементами. При этом в случае $P \in \mathcal{K}_3^1$ столбцом с неравными элементами может быть только столбец без троек, а в случае $P \in \mathcal{K}_3^2$ — столбец с тройкой и четвёркой.

Через $\mathcal{K}_3^1(k)$ обозначим класс всех разбиений $P \in \mathcal{K}_3^1$ таких, что столбец без троек (столбец с минимальным элементом 4) матрицы $\mathbb{L}(P)$ имеет номер $k \in \{1, \ldots, 6\}$.

Через $\mathcal{K}_3^2(k, j)$ обозначим класс всех разбиений $P \in \mathcal{K}_3^2$ таких, что столбец без троек (столбец с двумя четвёрками) матрицы $\mathbb{L}(P)$ имеет номер k, столбец с неравными элементами (столбец с тройкой и четвёркой) имеет номер j, $k \in \{1, \ldots, 6\}$, $j \in \{1, \ldots, 6\} \setminus \{k\}$.

Заметим, что неправильность некоторых разбиений $P \in \mathcal{K}_3$ можно доказать на основе теоремы 11 (так же, как это сделано в теореме 13). Такое доказательство возможно, если одиннадцать из двенадцати элементов матрицы $\mathbb{L}(P)$ равны 3. В остальных случаях для матрицы $\mathbb{L}(P)$ и для любой её нижней производной $\mathbb{L}_{(i)}(P)$ выполнены строгие неравенства $\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} < 4$ и $\|\mathbb{L}_{(i)}(P)\|_{-1} < 4$, т. е. матрицы $\mathbb{L}(P)$ и $\mathbb{L}_{(i)}(P)$

не принадлежат классу $\mathfrak{L}^4_{-1}$. Значит, теоремы 4 и 11 в этих случаях неприменимы.

Чтобы доказать неправильность произвольного разбиения $P \in \mathcal{K}_3$, будем рассматривать семейство всех пар (0-1)-рёбер куба B^6, которые являются двухэлементными подмножествами блоков этого разбиения. Нас будут интересовать некоторые свойства этого семейства, вытекающие из теорем 9 и 10.

5. Критические для однородного разбиения P множества R грани куба B^n

Соединением куба B^n будем называть любое однородное двухэлементное подмножество $e = \{r_1, r_2\}$ множества R. При этом (0-1)-рёбра r_1, r_2 будем называть *концами* этого соединения. *Индексом* и *знаком* соединения e назовём номер направления и знак его концов соответственно.

Через E, E_i^{-1} и E_i^1 обозначим множество всех соединений куба B^n, множество всех отрицательных и всех положительных соединений индекса i куба B^n соответственно, $i = 1, \ldots, n$.

Для произвольного подмножества $A \subseteq \mathrm{E}$ и каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ множества $A_i^{-1} = A \cap \mathrm{E}_i^{-1}$ и $A_i^1 = A \cap \mathrm{E}_i^1$ назовём *отрицательной* и *положительной компонентой с номером* i множества A соответственно. Заметим, что компоненты $A_1^{-1}, \ldots, A_n^{-1}, A_1^1, \ldots, A_n^1$ любого подмножества $A \subseteq \mathrm{E}$ попарно не пересекаются.

Расстояние $\rho(r_1, r_2)$ *между* (0-1)-*рёбрами* $r_1, r_2 \in \mathrm{R}$ определим как наименьшее из расстояний Хэмминга между концами (0-1)-рёбра r_1 и концами (0-1)-рёбра r_2. *Длиной соединения* $e = \{r_1, r_2\} \in \mathrm{E}$ назовём величину $\mathrm{w}(e) = \rho(r_1, r_2)$. Через $\mathrm{E}[k]$ обозначим множество всех таких $e \in \mathrm{E}$, что $\mathrm{w}(e) = k$.

Заметим, что минимум расстояний Хэмминга между концами (0-1)-ребра r_1 и концами (0-1)-ребра r_2 соединения $e = \{r_1, r_2\}$ больше нуля и достигается на чётных (а также на нечётных) концах (0-1)-рёбер r_1, r_2. Значит, длина $\mathrm{w}(e)$ соединения $e \in \mathrm{E}$ может принимать только чётные положительные значения и $\mathrm{w}(e) < n$. В частности, при $n = 6$ справедливо равенство $\mathrm{E} = \mathrm{E}[2] \cup \mathrm{E}[4]$.

Для произвольного $Q \subseteq \mathrm{R}$ через $\widetilde{Q}$ обозначим минимальную по включению грань куба B^n, содержащую концы всех (0-1)-рёбер из Q. Заметим, что для любого $e \in \mathrm{E}$ справедливо $\dim(\widetilde{e}) = \mathrm{w}(e) + 1$.

Будем говорить, что соединение $e = \{r_1, r_2\}$ куба B^n *порождено дизъюнктным семейством* P *однородных подмножеств множества* R, если для некоторого $Q \in P$ оба конца этого соединения принадлежат Q.

Для произвольного дизъюнктного семейства P однородных подмножеств множества R через $\mathrm{E}(P)$ обозначим множество всех соединений e куба B^n, порождённых дизъюнктным семейством P однородных подмножеств множества R, через $\mathrm{E}[k](P)$ — множество всех таких $e \in \mathrm{E}(P)$, что $\mathrm{w}(e) = k$.

Заметим, что любая компонента P_i^δ дизъюнктного семейства P однородных подмножеств множества R связана с соответствующей компонентой $\mathrm{E}_i^\delta(P)$ множества $\mathrm{E}(P)$ очевидным равенством $\mathrm{E}\bigl(P_i^\delta\bigr) = \mathrm{E}_i^\delta(P)$.

Для произвольных однородного разбиения P множества R и грани $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ через $\mathrm{E}(P,F)$ обозначим множество всех $e \in \mathrm{E}(P)$ таких, что $\widetilde{e} = F$.

Для произвольного подмножества $Q \subseteq \mathrm{R}$ через $\mathbf{P}_2(Q)$ обозначим множество всех двухэлементных подмножеств множества Q.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определений.

Лемма 26. *Для любого дизъюнктного семейства P однородных подмножеств множества R справедливы равенства*

$$\mathrm{E}(P) = \bigcup_{Q \in P} \mathbf{P}_2(Q), \quad \mathrm{E}_i^\delta(P) = \bigcup_{Q \in P_i^\delta} \mathbf{P}_2(Q), \quad i = 1, \ldots, n,\ \delta = -1, 1,$$

и множества $\mathbf{P}_2(Q)$, $Q \in P$, попарно не пересекаются.

Лемма 27. *Для любого однородного разбиения P множества R и любой грани $F \in \mathfrak{F}^1_{\geqslant 3}(\mathrm{B}^n)$ элементы матрицы $\mathbb{S}(P, \mathrm{D}(F)) = \bigl(s_i^\delta\bigr)_{i=1,\ldots,n}^{\delta=-1,1}$ и мощности соответствующих компонент множества $\mathrm{E}(P,F)$ связаны равенствами $s_i^\delta = 2\bigl|\mathrm{E}_i^\delta(P,F)\bigr|$, $i = 1, \ldots, n$, $\delta = -1, 1$.*

Доказательство. Из определения матрицы $\mathbb{S}(P, \mathrm{D}(F))$, определения тела $\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^\delta\bigr)$ гирлянды $\mathrm{G}\bigl(P_i^\delta\bigr)$ и леммы 6 следует, что

$$s_i^\delta = \bigl|\widehat{\mathrm{G}}\bigl(P_i^\delta\bigr) \cap \mathrm{D}(F)\bigr| = \Bigl|\bigcup_{Q \in P_i^\delta} [Q] \cap \mathrm{D}(F)\Bigr| = \sum_{Q \in P_i^\delta} |[Q] \cap \mathrm{D}(F)|.$$

Кроме того, из определения множества $\mathrm{E}(P,F)$ и леммы 26 получаем

$$2\bigl|\mathrm{E}_i^\delta(P,F)\bigr| = 2\bigl|\{e \in \mathrm{E}_i^\delta(P) \mid \widetilde{e} = F\}\bigr| = \sum_{Q \in P_i^\delta} 2|\{e \in \mathbf{P}_2(Q) \mid \widetilde{e} = F\}|.$$

Поэтому чтобы доказать лемму 27, достаточно для произвольных однородного подмножества $Q \subseteq \mathrm{R}$ и грани $F \in \mathfrak{F}^1_{\geqslant 3}(\mathrm{B}^n)$ доказать равенство $|[Q] \cap \mathrm{D}(F)| = 2 \cdot |\{e \in \mathbf{P}_2(Q) \mid \widetilde{e} = F\}|$.

Для произвольного однородного $Q \subseteq \mathrm{R}$ множество $\langle Q\rangle = [Q] \setminus \mathrm{R}$ назовём оболочкой Q. Следующие утверждения очевидны.

1. Для любого $e \in \mathrm{E}$ справедливо равенство $|\langle e\rangle| = 2$.

2. Для любого однородного подмножества $Q \subseteq \mathrm{R}$ оболочки соединений $e \in \mathbf{P}_2(Q)$ попарно не пересекаются и справедливо равенство $\langle Q\rangle = \bigcup\limits_{e\in\mathbf{P}_2(Q)} \langle e\rangle$.

3. Для любых однородного подмножества $Q \subseteq \mathrm{R}$ и грани $F \in \mathfrak{F}^1_{\geqslant 3}(\mathrm{B}^n)$ справедливо равенство $[Q] \cap \mathrm{D}(F) = \langle Q\rangle \cap \mathrm{D}(F)$.

4. Пусть $e \in \mathrm{E}$ и $F \in \mathfrak{F}^1_{\geqslant 3}(\mathrm{B}^n)$. Тогда если $\widetilde{e} = F$, то $\langle e\rangle \subseteq \mathrm{D}(F)$, а если $\widetilde{e} \neq F$, то $\langle e\rangle \cap \mathrm{D}(F) = \varnothing$.

Равенство $[Q] \cap \mathrm{D}(F) = \langle Q\rangle \cap \mathrm{D}(F) = \bigcup\limits_{e\in\mathbf{P}_2(Q)} \langle e\rangle \cap \mathrm{D}(F)$ следует из утверждений 3 и 2. Учитывая, что по утверждению 2 оболочки соединений $e \in \mathbf{P}_2(Q)$ попарно не пересекаются, из утверждений 4 и 1 имеем

$$|[Q] \cap \mathrm{D}(F)| = \sum_{e\in\mathbf{P}_2(Q)} |\langle e\rangle \cap \mathrm{D}(F)| = 2|\{e \in \mathbf{P}_2(Q) \mid \widetilde{e} = F\}|.$$

Лемма 27 доказана.

Теорема 14. *Пусть P — произвольное однородное разбиение множества* R. *Тогда если для некоторой трёхмерной грани $F \in \mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^n)$ существуют два соединения $e_1, e_2 \in \mathrm{E}[2](P)$ такие, что $\widetilde{e}_1 = \widetilde{e}_2 = F$ и e_1, e_2 имеют разные индексы, то множество $\mathrm{D}(F)$ содержит точку самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$.*

Доказательство. Предположим, напротив, что соединения $e_1, e_2 \in \mathrm{E}[2](P)$ такие, что $\widetilde{e}_1 = \widetilde{e}_2 = F$ и e_1, e_2 имеют разные индексы, но множество $\mathrm{D}(F)$ не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$. Тогда из включения $e_1, e_2 \in \mathrm{E}[2](P)$ и равенства $\widetilde{e}_1 = \widetilde{e}_2 = F$ следует, что $e_1, e_2 \in \mathrm{E}(P, F)$. Пусть $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ и $\delta, \sigma \in \{-1, 1\}$ таковы, что $e_1 \in \mathrm{E}^\delta_i(P, F)$ и $e_2 \in \mathrm{E}^\sigma_j(P, F)$. Для этих i, j, δ, σ имеем $\left|\mathrm{E}^\delta_i(P, F)\right| \geqslant 1$ и $\left|\mathrm{E}^\sigma_j(P, F)\right| \geqslant 1$. Следовательно, по лемме 27 элементы s^δ_i, s^σ_j матрицы $\mathbb{S}(P, \mathrm{D}(F)) = \left(s^\delta_i\right)^{\delta=-1,1}_{i=1,\ldots,n}$ удовлетворяют неравенствам $s^\delta_i \geqslant 2$, $s^\sigma_j \geqslant 2$. Поскольку соединения e_1, e_2 имеют разные индексы, то $i \neq j$. Поэтому из определения верхней производной матрицы $\mathbb{S}(P, \mathrm{D}(F))$ по столбцу с номером i получаем

$$\|\mathbb{S}^{(i)}(P, \mathrm{D}(F))\|_1 \geqslant 2\max\left\{s^{-1}_i, s^1_i\right\} + s^\sigma_j \geqslant 2s^\delta_i + s^\sigma_j \geqslant 6.$$

По теореме 7 диаметральное множество $\mathrm{D}(F)$ трёхмерной грани F является сильно симметричным подмножеством $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$. Учитывая, что по нашему предположению множество $\mathrm{D}(F)$ не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$, отсюда по теореме 10 и лемме 13 выводим, что

$$\mathrm{s}(P, \mathrm{D}(F)) + \mathrm{def}(P, \mathrm{D}(F)) \geqslant \|\mathbb{S}^{(i)}(P, \mathrm{D}(F))\|_1 \geqslant 6 > 4 = |\mathrm{D}(F)|.$$

Из этого неравенства и леммы 5 вопреки нашему предположению следует, что множество $\mathrm{D}(F)$ содержит точку самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$. Значит, наше предположение неверно. Теорема 14 доказана.

Двойственной парой трёхмерной грани $F \in \mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^n)$ назовём такую пару соединений $\{e_1, e_2\} \subseteq \mathrm{E}[2]$, что e_1, e_2 имеют равные индексы, противоположные знаки и $\widetilde{e}_1 = \widetilde{e}_2 = F$.

На множестве соединений $\mathrm{E}[2]$ определим бинарное отношение, которое назовём *отношением двойственности*: по определению два соединения $e_1, e_2 \in \mathrm{E}[2]$ связаны отношением двойственности, если пара $\{e_1, e_2\}$ является двойственной парой некоторой трёхмерной грани куба B^n.

Если соединения $e_1, e_2 \in \mathrm{E}[2]$ связаны отношением двойственности, будем говорить, что *соединение e_2 двойственно соединению e_1* и писать $e_2 = e_1^*$.

Лемма 28. *Для любой трёхмерной грани $F \in \mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^n)$ двойственными парами этой грани являются три пары $\{\mathrm{R}_i^{-1}(F),\ \mathrm{R}_i^{1}(F)\}$, $i \in \mathrm{Form}(F)$, и только они.*

Доказательство. По лемме 1 для любой грани $F \in \mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^n)$ среди $2n$ компонент $\mathrm{R}_1^{-1}(F), \ldots, \mathrm{R}_n^{-1}(F), \mathrm{R}_1^{1}(F), \ldots, \mathrm{R}_n^{1}(F)$ множества $\mathrm{R}(F)$ непустыми будут следующие шесть: $\mathrm{R}_i^{\delta}(F)$, $i \in \mathrm{Form}(F)$, $\delta \in \{-1, 1\}$. При этом мощность каждой из этих шести компонент равна 2. Значит, все они являются соединениями куба B^n. Очевидно, что для соединения $e \in \mathrm{E}[2]$ равенство $\widetilde{e} = F$ выполнено тогда и только тогда, когда e совпадает с одной из этих шести компонент. Лемма 28 доказана.

Следующие две леммы являются очевидными следствиями леммы 28.

Лемма 29. *Если для двух различных соединений $e_1, e_2 \in \mathrm{E}[2]$ и трёхмерной грани $F \in \mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^n)$ выполнены равенства $\widetilde{e}_1 = \widetilde{e}_2 = F$ и пара $\{e_1, e_2\}$ не является двойственной парой грани F, то соединения e_1, e_2 имеют разные индексы.*

Лемма 30. *Для любого соединения $e \in \mathrm{E}[2]$ существует единственное двойственное ему соединение $e^* \in \mathrm{E}[2]$ и справедливо равенство $e^{**} = e$.*

Подмножество $A \subseteq \mathrm{E}[2]$ назовём *двойственно независимым подмножеством* множества $\mathrm{E}[2]$, если никакие два соединения $e_1, e_2 \in A$ не связаны отношением двойственности.

Числом двойственной независимости $\mathfrak{B}^*(P)$ произвольного дизъюнктного семейства P однородных подмножеств множества R назовём мощность максимального по мощности двойственно независимого подмножества $A \subseteq \mathrm{E}[2](P)$.

Подгранью грани F куба B^n называется такая грань $U \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$, что $U \subseteq F$. Через $\mathfrak{F}_k(F)$ обозначим множество всех подграней U грани $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ размерности $\dim(U) = k$, $0 \leqslant k \leqslant \dim F$.

Будем говорить, что грань $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ является *критической для однородного разбиения* P множества R, если $\dim(F) \geqslant 3$ и для сужения разбиения P на грань F выполнено неравенство $\mathfrak{B}^*(P \,|\, F) > |\mathfrak{F}_3(F)|$. Трёхмерную грань $F \in \mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^n)$ назовём *тесной для однородного разбиения* P множества R, если множество $\mathrm{D}(F)$ содержит точку самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$.

