ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2018. Том 25, № 3. С. 126–151

УДК 519.714.7 DOI: 10.17377/daio.2018.25.601

О СЛОЖНОСТИ МИНИМИЗАЦИИ КВАЗИЦИКЛИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ *)

И. П. Чухров

Институт автоматизации проектирования РАН,
ул. 2-я Брестская, 19/18, 123056 Москва, Россия

E-mail: chip@icad.org.ru

Аннотация. Исследуются булевы функции, которые сочетают экстремальные значения характеристик сложности минимизации, неприменимость локальных методов сокращения трудоёмкости перебора и невозможность эффективного использования достаточных условий минимальности. Построены квазициклические функции, которые обладают свойствами циклических и поясковых функций, доминирования множеств вершин, выполнимостью достаточных условий минимальности, основанных на независимых семействах множеств. Для таких функций получены экспоненциальные нижние оценки протяжённости и специальных множеств, а также дважды экспоненциальная нижняя оценка числа кратчайших и минимальных комплексов граней с различными множествами собственных вершин. Библиогр. 13.

Ключевые слова: минимизация булевых функций, сложность, протяжённость, доминирование, семейство независимых множеств.

Введение

Для представления булевых функций обычно используются две эквивалентные модели — аналитическая и геометрическая. В аналитической модели используются понятия булевой функции, импликанты, дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ), зависящие от n переменных. В геометрической модели эквивалентными понятиями являются подмножество вершин, грань, комплекс граней в n-мерном единичном кубе. При изложении будем использовать следующие понятия и обозначения для n-мерного единичного куба B^n и множества булевых функций n переменных P_n.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16–01–00593а) и Федерального агентства научных организаций России (госзадание № 115022670011).

Гранью единичного куба B^n называется множество вершин

$$B^{n,\alpha_1,\dots,\alpha_k}_{i_1,\dots,i_k} = \{\widetilde{x} = (x_1,\dots,x_n) \in B^n \mid x_{i_1} = \alpha_1,\dots,x_{i_k} = \alpha_k\},$$

где $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$ и $\alpha_s \in \{0,1\}$ для $s = 1,\dots,k$. Множество индексов $\{i_1,\dots,i_k\}$ называется *направлением* грани. *Рангом* и *размерностью* грани называются числа k и $n-k$ соответственно. Вершина единичного куба B^n является гранью ранга n и размерности 0. Вершины $(0,\dots,0) \in B^k$ и $(1,\dots,1) \in B^k$ обозначим через $\tilde{0}^k$ и $\tilde{1}^k$ соответственно.

Декартово произведение граней $g_1 = B^{r,\alpha_1,\dots,\alpha_s}_{i_1,\dots,i_s}$ и $g_2 = B^{n-r,\beta_1,\dots,\beta_t}_{j_1,\dots,j_t}$ является гранью $g = g_1 \times g_2 = B^{n,\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_1,\dots,\beta_t}_{i_1,\dots,i_s,j_1+r,\dots,j_t+r}$.

В единичном кубе B^n введём следующие обозначения:

B^n_m — слой куба с номером m, т. е. множество вершин, в которых число единичных координат равно m, где $0 \leqslant m \leqslant n$;

$S^n_{m-h,m}$ — пояс куба, т. е. множество вершин слоёв куба с номерами $m-h,\dots,m$, где $0 \leqslant h \leqslant m \leqslant n$;

G^n — множество всех различных граней;

$N_M = \bigcup\limits_{g\in M} g \subseteq B^n$ — множество вершин комплекса граней $M \subseteq G^n$;

$N_f = \{\widetilde{\alpha} \in B^n \mid f(\widetilde{\alpha}) = 1\} \subseteq B^n$ — множество единичных вершин функции $f \in P_n$.

Грань $g \subseteq N_f$ называется *гранью функции* f, а если любая грань $g' \supset g$ не содержится в множестве N_f, то *максимальной гранью функции* f. Комплекс граней $M \subseteq G^n$ называется *комплексом функции* $f \in P_n$, если $N_M = N_f$.

Множества всех граней и максимальных граней функции f обозначим через G_f и S_f соответственно. Множество максимальных граней функции f, которые содержат вершину $\widetilde{\alpha} \in N_f$, обозначим через $S_f(\widetilde{\alpha}) = \{g \in S_f \mid \widetilde{\alpha} \in g\}$. Минимальное число максимальных граней, которые содержат вершину функции f, обозначим через $\sigma_f = \min\limits_{\widetilde{\alpha}\in N_f} |S_f(\widetilde{\alpha})|$.

Мерой сложности комплексов граней (или *ДНФ*) называется функционал $\mathcal{L}$, определённый на множестве всех комплексов граней и удовлетворяющий аксиомам неотрицательности, монотонности относительно умножения, выпуклости относительно сложения и инвариантности относительно изоморфизма [10]. Мера сложности называется *аддитивной*, если сложность любого комплекса граней равна сумме сложностей граней.