Теорема 15. *Любая критическая для однородного разбиения P множества* R *грань куба* B^n *содержит тесную для P трёхмерную подгрань.*

Доказательство. Пусть F — произвольная критическая для P грань куба B^n. Рассмотрим такое двойственно независимое подмножество $A \subseteq \mathrm{E}[2](P \,|\, F)$, что выполнено равенство $\mathfrak{B}^*(P \,|\, F) = |A|$. Заметим, что для любого $e \in \mathrm{E}(P \,|\, F)$ имеет место включение $\widetilde{e} \subseteq F$. Поэтому $\widetilde{e} \in \mathfrak{F}_3(F)$ для любого $e \in A$. Отсюда и из неравенства $|A| = \mathfrak{B}^*(P \,|\, F) > |\mathfrak{F}_3(F)|$ следует, что в $\mathfrak{F}_3(F)$ существует такая трёхмерная грань U, а в A найдутся два таких различных соединения e_1, e_2, что выполнены равенства $\widetilde{e}_1 = \widetilde{e}_2 = U$. В силу двойственной независимости множества A пара $\{e_1, e_2\}$ не будет двойственной парой грани U. Поэтому по лемме 29 соединения e_1, e_2 имеют разные индексы. Значит, по теореме 14 множество $\mathrm{D}(U)$ содержит точку самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$, т. е. трёхмерная подгрань $U \in \mathfrak{F}_3(F)$ является тесной для разбиения P. Теорема 15 доказана.

Гиперпарой куба B^n назовём любую (0-1)-пару $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ такую, что $\mathrm{dist}(\alpha, \beta) = n - 1$. Через H обозначим множество всех гиперпар куба B^n и будем называть его *множеством* H *куба* B^n.

Заметим, что если хотя бы одна из четырёхмерных граней куба B^6 является критической для однородного разбиения $P \in \mathcal{K}_3$, то разбиение P неправильно по теореме 15. Если множество H куба B^6 содержит точку самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$ этого разбиения, то P неправильное по определению. Поэтому чтобы доказать неправильность произвольного однородного разбиения $P \in \mathcal{K}_3$, а значит, и терему 3, достаточно доказать следующее утверждение.

Теорема 16. *Если ни одна из четырёхмерных граней куба* B^6 *не является критической для однородного разбиения* $P \in \mathcal{K}_3$ *и множество* H *куба* B^6 *не содержит точек самопересечения гирлянды* $\mathrm{G}(P)$ *этого разбиения, то шестимерная грань куба* B^6 *(т. е. сам куб* B^6*) является критической для* P.

Чтобы доказать теорему 16, нужно для соответствующих разбиений P из класса $\mathcal{K}_3$ доказать неравенство $\mathfrak{B}^*(P) = \mathfrak{B}^*(P \,|\, \mathrm{B}^6) > |\mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^6)|$. Разд. 6–8 посвящены способам нижней оценки величины $\mathfrak{B}^*(P)$. Теорема 16 доказана в разд. 9.

6. О способах получения нижней оценки величины $\mathfrak{B}^*(P)$

Для произвольных подмножества $A \subseteq \mathrm{E}$ и набора $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \{-1, 1\}$ множество $(A)^{\delta_1,\ldots,\delta_n} = A_1^{\delta_1} \cup \cdots \cup A_n^{\delta_n}$ назовём *сегментом* этого подмножества, а набор $\delta_1, \ldots, \delta_n$ — характеристическим вектором сегмента $(A)^{\delta_1,\ldots,\delta_n}$.

Для произвольного множества $A \subseteq \mathrm{E}$ соединение $e \in A$ будем называть *изолированным в* A, если e не связано отношением двойственности ни с каким соединением из A.

Для произвольного дизъюнктного семейства P однородных подмножеств множества R через $\mathrm{EI}(P)$ обозначим множество всех соединений $e \in \mathrm{E}(P)$, изолированных в $\mathrm{E}(P)$.

Гипергранью куба B^n называется грань размерности $n-1$, т. е. любая из $2n$ граней $\mathrm{B}^n{}^{\,0}_{\,1}, \ldots, \mathrm{B}^n{}^{\,0}_{\,n}, \mathrm{B}^n{}^{\,1}_{\,1}, \ldots, \mathrm{B}^n{}^{\,1}_{\,n}$ этого куба. Через $\mathfrak{F}\mathrm{H}(\mathrm{B}^n)$ обозначим множество всех гиперграней куба B^n.

Будем говорить, что соединение $e = \{r_1, r_2\} \in \mathrm{E}$ куба B^n *разделимо по направлению* $k \in \{1, \ldots, n\}$, если один конец этого соединения является (0-1)-ребром грани $\mathrm{B}^n{}^{\,0}_{\,k}$, а другой — (0-1)-ребром грани $\mathrm{B}^n{}^{\,1}_{\,k}$.

Для произвольного подмножества $A \subseteq \mathrm{E}$ и каждого $k = 1, \ldots, n$ множество ${}_kA$ всех разделимых по направлению k соединений $e \in A$ назовём *квазикомпонентой с номером* k множества A.

Заметим, что корректность обозначения ${}_kA_i^\delta$ следует из следующего очевидного утверждения: для любого $A \subseteq \mathrm{E}$ при всех $k, i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$ для множеств $X = {}_kA$ и $Y = A_i^\delta$ справедливо равенство $X_i^\delta = X \cap Y = {}_kY$.

Гиперсоединением куба B^n будем называть любое соединение $e \in \mathrm{E}$ такое, что $\widetilde{e} \in \mathfrak{F}\mathrm{H}(\mathrm{B}^n)$. Через EH обозначим множество всех гиперсоединений куба B^n. Заметим, что $\mathrm{EH} = \mathrm{E}[n-2]$ и при $n = 6$ справедливо равенство $\mathrm{E} = \mathrm{E}[2] \cup \mathrm{EH}$. Для произвольного однородного разбиения P множества R через $\mathrm{EH}(P)$ обозначим множество всех таких $e \in \mathrm{E}(P)$, что $e \in \mathrm{EH}$.

Для произвольного $A \subseteq \mathrm{E}[2]$ множество $(A)^* = \{e^* \mid e \in A\}$ будем называть *двойственным к* A, а множество $\mathrm{V}(A)$ всех (0-1)-рёбер куба B^n, которые являются концами соединений $e \in A$, назовём *носителем* множества A.

Непустое множество $A \subseteq \mathrm{E}[2]$ назовём *полным подмножеством* множества $\mathrm{E}[2]$, если выполнено равенство $A = \mathbf{P_2}(\mathrm{V}(A))$ (другими словами, непустое подмножество $A \subseteq \mathrm{E}[2]$ называется полным, если полным является граф с множеством вершин $\mathrm{V}(A)$ и множеством рёбер A). Полное подмножество $A \subseteq \mathrm{E}[2]$ будем называть *треугольником*, если $|\mathrm{V}(A)| = 3$.

Для набора целых положительных чисел $\overline{\mathrm{z}} = (z_1, \ldots, z_k)$ величины $\|\overline{\mathrm{z}}\|_{\mathrm{C}}$ и $\|\overline{\mathrm{z}}\|_{\mathrm{T}}$ определим формулами $\|\overline{\mathrm{z}}\|_{\mathrm{C}} = \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{z_i}{2}$ и $\|\overline{\mathrm{z}}\|_{\mathrm{T}} = \sum\limits_{i=1}^{k} \lfloor \frac{(z_i-1)^2}{4} \rfloor$.[1)]

Для произвольных $1 \leqslant k \leqslant L$ через $\overline{\mathrm{m}}(k, L)$ обозначим такой целочисленный набор $\overline{\mathrm{z}} = (z_1, \ldots, z_k)$, что $z_1 \geqslant \ldots \geqslant z_k \geqslant 1$, $\sum\limits_{i=1}^{k} z_i = L$ и числа $z_1, \ldots, z_k$ отличаются друг от друга не более чем на 1.

Лемма 31. *Для произвольного однородного разбиения P множества R и любой грани $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ при всех $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \{-1, 1\}$ справедливо неравенство*

$$\mathfrak{B}^*(P \mid F) \geqslant |(\mathrm{E}(P \mid F))^{\delta_1, \ldots, \delta_n}| + |(\mathrm{EI}(P \mid F))^{-\delta_1, \ldots, -\delta_n}| - \sum_{k \geqslant 4} |\mathrm{E}[k](P \mid F)|.$$

Доказательство. По определению сегмента произвольного подмножества $A \subseteq \mathrm{E}$ при любых $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \{-1, 1\}$ справедливо равенство $(A)^{\delta_1, \ldots, \delta_n} \cap (A)^{-\delta_1, \ldots, -\delta_n} = \varnothing$. По определению отношения двойственности для любого $e \in \mathrm{E}[2]$ из $e \in (A)^{\delta_1, \ldots, \delta_n}$ следует $e^* \in (A)^{-\delta_1, \ldots, -\delta_n}$. Поэтому никакие два соединения $e_1, e_2 \in (A)^{\delta_1, \ldots, \delta_n}$ не связаны отношением двойственности. Отсюда в силу определения множества $\mathrm{EI}(P \mid F)$ никакие два соединения $e_1, e_2 \in (\mathrm{E}(P \mid F))^{\delta_1, \ldots, \delta_n} \cup (\mathrm{EI}(P \mid F))^{-\delta_1, \ldots, -\delta_n}$ также не связаны отношением двойственности. Стало быть, множество

$$((\mathrm{E}(P \mid F))^{\delta_1, \ldots, \delta_n} \cup (\mathrm{EI}(P \mid F))^{-\delta_1, \ldots, -\delta_n}) \setminus \bigcup_{k \geqslant 4} \mathrm{E}[k](P \mid F)$$

1) $\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$; $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, не превосходящее x.

является двойственно независимым подмножеством $\mathrm{E}\,[2]\,(P\,|\,F)$. В силу этого утверждение леммы вытекает из очевидного равенства

$$(\mathrm{E}(P))^{\delta_1,\ldots,\delta_n} \cap (\mathrm{EI}(P))^{-\delta_1,\ldots,-\delta_n} = \varnothing$$

и определения числа $\mathfrak{B}^*(P\,|\,F)$. Лемма 31 доказана.

Лемма 32. *Для любого однородного разбиения P множества R с матрицей сложности $\mathbb{L}(P) = \big(\ell_i^\delta\big)_{i=1,\ldots,n}^{\delta=-1,1}$ и любой грани $F \in \mathfrak{F}_{\geqslant 2}(\mathrm{B}^n)$ справедливы соотношения*

$$\big|\mathrm{E}_i^\delta(P\,|\,F)\big| \geqslant \big\|\overline{\mathrm{m}}(\ell_i^\delta, 2^{\dim(F)-2})\big\|_{\mathrm{C}} \quad \text{при } i \in \mathrm{Form}(F),\ \delta \in \{-1,1\},$$

$$\big|\mathrm{E}_i^\delta(P\,|\,F)\big| = 0 \quad \text{при } i \in \mathrm{Dir}(F),\ \delta \in \{-1,1\}.$$

Доказательство. Сужение $P\,|\,F$ обозначим через K. По лемме 2 при $i \in \mathrm{Form}(F)$, $\delta \in \{-1,1\}$ компонента K_i^δ сужения K является разбиением множества $\mathrm{R}_i^\delta(F)$ и справедливы неравенства $1 \leqslant \big|K_i^\delta\big| \leqslant \big|P_i^\delta\big| = \ell_i^\delta$. Отсюда по лемме 26, теоремам 26, 31 из разд. 10 и лемме 1 следует, что

$$\big|\mathrm{E}_i^\delta(P\,|\,F)\big| = \big|\mathrm{E}_i^\delta(K)\big| = \sum_{Q\in K_i^\delta} |\mathbf{P}_2(Q)|$$

$$= \sum_{Q\in K_i^\delta} \binom{|Q|}{2} \geqslant \big\|\overline{\mathrm{m}}\big(\big|K_i^\delta\big|, \big|\mathrm{R}_i^\delta(F)\big|\big)\big\|_{\mathrm{C}} \geqslant \big\|\overline{\mathrm{m}}\big(\ell_i^\delta, 2^{\dim(F)-2}\big)\big\|_{\mathrm{C}}.$$

При $i \in \mathrm{Dir}(F)$, $\delta \in \{-1,1\}$ по лемме 2 имеем $K_i^\delta = \varnothing$. Значит, $\mathrm{E}_i^\delta(K) = \bigcup\limits_{Q\in K_i^\delta} \mathbf{P}_2(Q) = \varnothing$ ввиду леммы 26, поэтому $\big|\mathrm{E}_i^\delta(P\,|\,F)\big| = \big|\mathrm{E}_i^\delta(K)\big| = 0$. Лемма 32 доказана.

Лемма 33. *Для любого дизъюнктного семейства K однородных подмножеств множества R справедливо равенство*

$$\mathrm{EI}(K) = \mathrm{E}(K) \setminus (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*.$$

Доказательство. Из определения множества $\mathrm{EI}(K)$ непосредственно следует равенство

$$\mathrm{EI}(K) = \mathrm{E}(K) \setminus \{e \in \mathrm{E}\,[2]\,(K) \mid e^* \in \mathrm{E}\,[2]\,(K)\}.$$

Из включения $(\mathrm{E}\,[2]\,(K))^* \subseteq \mathrm{E}\,[2]$ и выполненного по лемме 30 равенства $e^{**} = e$ получаем

$$\{e \in \mathrm{E}\,[2]\,(K) \mid e^* \in \mathrm{E}\,[2]\,(K)\} = \mathrm{E}\,[2]\,(K) \cap (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*.$$

Учитывая, что

$$\mathrm{E}\,[2]\,(K) \cap (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^* = \mathrm{E}(K) \cap (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*,$$

имеем $\mathrm{EI}(K) = \mathrm{E}(K) \setminus (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*$. Лемма 33 доказана.

Лемма 34. *Если для однородного разбиения P множества R с матрицей сложности $\mathbb{L}(P) = \big(\ell_i^\delta\big)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$ и для грани $F \in \mathfrak{F}_{\geqslant 2}(\mathrm{B}^n)$ множество $(\mathrm{E}\,[2]\,(P\,|\,F))^*$ не содержит треугольников, то справедливы соотношения*

$$\big|\mathrm{EI}_i^\delta(P\,|\,F)\big| \geqslant \big\|\overline{\mathrm{m}}(\ell_i^\delta, 2^{\dim(F)-2})\big\|_{\mathrm{T}} \quad \text{при } i \in \mathrm{Form}(F),\ \delta \in \{-1,1\},$$

$$\big|\mathrm{EI}_i^\delta(P\,|\,F)\big| = 0 \quad \text{при } i \in \mathrm{Dir}(F),\ \delta \in \{-1,1\}.$$

Доказательство. Из леммы 33 вытекает, что для дизъюнктного семейства $K = P\,|\,F$ однородных подмножеств множества R справедливо равенство $\mathrm{EI}(K) = \mathrm{E}(K) \setminus (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*$. По лемме 26 из этого равенства при любых $i \in \{1,\dots,n\}$, $\delta \in \{-1,1\}$ следует, что

$$\begin{aligned}\big|\mathrm{EI}_i^\delta(K)\big| = \big|\mathrm{E}_i^\delta(K) \setminus (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*\big| &= \sum_{Q \in K_i^\delta} |\mathbf{P}_2(Q) \setminus (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*| \\ &= \sum_{Q \in K_i^\delta} |\mathbf{P}_2(Q) \setminus (\mathbf{P}_2(Q) \cap (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*)|.\end{aligned}$$

Заметим, что для всех $Q \in K_i^\delta$ пара множеств $(Q,\, \mathbf{P}_2(Q) \cap (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*)$ представляет собой не что иное, как граф с множеством вершин Q и множеством рёбер $\mathbf{P}_2(Q) \cap (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*$. Известная теорема Турана [12, 17] утверждает, что наибольшее число рёбер у графов, имеющих q вершин и не содержащих треугольников, равно $\lfloor q^2/4 \rfloor$. Значит, если множество $(\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*$ не содержит треугольников, то справедливы неравенства

$$|\mathbf{P}_2(Q) \cap (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*| \leqslant \left\lfloor \frac{|Q|^2}{4} \right\rfloor,$$

$$|\mathbf{P}_2(Q) \setminus (\mathbf{P}_2(Q) \cap (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*)| \geqslant \left\lfloor \frac{(|Q|-1)^2}{4} \right\rfloor.$$

Отсюда при $i \in \mathrm{Form}(F)$, $\delta \in \{-1,1\}$ с учётом того, что по лемме 2 компонента K_i^δ сужения K является разбиением множества $\mathrm{R}_i^\delta(F)$ и справедливы неравенства $1 \leqslant \big|K_i^\delta\big| \leqslant \big|P_i^\delta\big| = \ell_i^\delta$, по теоремам 26, 31 из разд. 10

и лемме 1 получаем

$$\bigl|\mathrm{EI}_i^{\delta}(P\,|\,F)\bigr| = \bigl|\mathrm{EI}_i^{\delta}(K)\bigr| \geqslant \sum_{Q\in K_i^{\delta}} \left\lfloor \frac{(|Q|-1)^2}{4} \right\rfloor$$
$$\geqslant \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\bigl|K_i^{\delta}\bigr|, \bigl|\mathrm{R}_i^{\delta}(F)\bigr|\bigr)\bigr\|_{\mathrm{T}} \geqslant \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\ell_i^{\delta}, 2^{\dim(F)-2}\bigr)\bigr\|_{\mathrm{T}}.$$

При $i \in \mathrm{Dir}(F)$, $\delta \in \{-1, 1\}$ по лемме 32 имеем $\bigl|\mathrm{E}_i^{\delta}(P\,|\,F)\bigr| = 0$. Значит, из равенства

$$\mathrm{EI}_i^{\delta}(P\,|\,F) = \mathrm{E}_i^{\delta}(P\,|\,F) \setminus (\mathrm{E}[2]\,(P\,|\,F))^*$$

следует $\bigl|\mathrm{EI}_i^{\delta}(P\,|\,F)\bigr| = 0$. Лемма 34 доказана.

Теорема 17. *При $n = 6$ для любого однородного разбиения P множества R при любых $\delta_1, \ldots, \delta_6 \in \{-1, 1\}$ справедливо неравенство*

$$\mathfrak{B}^*(P) \geqslant |(\mathrm{E}(P))^{\delta_1,\ldots,\delta_6}| + |(\mathrm{EI}(P))^{-\delta_1,\ldots,-\delta_6}| - |\mathrm{EH}(P)|.$$

Доказательство. Заметим, что при $n = 6$ для любого однородного разбиения P множества R справедливо $P = P\,|\,\mathrm{B}^6$. Теорема 17 следует из леммы 31 и выполненных при $n = 6$ равенств $\mathrm{EH}(P) = \mathrm{E}[4]\,(P)$, $\mathrm{E}[5]\,(P) = \mathrm{E}[6]\,(P) = \cdots = \varnothing$. Теорема 17 доказана.

Теорема 18. *При $n = 6$ для любого однородного разбиения P множества R с матрицей сложности $\mathbb{L}(P) = \bigl(\ell_i^{\delta}\bigr)_{i=1,\ldots,6}^{\delta=-1,1}$ при любых $\delta_1, \ldots, \delta_6 \in \{-1, 1\}$ справедливо неравенство $|(\mathrm{E}(P))^{\delta_1,\ldots,\delta_6}| \geqslant \sum\limits_{i=1}^{6} \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\ell_i^{\delta_i}, 16\bigr)\bigr\|_{\mathrm{C}}$.*

Доказательство. Компоненты $\mathrm{E}_1^{\delta_1}(P\,|\,\mathrm{B}^6), \ldots, \mathrm{E}_6^{\delta_6}(P\,|\,\mathrm{B}^6)$ множества $\mathrm{E}(P) = \mathrm{E}(P\,|\,\mathrm{B}^6)$ попарно не пересекаются и по определению выполнено равенство

$$(\mathrm{E}(P\,|\,\mathrm{B}^6))^{\delta_1,\ldots,\delta_6} = \mathrm{E}_1^{\delta_1}(P\,|\,\mathrm{B}^6) \cup \cdots \cup \mathrm{E}_6^{\delta_6}(P\,|\,\mathrm{B}^6),$$

а значит, по лемме 32 имеем

$$|(\mathrm{E}(P))^{\delta_1,\ldots,\delta_6}| = |(\mathrm{E}(P\,|\,\mathrm{B}^6))^{\delta_1,\ldots,\delta_6}|$$
$$= \sum_{i=1}^{6} \bigl|\mathrm{E}_i^{\delta_i}(P\,|\,\mathrm{B}^6)\bigr| = \sum_{i\in\mathrm{Form}(\mathrm{B}^6)} \bigl|\mathrm{E}_i^{\delta_i}(P\,|\,\mathrm{B}^6)\bigr|$$
$$\geqslant \sum_{i\in\mathrm{Form}(\mathrm{B}^6)} \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\ell_i^{\delta_i}, 2^{6-2}\bigr)\bigr\|_{\mathrm{C}} = \sum_{i=1}^{6} \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\ell_i^{\delta_i}, 16\bigr)\bigr\|_{\mathrm{C}}.$$

Теорема 18 доказана.

Теорема 19. *При $n > 4$ для любого однородного разбиения P множества* R *при каждом $k = 1, \dots, n$ и любых $\delta_1, \dots, \delta_n \in \{-1, 1\}$ справедливо неравенство*

$$|(\mathrm{EI}(P))^{\delta_1,\dots,\delta_n}| \geqslant \bigl|\bigl(\mathrm{EI}\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr)\bigr)^{\delta_1,\dots,\delta_n}\bigr| + |(\mathrm{EI}(P \mid \mathrm{B}^n{}^{1}_{k}))^{\delta_1,\dots,\delta_n}| + |({}_k\mathrm{EH}(P))^{\delta_1,\dots,\delta_n}|.$$

Доказательство. Непосредственно из определений следует, что при каждом $k = 1, \dots, n$ множества $\mathrm{EI}\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr)$, $\mathrm{EI}\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{1}_{k}\bigr)$, ${}_k\mathrm{EH}(P)$ попарно не пересекаются. Таким образом, для доказательства теоремы 19 достаточно доказать три включения

$$\mathrm{EI}(P) \supseteq \mathrm{EI}\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr), \quad \mathrm{EI}(P) \supseteq \mathrm{EI}\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{1}_{k}\bigr), \quad \mathrm{EI}(P) \supseteq {}_k\mathrm{EH}(P).$$

При $n > 4$ множество $\mathrm{EH}(P) = \mathrm{E}\,[n-2]\,(P)$ либо пусто, либо состоит из соединений длины не меньше 4, поэтому ${}_k\mathrm{EH}(P) \cap \mathrm{E}\,[2] = \varnothing$, и третье включение очевидно.

Докажем первое включение (второе доказывается аналогично). Для этого сначала докажем включение

$$\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr) \cap (\mathrm{E}\,[2]\,(P))^* \subseteq \mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr) \cap (\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr))^*. \qquad (3)$$

Рассмотрим произвольное соединение $e = \{r_1, r_2\}$, принадлежащее левой части включения (3). Из того, что $e \in \mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr)$, следует, что $\{r_1, r_2\} \subseteq \mathrm{R}\bigl(\mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr)$, поэтому $\widetilde{e} \subseteq \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}$. Значит, $e^* \subseteq \mathrm{R}(\mathrm{B}^n{}^{0}_{k})$ по определению отношения двойственности и лемме 28. Кроме того, по лемме 30 $e \in (\mathrm{E}\,[2]\,(P))^*$ влечёт $e^* \in ((\mathrm{E}\,[2]\,(P))^*)^* = \mathrm{E}\,[2]\,(P)$. По определению в силу того, что $e^* \subseteq \mathrm{R}\bigl(\mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr)$ и $e^* \in \mathrm{E}\,[2]\,(P)$, имеем $e^* \in \mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr)$. Тем самым $e = e^{**} \in \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr)\bigr)^*$. Этим включение (3) доказано.

Из леммы 33 и включения (3) следует, что

$$\begin{aligned}
\mathrm{EI}(P) = \mathrm{E}(P) \setminus (\mathrm{E}\,[2]\,(P))^* &\supseteq \mathrm{E}\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr) \setminus (\mathrm{E}\,[2]\,(P))^* \\
&= \mathrm{E}\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr) \cap (\mathrm{E}\,[2]\,(P))^*\bigr) \\
&\supseteq \mathrm{E}\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr) \cap (\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr))^*\bigr) \\
&= \mathrm{E}\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P \mid \mathrm{B}^n{}^{0}_{k}\bigr)\bigr)^* = \mathrm{EI}(P).
\end{aligned}$$

Первое включение доказано. Теорема 19 доказана.

7. О полных подмножествах множества $\mathrm{E}[2]$

Для произвольных $i \in \{1, \ldots, n\}$ и (0-1)-ребра $r \in \mathrm{R}_i$ множество $\mathrm{Sp(r)} = \{u \in \mathrm{R}_i \mid \rho(r, u) = 1\}$ назовём 1-*сферой* с центром r. Полное подмножество $A \subseteq \mathrm{E}[2]$ назовём 1-*сферическим*, если существует (0-1)-ребро $r \in \mathrm{R}$ такое, что выполнено включение $\mathrm{V}(A) \subseteq \mathrm{Sp(r)}$.

Полное подмножество A множества $\mathrm{E}[2]$ будем называть *кубическим*, если существуют грань $F \in \mathfrak{F}_4(\mathrm{B}^n)$, $i \in \mathrm{Form}(F)$ и $\delta \in \{-1, 1\}$ такие, что выполнено равенство $\mathrm{V}(A) = \mathrm{R}_i^\delta(F)$.

Для произвольного $A \subseteq \mathrm{E}[2]$ через $\widetilde{A}$ обозначим минимальную по включению грань куба B^n, содержащую концы всех (0-1)-рёбер из множества $\mathrm{V}(A)$.

Непустое подмножество $A \subseteq \mathrm{E}[2]$ будем называть *звездой*, если существует (0-1)-ребро $r \in \mathrm{V}(A)$ такое, что r является концом каждого соединения $e \in A$ (другими словами, непустое подмножество $A \subseteq \mathrm{E}[2]$ называется звездой, если звездой является граф с множеством вершин $\mathrm{V}(A)$ и множеством рёбер A).

Лемма 35. *Любое полное подмножество множества* $\mathrm{E}[2]$ *является либо* 1-*сферическим, либо кубическим.*

Доказательство. Пусть A — произвольное полное подмножество множества $\mathrm{E}[2]$. Непосредственно из определений следует, что носитель $\mathrm{V}(A)$ этого множества является однородным подмножеством R. Поэтому для множества $\mathrm{N}^1(\mathrm{V}(A))$ всех нечётных концов (0-1)-рёбер из $\mathrm{V}(A)$ справедливо равенство $|\mathrm{N}^1(\mathrm{V}(A))| = |\mathrm{V}(A)|$. Без ограничения общности считаем, что $\mathrm{V}(A) \subseteq \mathrm{R}_n^{-1}$. В множестве $\mathrm{N}^1(\mathrm{V}(A))$ произвольным образом выберем три (если $|\mathrm{N}^1(\mathrm{V}(A))| = 2$, то две) различные вершины $\beta^1, \beta^2, \beta^3$. Соответствующие им (0-1)-рёбра (т. е. (0-1)-рёбра с концами $\beta^1, \beta^2, \beta^3$) из множества $\mathrm{V}(A)$ обозначим через r^1, r^2, r^3.

Из того, что $A = \mathbf{P}_2(\mathrm{V}(A))$ и $A \subseteq \mathrm{E}[2]$, следует, что для любых двух различных $r, q \in \mathrm{V}(A)$ справедливо равенство $\rho(r, q) = 2$. Тем самым для любых двух различных $\beta, \gamma \in \mathrm{N}^1(\mathrm{V}(A))$ имеет место равенство $\mathrm{dist}(\beta, \gamma) = 2$. Значит, найдётся такая (чётная) вершина α^0 куба B^n, что $\mathrm{dist}(\alpha^0, \beta^1) = \mathrm{dist}(\alpha^0, \beta^2) = \mathrm{dist}(\alpha^0, \beta^3) = 1$. Без ограничения общности будем считать, что

$$\alpha^0 = (0, \ldots, 0), \quad \beta^1 = (1, 0, \ldots, 0),$$
$$\beta^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \beta^3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0).$$

Через r^0 обозначим (0-1)-ребро из R_n^1 с концом α^0. Очевидно, что $r^1, r^2, r^3 \in \mathrm{Sp(r^0)}$ для (0-1)-рёбер r^0, r^1, r^2, r^3.

Возможны два случая: $\mathrm{V}(A) \subseteq \mathrm{Sp}(\mathrm{r}^0)$ и $\mathrm{V}(A) \nsubseteq \mathrm{Sp}(\mathrm{r}^0)$. В первом случае множество A по определению является 1-сферическим.

Рассмотрим второй случай. Через r обозначим какое-нибудь (0-1)-ребро из $\mathrm{V}(A)$, которое не принадлежит $\mathrm{Sp}(\mathrm{r}^0)$, а через β — его нечётный конец. Из $r \in \mathrm{V}(A)$ следует $\beta \in \mathrm{N}^1(\mathrm{V}(A))$, поэтому

$$\mathrm{dist}(\beta, \beta^1) = \mathrm{dist}(\beta, \beta^2) = \mathrm{dist}(\beta, \beta^3) = 2.$$

Из того, что r не принадлежит $\mathrm{Sp}(\mathrm{r}^0)$, следует, что $\mathrm{dist}(\beta, \alpha^0) > 1$. Очевидно, что существует единственная удовлетворяющая этим условиям вершина $\beta \in \mathrm{B}^n$, а именно $\beta = (1, 1, 1, 0, \ldots, 0)$. Кроме того, очевидно, что не существует такой вершины $\gamma \in \mathrm{B}^n$, что

$$\mathrm{dist}(\gamma, \beta^1) = \mathrm{dist}(\gamma, \beta^2) = \mathrm{dist}(\gamma, \beta^3) = \mathrm{dist}(\gamma, \beta) = 2,$$

стало быть, $\mathrm{N}^1(\mathrm{V}(A)) = \{\beta^1, \beta^2, \beta^3, \beta\}$ и $\mathrm{V}(A) = \{r^1, r^2, r^3, r\}$. Из этих равенств и того, что $\mathrm{V}(A) \subseteq \mathrm{R}_n^{-1}$, следует, что $\mathrm{V}(A) = \mathrm{R}_n^{-1}(F)$, где F — четырёхмерная грань куба B^n такая, что $\mathrm{Form}(F) = \{1, 2, 3, n\}$ и $\alpha^0 \in F$. По определению это означает, что во втором случае множество A кубическое. Лемма 35 доказана.

Лемма 36. *Для любого 1-сферического полного подмножества A множества $\mathrm{E}[2]$ справедливо равенство $\dim(\widetilde{A}) = |\mathrm{V}(A)| + 1$.*

Доказательство очевидно.

Лемма 37. *Для любого 1-сферического полного подмножества A множества $\mathrm{E}[2]$ двойственное ему множество $(A)^*$ является звездой.*

Доказательство. Достаточно доказать следующее утверждение: если 1-сфера $\mathrm{Sp}(\mathrm{r})$ содержит оба конца соединения $e \in \mathrm{E}[2]$, то центр r этой 1-сферы является концом соединения e^*. Справедливость этого утверждения вытекает из определения отношения двойственности, леммы 28 и следующего очевидного утверждения: для любой трёхмерной грани $F \in \mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^n)$ и любых $i \in \mathrm{Form}(F)$, $\delta \in \{-1, 1\}$ существуют ровно две 1-сферы, содержащие оба (0-1)-ребра из множества $\mathrm{R}_i^{\delta}(F)$; центрами этих 1-сфер являются (0-1)-ребра из множества $\mathrm{R}_i^{-\delta}(F)$. Лемма 37 доказана.

Лемма 38. *Для любой звезды $A \subseteq \mathrm{E}[2]$ существуют такие $i \in \mathrm{Form}(\widetilde{A})$ и $\delta \in \{-1, 1\}$, что $\mathrm{V}(A) \subseteq \mathrm{R}_i^{\delta}(\widetilde{A})$.*

Доказательство. Непосредственно из определений следует, что носитель $\mathrm{V}(A)$ любой звезды $A \subseteq \mathrm{E}[2]$ является однородным подмножеством множества R. Поэтому существуют $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $\delta \in \{-1, 1\}$ такие, что $\mathrm{V}(A) \subseteq \mathrm{R}_i^\delta(\widetilde{A})$. Кроме того, поскольку $A \neq \varnothing$, имеем $\mathrm{V}(A) \neq \varnothing$. Значит, $i \in \mathrm{Form}(\widetilde{A})$ по лемме 1. Лемма 38 доказана.

Лемма 39. *Для любого подмножества* $A \subseteq \mathrm{E}\,\mathtt{[2]}$ *справедливо равенство* $\widetilde{(A)^*} = \widetilde{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{F}(A) = \{\widetilde{e} \mid e \in A\}$ и $\widetilde{\mathrm{F}(A)}$ — минимальная по включению грань куба B^n, содержащая все грани из множества $\mathrm{F}(A)$. Очевидно, что $\widetilde{A} = \widetilde{\mathrm{F}(A)}$. По лемме 28 для любого $A \subseteq \mathrm{E}\,\mathtt{[2]}$ справедливо равенство $\mathrm{F}((A)^*) = \mathrm{F}(A)$, поэтому $\widetilde{(A)^*} = \widetilde{\mathrm{F}((A)^*)} = \widetilde{\mathrm{F}(A)} = \widetilde{A}$. Лемма 39 доказана.

Теорема 20. *Для любого однородного разбиения* P *множества* R *и любого треугольника* $T \subseteq (\mathrm{E}\,\mathtt{[2]}\,(P))^*$ *справедливо* $\dim(\widetilde{T}) = 4$ *и среди компонент сужения* $P\,|\,\widetilde{T}$ *существует компонента мощности* 1.