Задача минимизации булевой функции f заключается в нахождении комплекса граней минимальной сложности $\mathcal{L}(f)$, содержащего множество единичных вершин функции. Множества всех комплексов макси-

мальных граней функции f и минимальных относительно меры сложности $\mathcal{L}$ обозначим через $\mathcal{M}(f)$ и $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)$ соответственно.

Если сложность любой грани равна 1, то аддитивная мера сложности обозначается через l и называется *длиной*. Если сложность любой грани равна рангу грани, то аддитивная мера сложности обозначается через L. Минимальные комплексы относительно мер сложности l и L называются *кратчайшими* и *минимальными* соответственно. Множество кратчайших и минимальных комплексов функции f обозначим через $\mathcal{M}_{l\cap L}(f)$.

Задача минимизации булевых функций для аддитивной меры сложности может быть сформулирована как задача о минимальном покрытии множества обобщённого вида [11].

Комбинаторная постановка задачи о минимальном покрытии множества определяется системой множеств $\langle X, Y\rangle$, где X — конечное множество элементов, $Y \subseteq 2^X \setminus \{\varnothing\}$ — семейство различных множеств, и неотрицательным аддитивным функционалом сложности $C\colon Y \to \mathbb{R}^+$. Семейство $S \subseteq Y$ является *покрытием* множества $X_S = \bigcup\limits_{x\in S} y$, и его *сложность* задаётся соотношением $C(S) = \sum\limits_{y\in S} C(y)$. Задача о минимальном покрытии $\langle X, Y, C\rangle$ заключается в нахождении семейства $S \subseteq Y$ минимальной сложности $C(X, Y)$, для которого $X_S = X$.

Для произвольного подмножества $A \subset X$ определим две задачи обобщённого вида $\langle A, X, Y, C\rangle$: найти семейство $S \subseteq Y$ минимальной сложности, которое (i) покрывает A, т. е. $A = X_S$, или (ii) содержит A, т. е. $A \subseteq X_S$. Сложность минимального покрытия для таких задач обозначим через $C(A, X, Y)$ и $\widetilde{C}(A, X, Y)$ соответственно. Очевидно, что $\widetilde{C}(A, X, Y) \leqslant C(A, X, Y)$ для любого $A \subset X$ и эти задачи могут быть сведены к стандартной постановке задачи о минимальном покрытии.

Протяжённостью функции называется диаметр наибольшей из компонент *интервального графа*, вершинами которого являются максимальные грани функции, а рёбрами — пары пересекающихся граней. Протяжённость функции f обозначается через $p(f)$.

Зависимость между единичными вершинами функции определяется *графом зависимости*, вершинами которого являются единичные вершины функции, а рёбрами — пары вершин, принадлежащие одной грани.

Расстоянием между вершинами $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in B^n$ и *множествами вершин* $X, Y \subset B^n$ называются значения $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = |\{i \mid x_i \neq y_i,\ i = 1, \ldots, n\}|$ и $\rho(X, Y) = \min\limits_{\widetilde{x}\in X,\, \widetilde{y}\in Y} \rho(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ соответственно.

Используемые, но не определяемые понятия можно найти в [1, 10].

Целую часть и верхнюю целую часть числа x будем обозначать через $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ соответственно. Через $o(1)$ обозначаем величину, стремящуюся к нулю при $n \to \infty$, а через $\Theta(\varphi(n))$ для функции $\varphi(n) > 0$ обозначаем произвольную функцию $\psi(n) > 0$, для которой существуют такие константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что $c_1\varphi(n) \leqslant \psi(n) \leqslant c_2\varphi(n)$ при $n \to \infty$.

Исследования оптимизационных задач для булевых функций, связанные с нахождением минимальной ДНФ и минимальной сложности преобразований, выполняемых для упрощения ДНФ, показывают, что такие задачи являются естественными задачами оптимизации, содержащимися во втором уровне полиномиальной иерархии [13]. Поэтому основным направлением исследований является разработка эффективных методов сокращения трудоёмкости поиска точного решения задачи минимизации.

Локальные подходы позволяют отодвинуть применение переборных схем и сократить их вычислительную трудоёмкость. Они основаны на исследовании «геометрической» структуры множества максимальных граней булевой функции. Однако локальные подходы оказываются неэффективными при минимизации булевых функций большой протяжённости, например, для циклических функций [4, разд. 2.2.14]. При этом задача о минимальном покрытии, если максимальное число элементов, покрываемых одним множеством, равно k, полиномиально разрешима при $k = 2$ и NP-трудна для каждого фиксированного значения $k \geqslant 3$ [2, прил. A3].

Решение задачи минимизации булевой функции для несокращаемого множества максимальных граней, которое называется *циклическим ядром* [12], выполняется с использованием переборных схем. Локальные экстремумы, т. е. тупиковые комплексы функции, в некотором количестве находятся достаточно эффективно. Поиск глобального экстремума, т. е. минимального комплекса, невозможен без полного перебора всех локальных экстремумов, если нет эффективно проверяемых достаточных условий минимальности. Соответственно число тупиковых и число минимальных комплексов являются обобщёнными характеристиками выполнимости перебора при минимизации конкретной булевой функции.