Доказательство. По лемме 1 для любого кубического полного подмножества $A \subseteq \mathrm{E}\,\mathtt{[2]}$ справедливо равенство $|\mathrm{V}(A)| = 4$. Значит, из леммы 35 и неравенства $|\mathrm{V}(T)| \neq 4$ вытекает, что треугольник T будет 1-сферическим полным подмножеством $\mathrm{E}\,\mathtt{[2]}$. Тем самым равенство $\dim(\widetilde{T}) = 4$ является следствием леммы 36.

Кроме того, по лемме 37 множество $(T)^*$ — звезда. Значит, во-первых, в силу лемм 38 и 39 существуют $i \in \mathrm{Form}(\widetilde{T})$, $\delta \in \{-1, 1\}$ такие, что $\mathrm{V}((T)^*) \subseteq \mathrm{R}_i^\delta(\widetilde{T})$. Для этих i, δ по лемме 1 справедливо равенство $|\mathrm{R}_i^\delta(\widetilde{T})| = 4$. Во-вторых, из леммы 30 и включения $T \subseteq (\mathrm{E}\,\mathtt{[2]}\,(P))^*$ получаем $|(T)^*| = |T| = 3$ и $(T)^* \subseteq ((\mathrm{E}\,\mathtt{[2]}\,(P))^*)^* = \mathrm{E}\,\mathtt{[2]}\,(P)$. Это означает, что множество $(T)^*$ состоит из трёх различных имеющих общий конец соединений куба B^n, порождённых разбиением P. Поэтому справедливо равенство $|\mathrm{V}((T)^*)| = 4 = \left|\mathrm{R}_i^\delta(\widetilde{T})\right|$ и существует блок Q разбиения P такой, что $\mathrm{V}((T)^*) \subseteq Q$. Отсюда $\mathrm{V}((T)^*) = \mathrm{R}_i^\delta(\widetilde{T})$ и, следовательно, $Q \cap \mathrm{R}(\widetilde{T}) = \mathrm{R}_i^\delta(\widetilde{T})$. Значит, компонента K_i^δ сужения $K = P\,|\,\widetilde{T}$, которая по лемме 2 является разбиением множества $\mathrm{R}_i^\delta(\widetilde{T})$, состоит из одного блока $\mathrm{R}_i^\delta(\widetilde{T})$, т. е. имеет мощность 1. Теорема 20 доказана.

Лемма 40. *Для любого однородного разбиения* P *множества* R *и любой четырёхмерной грани* $F \in \mathfrak{F}_4(\mathrm{B}^n)$ *при всех* $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \{-1, 1\}$ *справедливо неравенство* $\mathfrak{B}^*(P\,|\,F) \geqslant |(\mathrm{E}(P\,|\,F))^{\delta_1,\ldots,\delta_n}|$.

Доказательство. Очевидно, что для любой грани $F \in \mathfrak{F}_4(\mathrm{B}^n)$ при $k \geqslant 4$ справедливо равенство $\mathrm{E}\,\mathtt{[}k\mathtt{]}\,(P\,|\,F) = \varnothing$, тем самым лемма 40 является следствием леммы 31. Лемма 40 доказана.

Лемма 41. *Если мощность хотя бы одной из компонент сужения $P\,|\,F$ однородного разбиения P множества* R *на четырёхмерную грань $F \in \mathfrak{F}_4(\mathrm{B}^n)$ равна 1 и в каждом столбце матрицы $\mathbb{L}(P)$ с номером из множества $\mathrm{Form}(F)$ имеется элемент, не превосходящий 3, то грань F является критической для разбиения P.*

Доказательство. Если при некоторых $i \in \{1,\dots,n\}$, $\delta \in \{-1,1\}$ мощность компоненты K_i^δ сужения $K = P\,|\,F$ равна 1, то $i \in \mathrm{Form}(F)$ по лемме 2. Пусть $\mathrm{Form}(F) = \{h,p,q,r\}$ и $h<p<q<r$. Без ограничения общности получаем $\left|K_h^1\right| = 1$. В силу того, что по лемме 2 компонента K_h^1 сужения $K = P\,|\,F$ является разбиением множества $\mathrm{R}_h^1(F)$, разбиение K_h^1 имеет единственный блок $\mathrm{R}_h^1(F)$. Поэтому из лемм 26 и 1 следует, что

$$\left|\mathrm{E}_h^1(P\,|\,F)\right| = \left|\mathrm{E}_h^1(K)\right| = \sum_{Q\in K_h^1} |\mathbf{P}_2(Q)| = \left|\mathbf{P}_2\big(\mathrm{R}_h^1(F)\big)\right| = \binom{4}{2} = 6.$$

Без ограничения общности считаем, что элементами, не превосходящими 3, в столбцах матрицы $\mathbb{L}(P) = \big(\ell_i^\delta\big)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$ с номерами p, q, r являются ℓ_p^1, ℓ_q^1, ℓ_r^1. Зафиксируем произвольный набор $\delta_1,\dots,\delta_n \in \{-1,1\}$ такой, что $\delta_h = \delta_p = \delta_q = \delta_r = 1$. В силу лемм 40 и 32, равенства $\left|\mathrm{E}_h^1(P\,|\,F)\right| = 6$, леммы 1 и теоремы 31 имеем

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}^*(P\,|\,F) &\geqslant |(\mathrm{E}(P\,|\,F))^{\delta_1,\dots,\delta_n}| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left|\mathrm{E}_i^{\delta_i}(P\,|\,F)\right| = \sum_{i\in\mathrm{Form}(F)} \left|\mathrm{E}_i^{\delta_i}(P\,|\,F)\right| \\
&= \left|\mathrm{E}_h^1(P\,|\,F)\right| + \left|\mathrm{E}_p^1(P\,|\,F)\right| + \left|\mathrm{E}_q^1(P\,|\,F)\right| + \left|\mathrm{E}_r^1(P\,|\,F)\right| \\
&\geqslant 6 + \left\|\overline{\mathrm{m}}\big(\ell_p^1, 2^{4-2}\big)\right\|_{\mathrm{C}} + \left\|\overline{\mathrm{m}}\big(\ell_q^1, 2^{4-2}\big)\right\|_{\mathrm{C}} + \left\|\overline{\mathrm{m}}\big(\ell_r^1, 2^{4-2}\big)\right\|_{\mathrm{C}} \\
&\geqslant 6 + 3\cdot\|\overline{\mathrm{m}}(3,4)\|_{\mathrm{C}}.
\end{aligned}$$

Из равенства $\overline{\mathrm{m}}(3,4) = (2,1,1)$ получаем $\|\overline{\mathrm{m}}(3,4)\|_{\mathrm{C}} = \binom{2}{2} + \binom{1}{2} + \binom{1}{2} = 1$, поэтому $\mathfrak{B}^*(P\,|\,F) \geqslant 9 > 8 = |\mathfrak{F}_3(F)|$. Лемма 41 доказана.

Лемма 42. *Если ни одна из четырёхмерных граней куба B^n не является критической для однородного разбиения P множества* R *и для некоторой грани $F \in \mathfrak{F}_{\geqslant 4}(\mathrm{B}^n)$ в каждом столбце матрицы $\mathbb{L}(P)$ с номером из множества $\mathrm{Form}(F)$ имеется элемент, не превосходящий 3, то множество $(\mathrm{E}\,[2]\,(P\,|\,F))^*$ не содержит треугольников.*

Доказательство. От противного. Предположим, что треугольник $T \subseteq (\mathrm{E}\,[2]\,(P\,|\,F))^*$ существует. Тогда из включений $T \subseteq (\mathrm{E}\,[2]\,(P\,|\,F))^* \subseteq (\mathrm{E}\,[2]\,(P))^*$ и теоремы 20 следует, что грань $\widetilde{T}$ имеет размерность 4 и среди компонент сужения $P\,|\,\widetilde{T}$ существует компонента мощности 1. Кроме того, поскольку $(T)^* \subseteq ((\mathrm{E}\,[2]\,(P\,|\,F))^*)^* = \mathrm{E}\,[2]\,(P\,|\,F)$, получаем $\widetilde{(T)^*} \subseteq F$. По лемме 39 имеем $\widetilde{(T)^*} = \widetilde{T}$, поэтому $\widetilde{T} \subseteq F$ и $\mathrm{Form}(\widetilde{T}) \subseteq \mathrm{Form}(F)$. По условию леммы последнее включение означает, что в каждом столбце матрицы $\mathbb{L}(P)$ с номером из множества $\mathrm{Form}(\widetilde{T})$ имеется элемент, не превосходящий 3. Отсюда ввиду леммы 41 грань $\widetilde{T}$ куба B^n критическая для разбиения P. Это противоречит тому, что ни одна из четырёхмерных граней куба B^n не является критической для P. Значит, наше предположение неверно. Лемма 42 доказана.

Теорема 21. *Если ни одна из четырёхмерных граней куба* B^6 *не является критической для однородного разбиения* $P \in \mathcal{K}_3^0$ *с матрицей сложности* $\mathbb{L}(P) = \big(\ell_i^\delta\big)_{i=1,\ldots,6}^{\delta=-1,1}$, *то при любых* $\delta_1,\ldots,\delta_6 \in \{-1,1\}$ *справедливо неравенство* $\big|(\mathrm{EI}(P))^{\delta_1,\ldots,\delta_6}\big| \geqslant \left\|\overline{\mathrm{m}}\left(\sum\limits_{i=1}^{6}\ell_i^{\delta_i}, 96\right)\right\|_{\mathrm{T}}$.

Доказательство. Пусть P — произвольное разбиение из класса $\mathcal{K}_3^0$. По определению $\mathcal{K}_3^0$ в каждом столбце матрицы $\mathbb{L}(P)$ имеется тройка. Поэтому в каждом столбце матрицы $\mathbb{L}(P)$ с номером из множества $\mathrm{Form}(\mathrm{B}^6) = \{1,\ldots,6\}$ имеется элемент, не превосходящий 3. Значит, если ни одна из четырёхмерных граней куба B^6 не является критической для P, то по лемме 42 множество $(\mathrm{E}\,[2]\,(P\,|\,\mathrm{B}^6))^*$ не содержит треугольников. Следовательно, по лемме 34 при любых $i \in \{1,\ldots,6\}$, $\delta \in \{-1,1\}$ справедливо неравенство $\big|\mathrm{EI}_i^\delta(P\,|\,\mathrm{B}^6)\big| \geqslant \big\|\overline{\mathrm{m}}\big(\ell_i^\delta, 16\big)\big\|_{\mathrm{T}}$. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{6}\|\overline{\mathrm{m}}(\ell_i^{\delta_i}, 16)\|_{\mathrm{T}} \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(\sum_{i=1}^{6}\ell_i^{\delta_i}, 6\cdot 16)\|_{\mathrm{T}}$$

по следствию теоремы 26, поэтому

$$\begin{aligned}|(\mathrm{EI}(P))^{\delta_1,\ldots,\delta_6}| &= |(\mathrm{EI}(P\,|\,\mathrm{B}^6))^{\delta_1,\ldots,\delta_6}| = \sum_{i=1}^{6}\big|\mathrm{EI}_i^{\delta_i}(P\,|\,\mathrm{B}^6)\big| \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{6}\big\|\overline{\mathrm{m}}\big(\ell_i^{\delta_i}, 16\big)\big\|_{\mathrm{T}} \geqslant \left\|\overline{\mathrm{m}}\left(\sum_{i=1}^{6}\ell_i^{\delta_i}, 16\cdot 6\right)\right\|_{\mathrm{T}} = \left\|\overline{\mathrm{m}}\left(\sum_{i=1}^{6}\ell_i^{\delta_i}, 96\right)\right\|_{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

Теорема 21 доказана.

Теорема 22. *Если при $k \in \{1,\dots,6\}$ ни одна из четырёхмерных граней куба B^6 не является критической для однородного разбиения $P \in \mathcal{K}_3^1(k)$, то при любых $\sigma \in \{0,1\}$, $\delta_1,\dots,\delta_6 \in \{-1,1\}$ справедливо неравенство* $\big|\big(\mathrm{EI}\big(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\big)\big)^{\delta_1,\dots,\delta_6}\big| \geqslant 10$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение $P \in \mathcal{K}_3^1(k)$. По определению класса $\mathcal{K}_3^1(k)$ все элементы матрицы $\mathbb{L}(P) = \big(\ell_i^{\delta}\big)_{i=1,\dots,6}^{\delta=-1,1}$, расположенные в столбцах с номерами из множества $\{1,\dots,6\}\setminus\{k\}$, равны 3. Поэтому в каждом столбце матрицы $\mathbb{L}(P)$ с номером из множества $\mathrm{Form}\big(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\big) = \{1,\dots,6\} \setminus \{k\}$ имеется элемент, не превосходящий 3. Значит, если ни одна из четырёхмерных граней куба B^6 не является критической для P, то по лемме 42 множество $\big(\mathrm{E}\,[2]\,\big(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\big)\big)^*$ не содержит треугольников. Следовательно, по лемме 34 при любых $i \in \{1,\dots,6\} \setminus \{k\}$, $\delta \in \{-1,1\}$ справедливо неравенство $\big|\mathrm{EI}_i^{\delta}\big(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\big)\big| \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(3,8)\|_{\mathrm{T}}$. Кроме того, поскольку $k \in \mathrm{Dir}(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k})$, по лемме 34 справедливы равенства $\big|\mathrm{EI}_k^{-1}\big(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\big)\big| = \big|\mathrm{EI}_k^{1}\big(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\big)\big| = 0$, откуда следует, что

$$\big|\big(\mathrm{EI}\big(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\big)\big)^{\delta_1,\dots,\delta_6}\big| = \sum_{i \in \{1,\dots,6\}\setminus\{k\}} \big|\mathrm{EI}_i^{\delta_i}\big(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\big)\big| \geqslant 5 \cdot \|\overline{\mathrm{m}}(3,8)\|_{\mathrm{T}}.$$

Из того, что $\overline{\mathrm{m}}(3,8) = (3,3,2)$, вытекает, что $\|\overline{\mathrm{m}}(3,8)\|_{\mathrm{T}} = \lfloor \frac{2^2}{4} \rfloor + \lfloor \frac{2^2}{4} \rfloor + \lfloor \frac{1^2}{4} \rfloor = 2$. Поэтому $\big|\big(\mathrm{EI}\big(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\big)\big)^{\delta_1,\dots,\delta_6}\big| \geqslant 5 \cdot \|\overline{\mathrm{m}}(3,8)\|_{\mathrm{T}} = 10$. Теорема 22 доказана.

Лемма 43. *Если подмножество $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$ однородного разбиения P множества R, то справедливо равенство* $\mathrm{def}(P, M) = |M| - \|\mathbb{S}(P, M)\|_1$.

Доказательство. Если подмножество $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$, то $|\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap M| = \mathrm{s}(P, M)$ по определению площади $\mathrm{s}(P, M)$, значит,

$$\mathrm{def}(P, M) = |M| - |\widehat{\mathrm{G}}(P) \cap M| = |M| - \mathrm{s}(P, M).$$

Осталось заметить, что по лемме 21 справедливо равенство $\mathrm{s}(P, M) = \|\mathbb{S}(P, M)\|_1$. Лемма 43 доказана.

Теорема 23. *Если при $k \in \{1,\dots,6\}$, $j \in \{1,\dots,6\} \setminus \{k\}$ ни одна из четырёхмерных граней куба B^6 не является критической для однородного разбиения $P \in \mathcal{K}_3^2(k,j)$ и множество H куба B^6 не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$ этого разбиения, то при любых $\sigma \in \{0,1\}$, $\delta_1,\dots,\delta_6 \in \{-1,1\}$ справедливо неравенство*

$$\big|\big(\mathrm{EI}\big(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\big)\big)^{\delta_1,\dots,\delta_6}\big| \geqslant 9 - \frac{1}{2}\mathrm{def}\big(P, \mathrm{D}\big(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\big)\big). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть P — произвольное разбиение из $\mathcal{K}_3^2(k,j)$. По определению класса $\mathcal{K}_3^2(k,j)$ элементы матрицы $\mathbb{L}(P) = \bigl(\ell_i^\delta\bigr)_{i=1,\ldots,6}^{\delta=-1,1}$, расположенные в столбцах с номерами из множества $\{1,\ldots,6\}\setminus\{k,j\}$, равны 3, а столбец с номером j состоит из тройки и четвёрки. Следовательно, в каждом столбце матрицы $\mathbb{L}(P)$ с номером из множества $\mathrm{Form}\bigl(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr) = \{1,\ldots,6\}\setminus\{k\}$ имеется элемент, не превосходящий 3. Значит, если ни одна из четырёхмерных граней куба B^6 не является критической для P, то по лемме 42 множество $\bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P\,|\,\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr)^*$ не содержит треугольников. Следовательно, по лемме 34 при любых $i\in\{1,\ldots,6\}\setminus\{k\}$, $\delta\in\{-1,1\}$ справедливо неравенство $\bigl|\mathrm{EI}_i^\delta\bigl(P\,|\,\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr| \geqslant \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\ell_i^\delta,8\bigr)\bigr\|_{\mathrm{T}}$. Поэтому при любых $i\in\{1,\ldots,6\}\setminus\{k,j\}$, $\delta\in\{-1,1\}$ справедливо неравенство $\bigl|\mathrm{EI}_i^\delta\bigl(P\,|\,\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr| \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(3,8)\|_{\mathrm{T}}$. Кроме того, поскольку $k\in\mathrm{Dir}(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k})$, по лемме 34 имеем $\bigl|\mathrm{EI}_k^{-1}\bigl(P\,|\,\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr| = \bigl|\mathrm{EI}_k^{1}\bigl(P\,|\,\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr| = 0$, откуда

$$\begin{aligned}\bigl|\bigl(\mathrm{EI}\bigl(P\,|\,\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr)^{\delta_1,\ldots,\delta_6}\bigr| &\\ = \sum_{i\in\{1,\ldots,6\}\setminus\{k,j\}} &\bigl|\mathrm{EI}_i^{\delta_i}\bigl(P\,|\,\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr| + \bigl|\mathrm{EI}_j^{\delta_j}\bigl(P\,|\,\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr| \\ &\geqslant 4\|\overline{\mathrm{m}}(3,8)\|_{\mathrm{T}} + \bigl|\mathrm{EI}_j^{\delta_j}\bigl(P\,|\,\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr| = 8 + \bigl|\mathrm{EI}_j^{\delta_j}\bigl(P\,|\,\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr|.\end{aligned}$$

Заметим, что если множество H куба B^6 не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$, то число $\mathrm{def}\bigl(P,\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr)$ чётное. Действительно, в этом случае из включения $\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\subseteq\mathrm{H}$ следует, что множество $\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)$ также не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}\bigl(P\bigr)$. Значит, по лемме 43 справедливо

$$\mathrm{def}\bigl(P,\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr) = \bigl|\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr| - \bigl\|\mathbb{S}\bigl(P,\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr)\bigr\|_1,$$

а числа $\bigl|\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr|$ и $\bigl\|\mathbb{S}\bigl(P,\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr)\bigr\|_1$ чётные по леммам 13 и 27 соответственно. Заметим также, что по определению $\mathrm{def}\bigl(P,\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr)\geqslant 0$. Следовательно, при $\mathrm{def}\bigl(P,\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr)\neq 0$ имеем

$$\bigl|\bigl(\mathrm{EI}\bigl(P\bigl|\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr)^{\delta_1,\ldots,\delta_6}\bigr| \geqslant 8 + \bigl|\mathrm{EI}_j^{\delta_j}\bigl(P\bigl|\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr| \geqslant 8 \geqslant 9 - \frac{1}{2}\mathrm{def}\bigl(P,\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr),$$

поэтому при $\mathrm{def}\bigl(P,\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr)\neq 0$ неравенство (4) доказано.

Без ограничения общности считаем, что верхний элемент столбца с номером j матрицы $\mathbb{L}(P)$ равен 3, а нижний равен 4 ($\ell_j^{-1}=3$, $\ell_j^1=4$). Тогда по лемме 34 из включения $j\in\{1,\ldots,6\}\setminus\{k\} = \mathrm{Form}\bigl(\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)$ следует неравенство $\bigl|\mathrm{EI}_j^{-1}\bigl(P\,|\,\mathrm{B}^6\,{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr| \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(3,8)\|_{\mathrm{T}} = 2$. Значит, при $\delta_j=-1$

имеем

$$\left|\left(\mathrm{EI}\left(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\right)\right)^{\delta_1,\ldots,\delta_6}\right| \geqslant 8 + \left|\mathrm{EI}^{-1}_j\left(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\right)\right| \geqslant 10 \geqslant 9 - \frac{1}{2}\mathrm{def}\left(P, \mathrm{D}\left(\mathrm{B}^n{}^{\sigma}_{k}\right)\right),$$

тем самым при $\delta_j = -1$ неравенство (4) доказано.

Рассмотрим случай $\mathrm{def}\left(P, \mathrm{D}\left(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\right)\right) = 0$ и $\delta_j = 1$. Чтобы доказать неравенство (4) в этом случае, достаточно убедиться в том, что $\left|\mathrm{EI}^1_j\left(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\right)\right| \geqslant 1$.

Из включения $j \in \mathrm{Form}\left(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\right)$ по лемме 2 следует, что компонента K^1_j сужения $K = P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}$ является разбиением множества $\mathrm{R}^1_j\left(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\right)$ и справедливы соотношения $1 \leqslant \left|K^1_j\right| \leqslant \left|P^1_j\right| = \ell^1_j = 4$. По лемме 1 имеем $\left|\mathrm{R}^1_j\left(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\right)\right| = 8$. Значит, либо среди блоков разбиения K^1_j найдётся блок Q' мощности $|Q'| \geqslant 3$, либо разбиение K^1_j состоит из четырёх блоков мощности 2.

Если среди блоков разбиения K^1_j найдётся блок Q' мощности $|Q'| \geqslant 3$, то величину $\left|\mathrm{EI}^1_j\left(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\right)\right|$ оценим (как и в доказательстве леммы 34) на основе леммы 33 и теоремы Турана:

$$\begin{aligned}&\left|\mathrm{EI}^1_j\left(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\right)\right| = \left|\mathrm{EI}^1_j(K)\right| = \left|\mathrm{E}^1_j(K) \setminus (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*\right| \\ &= \sum_{Q \in K^1_j} |\mathbf{P}_2(Q) \setminus (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*| \geqslant \sum_{Q \in K^1_j} \left\lfloor \frac{(|Q|-1)^2}{4} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{(|Q'|-1)^2}{4} \right\rfloor \geqslant 1.\end{aligned}$$

Пусть теперь разбиение K^1_j состоит из четырёх блоков мощности 2. Тогда по определению каждый из этих блоков является соединением куба B^6. Значит, по лемме 26 справедливо равенство $\mathrm{E}^1_j(K) = K^1_j$. Следовательно, $\left|\mathrm{E}^1_j(K)\right| = 4$ и никакие два соединения из $\mathrm{E}^1_j(K)$ не имеют общих концов. Кроме того, поскольку соединения куба B^6 имеют длину либо 2, либо 4, справедливо равенство $\mathrm{E}^1_j(K) = \mathrm{E}^1_j\,[2]\,(K) \cup \mathrm{E}^1_j\,[4]\,(K)$.

По лемме 33 имеем $\left|\mathrm{EI}^1_j\left(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\right)\right| = \left|\mathrm{E}^1_j(K) \setminus (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*\right|$. Поэтому если $\mathrm{E}^1_j\,[4]\,(K) \neq \varnothing$, то неравенство $\left|\mathrm{EI}^1_j\left(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\right)\right| \geqslant 1$ очевидно.

Пусть $\mathrm{E}^1_j\,[4]\,(K) = \varnothing$. Чтобы доказать неравенство $\left|\mathrm{EI}^1_j\left(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\right)\right| \geqslant 1$, в силу $|\mathrm{E}^1_j(K)| = 4$ достаточно показать, что $\left|\mathrm{E}^1_j(K) \cap (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*\right| \leqslant 3$.

По определению отношения двойственности включение $e^* \in \mathrm{E}^1_j$ выполнено для произвольного $e \in \mathrm{E}\,[2]$ тогда и только тогда, когда $e \in \mathrm{E}^{-1}_j$. Поэтому $\left|\mathrm{E}^1_j(K) \cap (\mathrm{E}\,[2]\,(K))^*\right| = \left|\mathrm{E}^1_j(K) \cap (\mathrm{E}^{-1}_j\,[2]\,(K))^*\right|$. Чтобы доказать неравенство $\left|\mathrm{E}^1_j(K) \cap \left(\mathrm{E}^{-1}_j\,[2]\,(K)\right)^*\right| \leqslant 3$, учитывая, что множество $\mathrm{E}^1_j(K)$ состоит из четырёх соединений, никакие два из которых не имеют общих концов, достаточно показать, что множество $\bigl(\mathrm{E}_j^{-1}[2](K)\bigr)^*$ является объединением не более чем трёх звёзд. Покажем это.

Из отсутствия в множестве $\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)$ точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$ и равенства $\mathrm{def}\bigl(P, \mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr) = 0$ следует, что $\mathrm{E}_j^{-1}[4](K) = \varnothing$. Действительно, по определению множество $\mathrm{E}[4](K) = \mathrm{E}[4]\,\bigl(P \,|\, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)$ состоит из всех таких и только таких соединений $e = \{r_1, r_2\} \in \mathrm{E}(P)$, что $r_1, r_2 \in \mathrm{R}\bigl(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)$ и $\mathrm{w}(e) = 4$. Очевидно, что для таких и только таких соединений $e \in \mathrm{E}(P)$ выполнено равенство $\widetilde{e} = \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}$. Поэтому справедливо равенство $\mathrm{E}[4](K) = \mathrm{E}\bigl(P, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)$. По лемме 27 мощности компонент $\mathrm{E}_j^{-1}\bigl(P, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)$, $\mathrm{E}_j^{1}\bigl(P, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)$ множества $\mathrm{E}\bigl(P, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)$ и элементы s_j^{-1}, s_j^{1} матрицы $\mathbb{S}\bigl(P, \mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr) = \bigl(s_i^{\delta}\bigr)_{i=1,\dots,6}^{\delta=-1,1}$ связаны следующими равенствами:

$$\bigl|\mathrm{E}_j^{-1}\bigl(P, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr| = \frac{1}{2} \cdot s_j^{-1}, \quad \bigl|\mathrm{E}_j^{1}\bigl(P, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr| = \frac{1}{2} \cdot s_j^{1}.$$

Отсюда по теоремам 9 и 7 с учётом того, что множество $\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)$ не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$ и $\mathrm{def}\bigl(P, \mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr) = 0$, следует, что

$$\begin{aligned}\bigl|\bigl|\mathrm{E}_j^{-1}[4](K)\bigr| - \bigl|\mathrm{E}_j^{1}[4](K)\bigr|\bigr| &= \bigl|\bigl|\mathrm{E}_j^{-1}\bigl(P, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr| - \bigl|\mathrm{E}_j^{1}\bigl(P, \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr|\bigr| \\ &= \frac{1}{2}\bigl|s_j^{-1} - s_j^{1}\bigr| = \frac{1}{2}\Delta_j \mathbb{S}\bigl(P, \mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{def}\bigl(P, \mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)\bigr) = 0.\end{aligned}$$

Тем самым из равенства $\bigl|\mathrm{E}_j^{1}[4](K)\bigr| = 0$ следует $\bigl|\mathrm{E}_j^{-1}[4](K)\bigr| = 0$, а значит, справедливо $\mathrm{E}_j^{-1}[4](K) = \varnothing$.

Из того, что $\mathrm{E}_j^{-1}[4](K) = \varnothing$, следует, что $\mathrm{E}_j^{-1}(K) = \mathrm{E}_j^{-1}[2](K)$. Тогда выполненное по лемме 26 равенство $\mathrm{E}_j^{-1}(K) = \bigcup\limits_{Q \in K_j^{-1}} \mathbf{P}_2(Q)$ влечёт $\mathrm{E}_j^{-1}[2](K) = \bigcup\limits_{Q \in K_j^{-1}} \mathbf{P}_2(Q)$, а из включения $\mathrm{E}_j^{-1}[2](K) \subseteq \mathrm{E}[2]$ следует, что каждый блок Q разбиения K_j^{-1} множества $\mathrm{R}_j^{-1}\bigl(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)$ является носителем полного подмножества $\mathbf{P}_2(Q)$ множества $\mathrm{E}[2]$.

Заметим, что при этом все полные подмножества $\mathbf{P}_2(Q)$, $Q \in K_j^{-1}$, множества $\mathrm{E}[2]$ являются 1-сферическими. Действительно, если это не так, то по лемме 35 для некоторого $Q' \in K_j^{-1}$ множество $\mathbf{P}_2(Q')$ будет кубическим, т. е. по определению существуют четырёхмерная грань $F \in \mathfrak{F}_4(\mathrm{B}^6)$, $i \in \mathrm{Form}(F)$ и $\delta \in \{-1, 1\}$ такие, что $\mathrm{V}(\mathbf{P}_2(Q')) = \mathrm{R}_i^{\delta}(F)$. Из этого равенства в силу того, что $Q' \subseteq \mathrm{R}_j^{-1}\bigl(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)$, следует, что $i = j$, $\delta = -1$, $Q' = \mathrm{R}_j^{-1}(F)$, $F \subseteq \mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}$ и $\mathrm{Form}(F) \subseteq \mathrm{Form}\bigl(\mathrm{B}^6{}^{\sigma}_{k}\bigr)$. Это значит, что компонента X_j^{-1} сужения $X = P \,|\, F$ состоит из одного блока $\mathrm{R}_j^{-1}(F)$, т. е. имеет мощность 1, и в каждом столбце матрицы $\mathbb{L}(P)$ с номером из множества $\mathrm{Form}(F)$ имеется элемент, не превосходящий 3. Тем самым по лемме 41 грань F является критической для однородного разбиения P, что противоречит отсутствию у куба B^6 критических для P четырёхмерных граней.

Отсюда по лемме 37 все множества $(\mathbf{P}_2(Q))^*$, $Q \in K_j^{-1}$, будут звёздами. Значит, из неравенств $1 \leqslant \left|K_j^{-1}\right| \leqslant \left|P_j^{-1}\right| = \ell_j^{-1} = 3$ (лемма 2) следует, что множество

$$\left(\mathrm{E}_j^{-1}[2](K)\right)^* = \Big(\bigcup_{Q \in K_j^{-1}} \mathbf{P}_2(Q)\Big)^* = \bigcup_{Q \in K_j^{-1}} (\mathbf{P}_2(Q))^*$$

является объединением не более чем трёх звёзд. Теорема 23 доказана.

8. Оценки величин $|\mathrm{EH}(P)|$ и $|({}_k\mathrm{EH}(P))^{\delta_1,\ldots,\delta_n}|$

Следующие три леммы следуют непосредственно из определений.

Лемма 44. *Множества* $\mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_i^\sigma\big)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\sigma \in \{0,1\}$, *попарно не пересекаются, и справедливы равенства*

$$\mathrm{H} = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_i^0\big) \cup \bigcup_{i=1}^n \mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_i^1\big),$$

$$\mathrm{H}_j = \mathrm{H} \setminus \big(\mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_j^0\big) \cup \mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_j^1\big)\big), \quad j = 1,\ldots,n.$$

Лемма 45. *Для любого однородного разбиения P множества* R *справедливы равенства*

$$\mathrm{def}(P,\mathrm{H}) = \sum_{i=1}^n \mathrm{def}\big(P,\mathrm{B}^n{}_i^0\big) + \sum_{i=1}^n \mathrm{def}\big(P,\mathrm{B}^n{}_i^1\big),$$

$$\mathrm{def}(P,\mathrm{H}_j) = \mathrm{def}(P,\mathrm{H}) - \mathrm{def}\big(P,\mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_j^0\big)\big) - \mathrm{def}\big(P,\mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_j^1\big)\big), \quad j = 1,\ldots,n.$$

Лемма 46. *Для любого однородного разбиения P множества* R *имеют место равенства*

$$\mathrm{EH}(P) = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{E}\big(P,\mathrm{B}^n{}_i^0\big) \cup \bigcup_{i=1}^n \mathrm{E}\big(P,\mathrm{B}^n{}_i^1\big),$$

$${}_k\mathrm{EH}(P) = \mathrm{EH}(P) \setminus \big(\mathrm{E}\big(P,\mathrm{B}^n{}_k^0\big) \cup \mathrm{E}\big(P,\mathrm{B}^n{}_k^1\big)\big), \quad k = 1,\ldots,n,$$

и множества $\mathrm{E}\big(P,\mathrm{B}^n{}_i^\sigma\big)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\sigma \in \{0,1\}$, *попарно не пересекаются.*

Лемма 47. *Если диаметральное множество* $\mathrm{D}(F)$ *грани* $F \in \mathfrak{F}^1_{\geqslant 3}(\mathrm{B}^n)$ *не содержит точек самопересечения гирлянды* $\mathrm{G}(P)$ *однородного разбиения* $\mathrm{G}(P)$ *множества* R, *то*

$$|\mathrm{E}(P,F)| = \frac{1}{2}(|\mathrm{D}(F)| - \mathrm{def}(P,\mathrm{D}(F))).$$

Доказательство. По лемме 27 для грани $F \in \mathfrak{F}^1_{\geqslant 3}(\mathrm{B}^n)$ компоненты множества $\mathrm{E}(P,F)$ связаны равенствами $\mathrm{E}^\delta_i(P,F) = \frac{1}{2}s^\delta_i$ с соответствующими элементами матрицы $\mathbb{S}(P,\mathrm{D}(F)) = (s^\delta_i)^{\delta=-1,1}_{i=1,\ldots,n}$. Поэтому ввиду леммы 43 из отсутствия в множестве $\mathrm{D}(F)$ точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$ следует, что

$$\begin{aligned}|\mathrm{E}(P,F)| &= \sum_{i,\delta}\left|\mathrm{E}^\delta_i(P,F)\right| = \sum_{i,\delta}\frac{1}{2}s^\delta_i \\ &= \frac{1}{2}\|\mathbb{S}(P,\mathrm{D}(F))\|_1 = \frac{1}{2}(|\mathrm{D}(F)| - \mathrm{def}(P,\mathrm{D}(F))).\end{aligned}$$

Лемма 47 доказана.

Теорема 24. *Если при чётном* $n \geqslant 4$ *множество* H *куба* B^n *не содержит точек самопересечения гирлянды* $\mathrm{G}(P)$ *однородного разбиения* P *множества* R, *то справедливы равенства*

$$|\mathrm{EH}(P)| = n2^{n-2} - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H}),$$

$$|{}_k\mathrm{EH}(P)| = (n-1)2^{n-2} - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H}_k), \quad k = 1,\ldots,n.$$

Доказательство. При чётном $n \geqslant 4$ при любых $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\sigma \in \{0,1\}$ справедливо включение $\mathrm{B}^n{}^\sigma_i \in \mathfrak{F}^1_{\geqslant 3}(\mathrm{B}^n)$. Кроме того, если множество H куба B^n не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$, то по лемме 44 диаметральные множества $\mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}^\sigma_i\big)$ граней $\mathrm{B}^n{}^\sigma_i$ также не содержат точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$, поэтому из лемм 46, 47, 13 и 45 следует, что

$$\begin{aligned}|\mathrm{EH}(P)| &= \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{i=1}^{n}\left|\mathrm{E}\big(P,\mathrm{B}^n{}^\sigma_i\big)\right| \\ &= \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\Big(\left|\mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}^\sigma_i\big)\right| - \mathrm{def}\big(P,\mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}^\sigma_i\big)\big)\Big)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{i=1}^{n}\bigl|\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^{n\,\sigma}_{\;\;i}\bigr)\bigr| - \frac{1}{2}\sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{def}\bigl(P,\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^{n\,\sigma}_{\;\;i}\bigr)\bigr)$$
$$= \frac{1}{2}n2^{n-1} - \frac{1}{2}\operatorname{def}(P,\mathrm{H}).$$

Точно так же для произвольного $k \in \{1,\dots,n\}$ ввиду лемм 46, 47, 13 и 45 имеем

$$\bigl|{}_k\mathrm{EH}(P)\bigr| = \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{i=1}^{n}\bigl|\mathrm{E}\bigl(P,\mathrm{B}^{n\,\sigma}_{\;\;i}\bigr)\bigr| - \bigl|\mathrm{E}\bigl(P,\mathrm{B}^{n\,0}_{\;\;k}\bigr)\bigr| - \bigl|\mathrm{E}\bigl(P,\mathrm{B}^{n\,1}_{\;\;k}\bigr)\bigr|$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{i=1}^{n}\bigl|\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^{n\,\sigma}_{\;\;i}\bigr)\bigr| - \bigl|\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^{n\,0}_{\;\;k}\bigr)\bigr| - \bigl|\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^{n\,1}_{\;\;k}\bigr)\bigr|\right)$$
$$- \frac{1}{2}\left(\sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{def}\bigl(P,\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^{n\,\sigma}_{\;\;i}\bigr)\bigr) - \operatorname{def}\bigl(P,\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^{n\,0}_{\;\;k}\bigr)\bigr) - \operatorname{def}\bigl(P,\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^{n\,1}_{\;\;k}\bigr)\bigr)\right)$$
$$= \frac{1}{2}(n2^{n-1} - 2^{n-2} - 2^{n-2})$$
$$- \frac{1}{2}\bigl(\operatorname{def}(P,\mathrm{H}) - \operatorname{def}\bigl(P,\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^{n\,0}_{\;\;k}\bigr)\bigr) - \operatorname{def}\bigl(P,\mathrm{D}\bigl(\mathrm{B}^{n\,1}_{\;\;k}\bigr)\bigr)\bigr)$$
$$= (n-1)2^{n-2} - \frac{1}{2}\operatorname{def}(P,\mathrm{H}_\mathrm{k}).$$

Теорема 24 доказана.

Лемма 48. *Для любого однородного разбиения P множества R при всех $k,j \in \{1,\dots,n\}$, $\delta \in \{-1,1\}$ справедливо равенство*

$$\bigl|{}_k\mathrm{EH}^{\delta}_{j}(P)\bigr| = \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}}\bigl|\mathrm{E}^{\delta}_{j}\bigl(P,\mathrm{B}^{n\,\sigma}_{\;\;i}\bigr)\bigr|$$

Доказательство. Пусть $k,j \in \{1,\dots,n\}$, $\delta \in \{-1,1\}$. По лемме 46 имеем

$${}_k\mathrm{EH}(P) = \mathrm{EH}(P) \setminus \bigl(\mathrm{E}\bigl(P,\mathrm{B}^{n\,0}_{\;\;k}\bigr) \cup \mathrm{E}\bigl(P,\mathrm{B}^{n\,1}_{\;\;k}\bigr)\bigr) = \bigcup_{\sigma=0}^{1}\ \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}}\mathrm{E}\bigl(P,\mathrm{B}^{n\,\sigma}_{\;\;i}\bigr).$$

Непосредственно из определения компоненты A^{δ}_{j} произвольного подмножества $A \subseteq \mathrm{E}$ следует, что если $A = B \cup \dots \cup C$, то $A^{\delta}_{j} = B^{\delta}_{j} \cup \dots \cup C^{\delta}_{j}$.

В частности, при $A = {}_k\mathrm{EH}(P)$ получаем

$$ {}_k\mathrm{EH}_j^{\delta}(P) = \bigcup_{\sigma=0}^{1} \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{k\}} \mathrm{E}_j^{\delta}\big(P, \mathrm{B}^n{}_i^{\sigma}\big). $$

По лемме 46 множества $\mathrm{E}\big(P, \mathrm{B}^n{}_i^{\sigma}\big)$, $i \in \{1,\ldots,n\}\setminus\{k\}$, $\sigma \in \{0,1\}$, а значит, и множества $\mathrm{E}_j^{\delta}(P, \mathrm{B}^n{}_i^{\sigma})$, $i \in \{1,\ldots,n\}\setminus\{k\}$, $\sigma \in \{0,1\}$, попарно не пересекаются. Лемма 48 доказана.

Лемма 49. *Если при чётном $n \geqslant 4$ множество* H *куба* B^n *не содержит точек самопересечения гирлянды* $\mathrm{G}(P)$ *однородного разбиения P множества* R, *то при любых $k, j \in \{1,\ldots,n\}$ справедливо неравенство*

$$ \big|\big|{}_k\mathrm{EH}_j^{-1}(P)\big| - \big|{}_k\mathrm{EH}_j^{1}(P)\big|\big| \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{def}(P, \mathrm{H}_k). $$

Доказательство. Зафиксируем произвольные $k, j \in \{1,\ldots,n\}$. При чётном $n \geqslant 4$ для любых $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\sigma \in \{0,1\}$ имеет место включение $\mathrm{B}^n{}_i^{\sigma} \in \mathfrak{F}^1_{\geqslant 3}(\mathrm{B}^n)$. Значит, по лемме 27 для элементов s_j^{-1} и s_j^1 матрицы площадей $\mathbb{S}\big(P, \mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_i^{\sigma}\big)\big) = \big(s_j^{\delta}\big)_{j=1,\ldots,n}^{\delta=-1,1}$ выполнены равенства

$$ s_j^{-1} = 2\big|\mathrm{E}_j^{-1}\big(P, \mathrm{B}^n{}_i^{\sigma}\big)\big|, \quad s_j^{1} = \big|\mathrm{E}_j^{1}\big(P, \mathrm{B}^n{}_i^{\sigma}\big)\big|, $$

поэтому имеет место

$$ \Delta_j\mathbb{S}\big(P, \mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_i^{\sigma}\big)\big) = \big|s_j^{-1} - s_j^{1}\big| = \big|2\big|\mathrm{E}_j^{-1}\big(P, \mathrm{B}^n{}_i^{\sigma}\big)\big| - 2\big|\mathrm{E}_j^{1}\big(P, \mathrm{B}^n{}_i^{\sigma}\big)\big|\big|. $$

Кроме того, если множество H куба B^n не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$, то по лемме 44 множества $\mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_i^{\sigma}\big)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\sigma \in \{0,1\}$, также не содержат точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$. Отсюда по лемме 45, теоремам 9, 7 и лемме 48 следует, что

$$ \begin{aligned} \mathrm{def}(P, \mathrm{H}_k) &= \mathrm{def}(P, \mathrm{H}) - \mathrm{def}\big(P, \mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_k^{0}\big)\big) - \mathrm{def}\big(P, \mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_k^{1}\big)\big) \\ &= \sum_{\sigma=0}^{1} \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} \mathrm{def}\big(P, \mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_i^{\sigma}\big)\big) - \mathrm{def}\big(P, \mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_k^{0}\big)\big) - \mathrm{def}\big(P, \mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_k^{1}\big)\big) \\ &= \sum_{\sigma=0}^{1} \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{k\}} \mathrm{def}\big(P, \mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_i^{\sigma}\big)\big) \geqslant \sum_{\sigma=0}^{1} \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{k\}} \Delta_j\mathbb{S}\big(P, \mathrm{D}\big(\mathrm{B}^n{}_i^{\sigma}\big)\big) \\ &= \sum_{\sigma=0}^{1} \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{k\}} \big|2\big|\mathrm{E}_j^{-1}\big(P, \mathrm{B}^n{}_i^{\sigma}\big)\big| - 2\big|\mathrm{E}_j^{1}\big(P, \mathrm{B}^n{}_i^{\sigma}\big)\big|\big| \end{aligned} $$

$$\geqslant \left| \sum_{\sigma=0}^{1} \sum_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}} 2\left|\mathrm{E}_j^{-1}\left(P, \mathrm{B}^n{}_i^\sigma\right)\right| - \sum_{\sigma=0}^{1} \sum_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}} 2\left|\mathrm{E}_j^{1}\left(P, \mathrm{B}^n{}_i^\sigma\right)\right| \right|$$
$$= 2\left|\left|{}_k\mathrm{EH}_j^{-1}(P)\right| - \left|{}_k\mathrm{EH}_j^{1}(P)\right|\right|.$$

Лемма 49 доказана.

Теорема 25. *Если при чётном $n \geqslant 4$ множество H куба B^n не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$ однородного разбиения P множества R, то при любых $k, j \in \{1, \dots, n\}$, $\delta_j \in \{-1, 1\}$ существуют такие $\delta_1, \dots, \delta_{j-1}$, $\delta_{j+1}, \dots, \delta_n \in \{-1, 1\}$, что выполнено неравенство*

$$|({}_k\mathrm{EH}(P))^{\delta_1,\dots,\delta_n}| \geqslant (n-1)2^{n-3} - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P, \mathrm{H}_k).$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные $k, j \in \{1, \dots, n\}$ и $\delta_j \in \{-1, 1\}$. Значения $\delta_1, \dots, \delta_{j-1}$, $\delta_{j+1}, \dots, \delta_n \in \{-1, 1\}$ выберем так, что при каждом $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ для компонент $A_i^{-\delta_i}$ и $A_i^{\delta_i}$ множества $A = {}_k\mathrm{EH}(P)$ выполнено неравенство $\left|A_i^{-\delta_i}\right| \leqslant \left|A_i^{\delta_i}\right|$. Тогда

$$|A^{-\delta_1,\dots,-\delta_n}| + |A^{\delta_1,\dots,\delta_n}| = \sum_{i=1}^{n} \left|A_i^{-\delta_i}\right| + \sum_{i=1}^{n} \left|A_i^{\delta_i}\right| = |A| = |{}_k\mathrm{EH}(P)|,$$

$$|A^{-\delta_1,\dots,-\delta_n}| - |A^{\delta_1,\dots,\delta_n}| = \sum_{i=1}^{n} \left(\left|A_i^{-\delta_i}\right| - \left|A_i^{\delta_i}\right|\right)$$
$$\leqslant \left|A_j^{-\delta_j}\right| - \left|A_j^{\delta_j}\right| \leqslant \left|\left|A_j^{-1}\right| - \left|A_j^{1}\right|\right| = \left|\left|{}_k\mathrm{EH}_j^{-1}(P)\right| - \left|{}_k\mathrm{EH}_j^{1}(P)\right|\right|.$$

Значит, если число $n \geqslant 4$ чётное и множество H куба B^n не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$, то по теореме 24 и лемме 49 справедлива система соотношений

$$\begin{cases} |A^{-\delta_1,\dots,-\delta_n}| + |A^{\delta_1,\dots,\delta_n}| = (n-1)2^{n-2} - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P, \mathrm{H}_k), \\ |A^{-\delta_1,\dots,-\delta_n}| - |A^{\delta_1,\dots,\delta_n}| \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{def}(P, \mathrm{H}_k), \end{cases}$$

поэтому верно неравенство

$$|({}_k\mathrm{EH}(P))^{\delta_1,\dots,\delta_n}| = |A^{\delta_1,\dots,\delta_n}| \geqslant (n-1)2^{n-3} - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P, \mathrm{H}_k).$$

Теорема 25 доказана.

9. Доказательство теоремы 16

Пусть ни одна из четырёхмерных граней куба B^6 не является критической для однородного разбиения $P \in \mathcal{K}_3 = \mathcal{K}_3^0 \cup \mathcal{K}_3^1 \cup \mathcal{K}_3^2$ и множество H куба B^6 не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$ этого разбиения. Чтобы доказать теорему 16 (т. е. доказать, что шестимерная грань куба B^6 будет критической для P), нужно показать, что $\mathfrak{B}^*(P \,|\, \mathrm{B}^6) > |\mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^6)|$. Покажем это.

Если $P \in \mathcal{K}_3^0$, то по определению класса $\mathcal{K}_3^0$ в каждом столбце матрицы $\mathbb{L}(P) = \big(\ell_i^\delta\big)_{i=1,\dots,6}^{\delta=-1,1}$ имеется тройка. Без ограничения общности считаем $\ell_1^1 = \dots = \ell_6^1 = 3$. Тогда из неравенств $38 \leqslant \|\mathbb{L}(P)\|_1 \leqslant 39$ следует $\ell_1^{-1} + \dots + \ell_6^{-1} \leqslant 21$. Значит, при $\delta_1 = \dots = \delta_6 = 1$ по теоремам 17, 18, 21 и 24, а также по теореме 31 из разд. 10 имеем

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{B}^*(P \,|\, \mathrm{B}^6) = \mathfrak{B}^*(P) &\geqslant |(\mathrm{E}(P))^{\delta_1,\dots,\delta_6}| + |(\mathrm{EI}(P))^{-\delta_1,\dots,-\delta_6}| - |\mathrm{EH}(P)| \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{6} \big\|\overline{\mathrm{m}}\big(\ell_i^{\delta_i}, 16\big)\big\|_{\mathrm{C}} + \left\|\overline{\mathrm{m}}\left(\sum_{i=1}^{6} \ell_i^{-\delta_i}, 96\right)\right\|_{\mathrm{T}} - \left(6 \cdot 2^{6-2} - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P, \mathrm{H})\right) \\
&\geqslant 6\|\overline{\mathrm{m}}(3, 16)\|_{\mathrm{C}} + \|\overline{\mathrm{m}}(21, 96)\|_{\mathrm{T}} - 96.
\end{aligned}
$$

Из равенства $\overline{\mathrm{m}}(3,16) = (6,5,5)$ следует $\|\overline{\mathrm{m}}(3,16)\|_{\mathrm{C}} = 35$, а равенство $\overline{\mathrm{m}}(21,96) = (\underbrace{5,\dots,5}_{12}, \underbrace{4,\dots,4}_{9})$ влечёт $\|\overline{\mathrm{m}}(21,96)\|_{\mathrm{T}} = 66$, поэтому

$$
\mathfrak{B}^*(P \,|\, \mathrm{B}^6) \geqslant 6 \cdot 35 + 66 - 96 = 180 > 160 = |\mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^6)|.
$$

Если $P \in \mathcal{K}_3^1$, то по определению класса $\mathcal{K}_3^1$ пять столбцов матрицы $\mathbb{L}(P) = \big(\ell_i^\delta\big)_{i=1,\dots,6}^{\delta=-1,1}$ состоят из двух троек и один имеет минимальный элемент 4. Без ограничения общности будем считать, что $P \in \mathcal{K}_3^1(6)$ (т. е. столбец с минимальным элементом 4 имеет номер 6) и $\ell_6^1 = 4$. Тогда для любых $\delta_1, \dots, \delta_5 \in \{-1, 1\}$ справедливы равенства $\ell_1^{-\delta_1} = \dots = \ell_5^{-\delta_5} = 3$ и при $\delta_6 = -1$ справедливо равенство $\ell_6^{-\delta_6} = 4$.

Выберем $\delta_1, \dots, \delta_5 \in \{-1, 1\}$ так, чтобы при $\delta_6 = -1$ было выполнено неравенство

$$
|({}_6\mathrm{EH}(P))^{\delta_1,\dots,\delta_6}| \geqslant (6-1)2^{6-3} - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P, \mathrm{H}_6).
$$

По теореме 25 такие $\delta_1, \dots, \delta_5$ существуют. Тогда по теоремам 17, 18 и 24 при $\delta_6 = -1$ имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}^*(P\,|\,\mathrm{B}^6) = \mathfrak{B}^*(P) &\geqslant |(\mathrm{E}(P))^{-\delta_1,\dots,-\delta_6}| + |(\mathrm{EI}(P))^{\delta_1,\dots,\delta_6}| - |\mathrm{EH}(P)|\\ &\geqslant \sum_{i=1}^{6}\big\|\overline{\mathrm{m}}\big(\ell_i^{-\delta_i},16\big)\big\|_{\mathrm{C}} + |(\mathrm{EI}(P))^{\delta_1,\dots,\delta_6}| - \Big(6\cdot 2^{6-2} - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H})\Big)\\ &\geqslant \big(5\cdot\|\overline{\mathrm{m}}(3,16)\|_{\mathrm{C}} + \|\overline{\mathrm{m}}(4,16)\|_{\mathrm{C}}\big) + \big|(\mathrm{EI}(P))^{\delta_1,\dots,\delta_6}\big|\\ &\qquad - \Big(96 - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H})\Big).\end{aligned}$$

Из равенства $\overline{\mathrm{m}}(4,16) = (4,4,4,4)$ следует $\|\overline{\mathrm{m}}(4,16)\|_{\mathrm{C}} = 24$. По теоремам 19, 22 и в силу выбора $\delta_1,\dots,\delta_5$ имеем

$$\begin{aligned}&|(\mathrm{EI}(P))^{\delta_1,\dots,\delta_6}|\\ &\quad\geqslant \big|\big(\mathrm{EI}\big(P\,|\,\mathrm{B}^{n}{}^{\,0}_{\,6}\big)\big)^{\delta_1,\dots,\delta_6}\big| + \big|\big(\mathrm{EI}\big(P\,|\,\mathrm{B}^{n}{}^{\,1}_{\,6}\big)\big)^{\delta_1,\dots,\delta_6}\big| + \big|({}_6\mathrm{EH}(P))^{\delta_1,\dots,\delta_6}\big|\\ &\qquad\geqslant 10 + 10 + \Big((6-1)\cdot 2^{6-3} - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H}_6)\Big) = 60 - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H}_6).\end{aligned}$$

Кроме того, из $\mathrm{H}_6 \subseteq \mathrm{H}$ следует, что $\mathrm{def}(P,\mathrm{H}_6) \leqslant \mathrm{def}(P,\mathrm{H})$, поэтому

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}^*(P\,|\,\mathrm{B}^6) &\geqslant (5\cdot 35 + 24) + \Big(60 - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H}_6)\Big)\\ &\qquad - \Big(96 - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H})\Big) \geqslant 163 > 160 = |\mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^6)|.\end{aligned}$$

Если $P \in \mathcal{K}_3^2$, то по определению класса $\mathcal{K}_3^2$ четыре столбца матрицы $\mathbb{L}(P) = \big(\ell_i^{\delta}\big)_{i=1,\dots,6}^{\delta=-1,1}$ состоят из двух троек, один состоит из тройки и четвёрки, один состоит из двух четвёрок. Без ограничения общности считаем, что $P \in \mathcal{K}_3^2(6,5)$ (т. е. столбец с двумя четвёрками имеет номер 6, а столбец с тройкой и четвёркой — номер 5) и $\ell_5^{-1} = 4$, $\ell_5^{1} = 3$. Тогда для любых $\delta_1,\dots,\delta_4,\delta_6 \in \{-1,1\}$ справедливы равенства $\ell_1^{-\delta_1} = \dots = \ell_4^{-\delta_4} = 3$, $\ell_6^{-\delta_6} = 4$ и при $\delta_5 = -1$ справедливо равенство $\ell_5^{-\delta_5} = 3$.

Выберем $\delta_1,\dots,\delta_4,\delta_6 \in \{-1,1\}$ так, чтобы при $\delta_5 = -1$ было выполнено неравенство

$$|({}_6\mathrm{EH}(P))^{\delta_1,\dots,\delta_6}| \geqslant (6-1)2^{6-3} - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H}_6).$$

По теореме 25 такие $\delta_1,\dots,\delta_4,\delta_6$ существуют. Тогда по теоремам 17, 18 и 24 при $\delta_5 = -1$ имеем

$$\mathfrak{B}^*(P\,|\,\mathrm{B}^6) = \mathfrak{B}^*(P) \geqslant |(\mathrm{E}(P))^{-\delta_1,\ldots,-\delta_6}| + |(\mathrm{EI}(P))^{\delta_1,\ldots,\delta_6}| - |\mathrm{EH}(P)|$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{6} \big\|\overline{\mathrm{m}}\big(\ell_i^{-\delta_i}, 16\big)\big\|_{\mathrm{C}} + |(\mathrm{EI}(P))^{\delta_1,\ldots,\delta_6}| - \left(6\cdot 2^{6-2} - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H})\right)$$
$$\geqslant \big(5\cdot\|\overline{\mathrm{m}}(3,16)\|_{\mathrm{C}} + \|\overline{\mathrm{m}}(4,16)\|_{\mathrm{C}}\big) + \big|(\mathrm{EI}(P))^{\delta_1,\ldots,\delta_6}\big|$$
$$- \left(96 - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H})\right).$$

По теоремам 19 и 23 в силу выбора $\delta_1,\ldots,\delta_4,\delta_6$ и по лемме 45 имеем

$$|(\mathrm{EI}(P))^{\delta_1,\ldots,\delta_6}|$$
$$\geqslant \big|\big(\mathrm{EI}\big(P\,|\,\mathrm{B}^{n}\,{}^{0}_{6}\big)\big)^{\delta_1,\ldots,\delta_6}\big| + \big|\big(\mathrm{EI}\big(P\,|\,\mathrm{B}^{n}\,{}^{1}_{6}\big)\big)^{\delta_1,\ldots,\delta_6}\big| + \big|({}_6\mathrm{EH}(P))^{\delta_1,\ldots,\delta_6}\big|$$
$$\geqslant \left(9 - \frac{1}{2}\mathrm{def}\big(P,\mathrm{D}\big(\mathrm{B}^{6}\,{}^{0}_{6}\big)\big)\right) + \left(9 - \frac{1}{2}\mathrm{def}\big(P,\mathrm{D}\big(\mathrm{B}^{6}\,{}^{1}_{6}\big)\big)\right)$$
$$+ \left((6-1)\cdot 2^{6-3} - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H}_6)\right) = 9 + 9 + 40$$
$$- \frac{1}{2}\left(\mathrm{def}\big(P,\mathrm{D}\big(\mathrm{B}^{6}\,{}^{0}_{6}\big)\big) + \mathrm{def}\big(P,\mathrm{D}\big(\mathrm{B}^{6}\,{}^{1}_{6}\big)\big) + \mathrm{def}(P,\mathrm{H}_6)\right)$$
$$= 58 - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H}),$$

поэтому

$$\mathfrak{B}^*(P\,|\,\mathrm{B}^6) \geqslant (5\cdot 35 + 24) + \left(58 - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H})\right)$$
$$- \left(96 - \frac{1}{2}\mathrm{def}(P,\mathrm{H})\right) = 161 > 160 = |\mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^6)|.$$

Теорема 16 доказана.

Из теоремы 16 следует, что любое разбиение $P \in \mathcal{K}_3$ неправильное. Стало быть, теорема 3 является следствием теорем 2, 12, 13 и 16. Теорема 3 доказана.

10. Вспомогательные утверждения

Через $\mathbb{Z}^k$ обозначим множество всех целочисленных наборов (векторов) $\overline{z} = (z_1,\ldots,z_k)$. Через $\mathfrak{M}(k)$ обозначим множество всех таких $\overline{z} = (z_1,\ldots,z_k) \in \mathbb{Z}^k$, что выполнены неравенства $z_1 \geqslant \ldots \geqslant z_k \geqslant 1$. Пусть $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}(k)$.

Величины $\|\overline{z}\|_{-1}$ и $\|\overline{z}\|_1$ для произвольного $\overline{z} = (z_1, \dots, z_k) \in \mathfrak{M}$ определим формулами $\|\overline{z}\|_{-1} = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{z_i}$ и $\|\overline{z}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{k} z_i$.

Величины $\|\overline{z}\|_{\text{C}}$ и $\|\overline{z}\|_{\text{T}}$ для произвольного набора целых положительных чисел $\overline{z} = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{Z}^k$ были определены в разд. 6 формулами $\|\overline{z}\|_{\text{C}} = \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{z_i}{2}$ и $\|\overline{z}\|_{\text{T}} = \sum\limits_{i=1}^{k} \lfloor \frac{(z_i-1)^2}{4} \rfloor$.

Через $\mathfrak{M}^4_{-1}$ обозначим множество всех таких $\overline{z} \in \mathfrak{M}$, что $\overline{z}$ удовлетворяет одному из следующих двух условий.

1. Выполнено строгое неравенство $\|\overline{z}\|_{-1} > 4$.

2. Выполнено равенство $\|\overline{z}\|_{-1} = 4$, и не все компоненты вектора $\overline{z}$ являются степенями двойки.

Через $\mathfrak{M}(k, L)$ обозначим множество таких $\overline{z} \in \mathfrak{M}(k)$, что $\|\overline{z}\|_1 = L$. Через $\mathfrak{M}(k, L, 1)$ обозначим множество таких $\overline{z} = (z_1, \dots, z_k) \in \mathfrak{M}(k, L)$, что $z_k = 1$. Через $\mathfrak{M}(k, L, 2, 2)$ обозначим множество таких $\overline{z} = (z_1, \dots, v_{k-1}, z_k) \in \mathfrak{M}(k, L)$, что $z_{k-1} = z_k = 2$.

Заметим, что при $1 \leqslant k \leqslant L$ справедливо неравенство $\mathfrak{M}(k, L) \neq \varnothing$ и в $\mathfrak{M}(k, L)$ существует единственный вектор $\overline{z}$, компоненты которого отличаются друг от друга не более чем на 1. Этот вектор будем называть *максимально равномерным вектором из множества* $\mathfrak{M}(k, L)$. В разд. 6 он был обозначен через $\overline{\text{m}}(k, L)$.

Теорема 26. *При любых k, L таких, что $1 \leqslant k \leqslant L$, для любого $\overline{z} \in \mathfrak{M}(k, L)$ из неравенства $\overline{z} \neq \overline{\text{m}}(k, L)$ следует, что*

$$\|\overline{z}\|_{-1} > \|\overline{\text{m}}(k, L)\|_{-1}, \quad \|\overline{z}\|_{\text{C}} > \|\overline{\text{m}}(k, L)\|_{\text{C}}, \quad \|\overline{z}\|_{\text{T}} \geqslant \|\overline{\text{m}}(k, L)\|_{\text{T}}.$$

Доказательство. На множестве $\mathbb{Z}^k$ для каждой пары номеров i, j такой, что $1 \leqslant i < j \leqslant k$, определим операцию $\text{O}_{i,j} \colon \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^k$ по следующему правилу:

$$\text{O}_{i,j}(\overline{z}) = (z_1, \dots, z_{i-1},\, z_i - 1,\, z_{i+1}, \dots, z_{j-1},\, z_j + 1,\, z_{j+1}, \dots, z_k).$$

Эту операцию назовём операцией переноса единицы (слева направо) из разряда с номером i в разряд с номером j.

Нетрудно понять, что для любого отличного от $\overline{\text{m}}(k, L)$ вектора $\overline{z} \in \mathfrak{M}(k, L)$ найдётся последовательность операций $\text{O}_{i_1,j_1}, \dots, \text{O}_{i_p,j_p}$, которая переведёт вектор $\overline{z}$ в вектор $\overline{\text{m}}(k, L)$, не выводя за пределы множества $\mathfrak{M}(k, L)$.

Осталось заметить, что если $\overline{z} \in \mathfrak{M}(k, L)$ и $\mathrm{O}_{i,j}(\overline{z}) \in \mathfrak{M}(k, L)$, то из того, что $z_i - 1 > z_j > 0$, следует, что

$$\begin{aligned}
\|\overline{z}\|_{-1} - \|\mathrm{O}_{i,j}(\overline{z})\|_{-1} &= \frac{1}{z_i} + \frac{1}{z_j} - \frac{1}{z_i - 1} - \frac{1}{z_j + 1} \\
&= \frac{1}{(z_i - 1)z_i} - \frac{1}{z_j(z_j + 1)} > 0, \\
\|\overline{z}\|_{\mathrm{C}} - \|\mathrm{O}_{i,j}(\overline{z})\|_{\mathrm{C}} &= \binom{z_i}{2} + \binom{z_j}{2} \\
&\quad - \binom{z_i - 1}{2} - \binom{z_j + 1}{2} = z_i - 1 - z_j > 0, \\
\|\overline{z}\|_{\mathrm{T}} - \|\mathrm{O}_{i,j}(\overline{z})\|_{\mathrm{T}} &= \left\lfloor \frac{(z_i - 1)^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(z_j - 1)^2}{4} \right\rfloor \\
&\quad - \left\lfloor \frac{(z_i - 2)^2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{z_j^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{z_i - 1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{z_j}{2} \right\rfloor \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Теорема 26 доказана.

Следствие 1. *При любых $k_1, \ldots, k_p$, L таких, что $1 \leqslant k_1, \ldots, k_p \leqslant L$, справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{p} \|\overline{\mathrm{m}}(k_i, L)\|_{\mathrm{T}} \geqslant \left\| \overline{\mathrm{m}}\left(\sum_{i=1}^{p} k_i, pL \right) \right\|_{\mathrm{T}}.$$

Лемма 50. *При любых k, L таких, что $1 \leqslant k \leqslant L$, справедливо неравенство $\|\overline{\mathrm{m}}(k, L)\|_{-1} > \|\overline{\mathrm{m}}(k, L + 1)\|_{-1}$.*

Доказательство. Пусть m, y, x — целые числа такие, что $m \geqslant 1$, $1 \leqslant x \leqslant k$ и

$$\overline{\mathrm{m}}(k, L) = (\underbrace{m + 1, \ldots, m + 1}_{y}, \underbrace{m, \ldots, m}_{x}).$$

Тогда из очевидного равенства $\|\overline{\mathrm{m}}(k, L + 1)\|_1 = L + 1 = \|\overline{\mathrm{m}}(k, L)\|_1 + 1$ следует, что

$$\overline{\mathrm{m}}(k, L + 1) = (\underbrace{m + 1, \ldots, m + 1}_{y+1}, \underbrace{m, \ldots, m}_{x-1}).$$

Поэтому справедливы соотношения

$$\|\overline{\mathrm{m}}(k, L)\|_{-1} - \|\overline{\mathrm{m}}(k, L + 1)\|_{-1} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m + 1} > 0.$$

Лемма 50 доказана.

Теорема 27. *При чётном $n \neq 2^k$ и при $n = 3$ для любого $L \leqslant n^2$ справедливо включение $\mathfrak{M}(2n, L) \subseteq \mathfrak{M}^4_{-1}$.*

Доказательство. При $L < 2n$ равенство $\mathfrak{M}(2n, L) = \varnothing$ верно, значит, утверждение теоремы очевидно.

Пусть $2n \leqslant L \leqslant n^2$. Для произвольного $\overline{z} \in \mathfrak{M}(2n, L)$ рассмотрим три возможных случая: 1) $\overline{z} \neq \overline{\mathrm{m}}(2n, L)$; 2) $L < n^2$; 3) $\overline{z} = \overline{\mathrm{m}}(2n, L)$ и $L = n^2$.

Из теоремы 26 и леммы 50 в первом и во втором случаях соответственно следует, что

$$\|\overline{z}\|_{-1} > \|\overline{\mathrm{m}}(2n, L)\|_{-1} \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2)\|_{-1},$$

$$\|\overline{z}\|_{-1} \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(2n, L)\|_{-1} > \|\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2)\|_{-1}.$$

В третьем случае равенство $\overline{z} = \overline{\mathrm{m}}(2n, L)$ и $L = n^2$ влечёт $\overline{z} = \overline{\mathrm{m}}(2n, n^2)$.

При чётном $n \neq 2^k$ очевидное равенство $\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2) = \left(\frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{2}\right)$ влечёт равенство $\|\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2)\|_{-1} = 2n \cdot \frac{2}{n} = 4$. Поэтому в случаях 1 и 2 включение $\overline{z} \in \mathfrak{M}^4_{-1}$ вытекает из строгого неравенства $\|\overline{z}\|_{-1} > 4$. Кроме того, ввиду того, что $n \neq 2^k$, компоненты вектора $\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2)$ не являются степенями двойки и, значит, $\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2) \in \mathfrak{M}^4_{-1}$. Тем самым в случае 3 включение $\overline{z} \in \mathfrak{M}^4_{-1}$ вытекает из равенства $\overline{z} = \overline{\mathrm{m}}(2n, n^2)$.

При $n = 3$ из равенства $\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2) = \overline{\mathrm{m}}(6, 9) = (2, 2, 2, 1, 1, 1)$ следует $\|\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2)\|_{-1} = 4\frac{1}{2} > 4$. Таким образом, во всех трёх случаях включение $\overline{z} \in \mathfrak{M}^4_{-1}$ вытекает из строгого неравенства $\|\overline{z}\|_{-1} \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2)\|_{-1} > 4$. Теорема 27 доказана.

Теорема 28. *При нечётном $n \geqslant 5$ для любого $L \leqslant n^2 + 1$ имеет место включение $\mathfrak{M}(2n, L) \subseteq \mathfrak{M}^4_{-1}$.*

Доказательство. При $L < 2n$ верно равенство $\mathfrak{M}(2n, L) = \varnothing$, поэтому утверждение теоремы очевидно.

Пусть $2n \leqslant L \leqslant n^2 + 1$ и $\overline{z} \in \mathfrak{M}(2n, L)$. Рассмотрим три возможных случая: 1) $\overline{z} \neq \overline{\mathrm{m}}(2n, L)$; 2) $L < n^2 + 1$; 3) $\overline{z} = \overline{\mathrm{m}}(2n, L)$ и $L = n^2 + 1$.

Из теоремы 26 и леммы 50 в первом и во втором случаях соответственно следует, что

$$\|\overline{v}\|_{-1} > \|\overline{\mathrm{m}}(2n, L)\|_{-1} \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2 + 1)\|_{-1},$$

$$\|\overline{v}\|_{-1} \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(2n, L)\|_{-1} > \|\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2 + 1)\|_{-1}.$$

В третьем случае в силу того, что $\overline{z} = \overline{\mathrm{m}}(2n, L)$ и $L = n^2 + 1$, имеем $\overline{z} = \overline{\mathrm{m}}(2n, n^2 + 1)$.

При нечётном $n \geqslant 5$ справедливо равенство

$$\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2 + 1) = (\underbrace{(n + 1)/2, \ldots, (n + 1)/2}_{n+1}, \underbrace{(n - 1)/2, \ldots, (n - 1)/2}_{n-1}).$$

Значит, $\|\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2+1)\|_{-1} = (n+1)\cdot\frac{2}{n+1} + (n-1)\cdot\frac{2}{n-1} = 4$. Поэтому в случаях 1 и 2 включение $\overline{z} \in \mathfrak{M}^4_{-1}$ вытекает из строгого неравенства $\|\overline{z}\|_{-1} > \|\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2+1)\|_{-1} = 4$. Кроме того, поскольку $n \geqslant 5$, имеем $(n-1)/2 > 1$. Значит, из равенства $(n+1)/2 - (n-1)/2 = 1$ следует, что хотя бы одно из двух чисел $(n+1)/2$ и $(n-1)/2$ не является степенью двойки. Следовательно, не все компоненты вектора $\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2+1)$ будут степенями двойки, а значит, $\overline{\mathrm{m}}(2n, n^2+1) \in \mathfrak{M}^4_{-1}$. Тем самым в случае 3 включение $\overline{z} \in \mathfrak{M}^4_{-1}$ вытекает из равенства $\overline{z} = \overline{\mathrm{m}}(2n, n^2+1)$. Теорема 28 доказана.

Теорема 29. *Для любого $L \leqslant 39$ справедливо включение*

$$\mathfrak{M}(12, L, 1) \subseteq \mathfrak{M}^4_{-1}.$$

Доказательство. При $L < 12$ имеем $\mathfrak{M}(12, L, 1) = \varnothing$, поэтому утверждение теоремы очевидно.

Пусть $12 \leqslant L \leqslant 39$. Для $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_{11}, 1) \in \mathfrak{M}(12, L, 1)$ через $\overline{z}'$ обозначим вектор $(z_1, \ldots, z_{11})$. Поскольку $\overline{z}' \in \mathfrak{M}(11, L-1)$ и имеют место соотношения $11 \leqslant L-1 \leqslant 38$, $\overline{\mathrm{m}}(11, 38) = (\underbrace{4, \ldots, 4}_{5}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{6})$, из теоремы 26 и леммы 50 следует, что

$$\|\overline{z}\|_{-1} = \|\overline{z}'\|_{-1} + 1 \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(11, L-1)\|_{-1} + 1 \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(11, 38)\|_{-1} + 1 = 4\frac{1}{4} > 4.$$

Тогда включение $\overline{z} \in \mathfrak{M}^4_{-1}$ вытекает из строгого неравенства $\|\overline{z}\|_{-1} > 4$. Теорема 29 доказана.

Теорема 30. *Для любого $L \leqslant 38$ справедливо включение*

$$\mathfrak{M}(12, L, 2, 2) \subseteq \mathfrak{M}^4_{-1}.$$

Доказательство. При $L < 24$ имеем $\mathfrak{M}(12, L, 2, 2) = \varnothing$, поэтому утверждение теоремы очевидно.

Пусть $24 \leqslant L \leqslant 38$. Для произвольного $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_{10}, 2, 2)$ из $\mathfrak{M}(12, L, 2, 2)$ через $\overline{z}''$ обозначим вектор $(z_1, \ldots, z_{10})$. Учитывая, что $\overline{z}'' \in \mathfrak{M}(10, L-4)$ и $20 \leqslant L-4 \leqslant 34$, рассмотрим три возможных случая: 1) $\overline{z}'' \neq \overline{\mathrm{m}}(10, L-4)$; 2) $L-4 < 34$; 3) $\overline{z}'' = \overline{\mathrm{m}}(10, L-4)$ и $L-4 = 34$.

Из теоремы 26 и леммы 50 в первом и во втором случаях соответственно следует, что

$$\|\overline{z}\|_{-1} = \|\overline{z}''\|_{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > \|\overline{\mathrm{m}}(10, L-4)\|_{-1} + 1 \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(10, 34)\|_{-1} + 1,$$

$$\|\overline{z}\|_{-1} = \|\overline{z}''\|_{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(10, L-4)\|_{-1} + 1 > \|\overline{\mathrm{m}}(10, 34)\|_{-1} + 1.$$

В третьем случае ввиду равенств $\overline{z}'' = \overline{\mathrm{m}}(10, L-4)$ и $L-4=34$ получаем $\overline{z}'' = \overline{\mathrm{m}}(10, 34)$.

Из того, что $\overline{\mathrm{m}}(10,34) = (\underbrace{4,\ldots,4}_{4}, \underbrace{3,\ldots,3}_{6})$, имеем $\|\overline{\mathrm{m}}(10,34)\|_{-1} = 3$. Поэтому в первом и во втором случаях включение $\overline{z} \in \mathfrak{M}^4_{-1}$ вытекает из строгого неравенства $\|\overline{z}\|_{-1} > \|\overline{\mathrm{m}}(10,34)\|_{-1} + 1 = 4$.

В случае 3 равенство $\overline{z}'' = \overline{\mathrm{m}}(10,34)$ влечёт $\overline{z} = (\underbrace{4,\ldots,4}_{4}, \underbrace{3,\ldots,3}_{6}, 2, 2)$. Тем самым не все компоненты вектора $\overline{z}$ являются степенями двойки. Значит, включение $\overline{z} \in \mathfrak{M}^4_{-1}$ вытекает из равенства $\|\overline{z}\|_{-1} = 4\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$. Теорема 30 доказана.

Лемма 51. *При любых k, L таких, что $1 \leqslant k < L$, справедливы неравенства*

$$\|\overline{\mathrm{m}}(k,L)\|_{\mathrm{C}} > \|\overline{\mathrm{m}}(k,L-1)\|_{\mathrm{C}}, \quad \|\overline{\mathrm{m}}(k,L)\|_{\mathrm{T}} \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(k,L-1)\|_{\mathrm{T}}.$$

Доказательство. Пусть m, y, x — целые числа такие, что $m \geqslant 1$, $1 \leqslant y \leqslant k$ и

$$\overline{\mathrm{m}}(k,L) = (\underbrace{m+1,\ldots,m+1}_{y}, \underbrace{m,\ldots,m}_{x}).$$

Тогда из очевидного равенства $\|\overline{\mathrm{m}}(k,L-1)\|_1 = L-1 = \|\overline{\mathrm{m}}(k,L)\|_1 - 1$ следует, что

$$\overline{\mathrm{m}}(k,L-1) = (\underbrace{m+1,\ldots,m+1}_{y-1}, \underbrace{m,\ldots,m}_{x+1}).$$

Поэтому справедливы неравенства

$$\|\overline{\mathrm{m}}(k,L)\|_{\mathrm{C}} - \|\overline{\mathrm{m}}(k,L-1)\|_{\mathrm{C}} = \binom{m+1}{2} - \binom{m}{2} > 0,$$

$$\|\overline{\mathrm{m}}(k,L)\|_{\mathrm{T}} - \|\overline{\mathrm{m}}(k,L-1)\|_{\mathrm{T}} = \left\lfloor \frac{m^2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(m-1)^2}{4} \right\rfloor \geqslant 0.$$

Лемма 51 доказана.

Теорема 31. *При любых k, L таких, что $1 \leqslant k < L$, верны неравенства*

$$\|\overline{\mathrm{m}}(k,L)\|_{\mathrm{C}} > \|\overline{\mathrm{m}}(k+1,L)\|_{\mathrm{C}}, \quad \|\overline{\mathrm{m}}(k,L)\|_{\mathrm{T}} \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(k+1,L)\|_{\mathrm{T}}.$$

Доказательство. Для произвольного p такого, что $1 \leqslant p < L$, через $\overline{\mathrm{m}}(p,L,1)$ обозначим вектор $\overline{z} = (z_1,\ldots,z_p,1) \in \mathfrak{M}(p+1, L+1)$ такой, что

$(z_1, \ldots, z_p) = \overline{\mathrm{m}}(p, L)$. Из леммы 51, включения $\overline{\mathrm{m}}(k, L-1, 1) \in \mathfrak{M}(k+1, L)$ и теоремы 26 следует, что

$$\|\overline{\mathrm{m}}(k, L)\|_{\mathrm{C}} > \|\overline{\mathrm{m}}(k, L-1)\|_{\mathrm{C}} = \|\overline{\mathrm{m}}(k, L-1, 1)\|_{\mathrm{C}} \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(k+1, L)\|_{\mathrm{C}},$$

$$\|\overline{\mathrm{m}}(k, L)\|_{\mathrm{T}} \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(k, L-1)\|_{\mathrm{T}} = \|\overline{\mathrm{m}}(k, L-1, 1)\|_{\mathrm{T}} \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(k+1, L)\|_{\mathrm{T}}.$$

Теорема 31 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Васильев Ю. Л., Рычков К. Л.** Формульная сложность тернарной линейной функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 3. С. 3–12.
2. **Васильев Ю. Л., Рычков К. Л.** Нижняя оценка формульной сложности тернарной линейной функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 4. С. 15–26.
3. **Рычков К. Л.** Модификация метода В. М. Храпченко и применение её к оценкам сложности П-схем для кодовых функций // Дискрет. анализ. Вып. 42. 1985. С. 91–98.
4. **Рычков К. Л.** О нижних оценках сложности параллельно-последовательных контактных схем, реализующих линейные булевы функции // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 4. С. 33–52.
5. **Рычков К. Л.** О нижних оценках формульной сложности линейной булевой функции // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 165–184.
6. **Рычков К. Л.** Достаточные условия локальной бесповторности минимальных π-схем, реализующих линейные булевы функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 5. С. 71–85.
7. **Субботовская Б. А.** О реализации линейных функций формулами в базисе $\vee, \&, ^-$ // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136, № 3. С. 553–555.
8. **Храпченко В. М.** О сложности реализации линейной функции в классе П-схем // Мат. заметки. 1971. Т. 9, № 1. С. 35–40.
9. **Храпченко В. М.** Об одном методе получения нижних оценок сложности П-схем // Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 1. С. 83–92.
10. **Черухин Д. Ю.** К вопросу о логическом представлении счётчика чётности // Неформальная наука. 2009. № 2. С. 14–23.
11. **Яблонский С. В.** Реализация линейной функции в классе П-схем // Докл. АН СССР. 1954. Т. 94, № 5. С. 805–806.
12. **Harary F.** Graph theory. Reading, MA: Addison-Wesley, 1969. 273 p.
13. **Håstad J.** The shrinkage exponent of de Morgan formulae is 2 // SIAM J. Comput. 1998. Vol. 27, No. 1. P. 48–64.
14. **Karchmer M., Wigderson A.** Monotone circuits for connectivity require super-logarithmics depth // SIAM J. Discrete Math. 1990. Vol. 3, No. 2. P. 255–265.

15. **Lee T.** A new rank technique for formula size lower bounds // Proc. 24th Annu. Symp. Theoretical Aspects of Computer Science (Aachen, Germany, Feb. 22–24, 2007). Heidelberg: Springer-Verl., 2007. P. 145–156. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 4393).
16. **Razborov A.** Applications of matrix methods to the theory of lower bounds in computational complexity // Combinatorica. 1990. Vol. 10, No. 1. P. 81–93.
17. **Turán P.** Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie // Mat. Fiz. Lapok. 1941. Vol. 48, No. 1. P. 436–452.
18. **Wegener I.** The complexity of Boolean functions. Chichester, UK: Wiley, 1987.

Рычков Константин Леонидович

Статья поступила
18 сентября 2017 г.

Исправленный вариант —
10 мая 2018 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2018. Volume 25, No. 3. P. 36–94

UDC 519.714 DOI: 10.17377/daio.2018.25.589

COMPLEXITY OF THE REALIZATION OF A LINEAR BOOLEAN FUNCTION IN THE CLASS OF π-SCHEMES

K. L. Rychkov

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: rychkov@math.nsc.ru

Abstract. Using Khrapchenko's method, we obtain the exact lower bound of 40 for the complexity in the class of π-schemes of a linear Boolean function depending substantially on 6 variables. We give a simplified proof of several lower bounds for the complexity of linear Boolean functions which are previously obtained on the basis of the same method. Bibliogr. 18.

Keywords: Boolean function, π-scheme, lower complexity bound.

REFERENCES

1. **S. V. Avgustinovich, Yu. L. Vasil'ev,** and **K. L. Rychkov,** The computation complexity in the class of formulas, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **19**, No. 3, 3–12, 2012 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **6**, No. 4, 403–409, 2012.
2. **Yu. L. Vasil'ev** and **K. L. Rychkov,** A lower bound on formula size of a ternary linear function, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **20**, No. 4, 15–26, 2013 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **7**, No. 4, 490–499, 2013.
3. **K. L. Rychkov,** A modification of Khrapchenko's method and its application to estimation of complexity of π-schemes for code functions, in *Methods of Discrete Analysis in Theory of Graphs and Schemes,* Vol. 42, pp. 91–98, Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1985 [Russian].
4. **K. L. Rychkov,** On the lower bounds for the complexity of serial-parallel contact circuits realizing linear Boolean functions, *Sib. Zh. Issled. Oper.,* **1**, No. 4, 33–52, 1994 [Russian]. Translated in *Discrete Analysis and Operations Research,* pp. 217–234, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996 (Math. Its Appl., Vol. 355).
5. **K. L. Rychkov,** Lower bounds on the formula complexity of a linear Boolean function, *Sib. Elektron. Mat. Izv.,* **11**, 165–184, 2014 [Russian].

6. **K. L. Rychkov,** Sufficient conditions for the minimal π-schemes for linear Boolean functions to be locally non-repeating, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **22**, No. 5, 71–85, 2015 [Russian].
7. **B. A. Subbotovskaya,** Realization of linear functions by formulas using $\vee$, &, $^-$, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **136**, No. 3, 553–555, 1961 [Russian]. Translated in *Sov. Math., Dokl.,* **2**, 110–112, 1961.
8. **V. M. Khrapchenko,** Complexity of the realization of a linear function in the class of Π-circuits, *Mat. Zametki,* **9**, No. 1, 35–40, 1971 [Russian]. Translated in *Math. Notes Acad. Sci. USSR,* **9**, No. 1, 21–23, 1971.
9. **V. M. Khrapchenko,** A method of determining lower bounds for the complexity of Π-schemes, *Mat. Zametki,* **10**, No. 1, 83–92, 1971 [Russian]. Translated in *Math. Notes Acad. Sci. USSR,* **10**, No. 1, 474–479, 1971.
10. **D. Yu. Cherukhin,** To the question of a logical representation for the parity counter, *Neform. Nauka,* No. 2, 14–23, 2009 [Russian].
11. **S. V. Yablonskii**, Realization of a linear function in the class of Π-circuits, *Dokl. Akad. Nauk SSSR, Nov. Ser.,* **94**, No. 5, 805–806, 1954 [Russian].
12. **F. Harary,** *Graph Theory,* Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
13. **J. Håstad,** The shrinkage exponent of de Morgan formulas is 2, *SIAM J. Comput.,* **27**, No. 1, 48–64, 1998.
14. **M. Karchmer** and **A. Wigderson,** Monotone circuits for connectivity require super-logarithmic depth, *SIAM J. Discrete Math.,* **3**, No. 2, 255–265, 1990.
15. **T. Lee,** A new rank technique for formula size lower bounds, in *Proc. 24th Annu. Symp. Theor. Asp. Comput. Sci., Aachen, Germany, Feb. 22–24, 2007,* pp. 145–156, Springer, Heidelberg, 2007 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 4393).
16. **A. A. Razborov,** Applications of matrix methods to the theory of lower bounds in computational complexity, *Combinatorica,* **10**, No. 1, 81–93, 1990.
17. **P. Turán,** Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie, *Mat. Fiz. Lapok,* **48**, No. 1, 436–452, 1941 [Hungarian].
18. **I. Wegener,** *The Complexity of Boolean Functions,* Wiley, Chichester, UK, 1987.

Konstantin L. Rychkov

Received
18 September 2017
Revised
10 May 2018