Результаты исследований различных классов булевых функций с экстремальными и типичными значениями параметров, характеризующих трудоёмкость различных подходов к минимизации булевых функций, представлены в обзорных статьях [1,5,8]. Например, «плотные» функции имеют ограниченную протяжённость, экспоненциальный разброс длин и дважды экспоненциальное число тупиковых комплексов [1, разд. 3.2.7].

1. Описание конструкции

Для построения и оценки характеристик квазициклических булевых функций используются

(i) циклические функции экспоненциальной протяжённости,

(ii) поясковые функции ограниченной протяжённости,

(iii) доминирование множеств в задаче о минимальном покрытии,

(iv) достаточные условия минимальности, основанные на независимых семействах множеств.

(v) преобразования функций, которые сохраняют метрические свойства множеств вершин в единичном кубе.

Квазициклическая функция определяется по циклической и поясковым функциям с использованием операции бесповторного произведения. Свойства циклических, поясковых функций и бесповторного произведения обеспечивают возможность применения достаточных условий минимальности для описания кратчайших и минимальных комплексов квазициклических функций.

Определение 1. Булева функция $f \in P_n$ называется *k-циклической*, если интервальный граф функции является циклом, максимальная размерность граней равна k и каждое пересечение максимальных граней содержит одну вершину. Множество k-циклических функций n переменных обозначим через $C_{n,k}$.

Для k-циклической функции f при определённой последовательности нумерации $I_f = \{1, \dots, p+1\}$ максимальных граней $S_f = \{g_i,\, i \in I_f\}$ рёбрами интервального графа будет множество $\{(g_i, g_{i+1})\}_{i=1}^{p} \cup (g_{p+1}, g_1)$ и протяжённость $p(f)$ равна $|S_f| - 1 = p$.

Для k-циклической функции f введём следующие обозначения:

$k_f = \{k_i,\, i \in I_f\}$ — размерности максимальных граней;

$A_f = \{\widetilde{\alpha}_i,\, i \in I_f\}$ — вершины, которые содержатся в пересечении максимальных граней, где $g_i \cap g_{i+1} = \{\widetilde{\alpha}_{i+1}\}$ для $i = 1, \dots, p$ и $g_{p+1} \cap g_1 = \{\widetilde{\alpha}_1\}$, т. е. $\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1} \in g_i$ для $i = 1, \dots, p$ и $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_{p+1} \in g_{p+1}$;

$d_f = \{d_i,\, i \in I_f\}$ — расстояния между вершинами множества A_f, где $d_i = \rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1})$ для $i = 1, \dots, p$ и $d_{p+1} = \rho(\widetilde{\alpha}_{p+1}, \widetilde{\alpha}_1)$;

$I_f^{\ker} = \{i \in I_f \mid k_i \geqslant 2\}$ — номера ядровых граней, которыми являются все грани размерности больше 1.

Множество собственных вершин ядровых граней обозначим через

$$W_f = N_f \setminus A_f = \bigcup_{i \in I_f^{\ker}} (g_i \setminus A_f).$$

Для k-циклической функции f^* соответствующие последовательности будем обозначать через I_{f^*}, $k_{f^*} = \{k_i^*,\ i \in I_{f^*}\}$, $A_{f^*} = \{\widetilde{\alpha}_i^*,\ i \in I_{f^*}\}$ и т. д.

Так как $d_1 + \cdots + d_{p+1} \equiv 0 \pmod 2$ для k-циклической функции, функция имеет нечётное число максимальных граней, если для нечётного числа граней расстояние d_i является нечётным числом. 1-Циклическая функция всегда имеет чётное число максимальных граней.

Свойства k-циклических функций вытекают из свойств циклического графа с m вершинами и m рёбрами, для которого мощность максимального независимого множества равна $\lfloor m/2 \rfloor$ и длина кратчайшего рёберного покрытия равна $\lceil m/2 \rceil$. Поэтому кратчайшие покрытия состоят при чётном m из несмежных рёбер и их число равно 2, а при нечётном m из двух смежных и несмежных рёбер, а их число равно m.

Для 1-циклических функций есть ровно два кратчайших покрытия [4, разд. 2.2.14]. Максимальное значение протяжённости функции $f \in P_n$ по порядку равно 2^n и достигается на 1-циклических функциях [3].

Построение k-циклических функций с определёнными свойствами основано на специальных преобразованиях циклических функций.

Лемма 1. (i) *Для функции $f \in C_{n-k,k}$ существует преобразование в функцию $f^* \in C_{n,k}$, для которой есть такое подмножество индексов $\mathcal{I} \subset I_{f^*}$, что $k_i = k_i^*$, $d_i = d_i^*$, если $i \in I_{f^*} \setminus \mathcal{I}$, $k_i^* = d_i^* = k$ и вершины пересечения грани g_i^* являются минимальной и максимальной вершинами грани, если $i \in \mathcal{I}$, и*

$$p(f^*) \geqslant p(f) + |\mathcal{I}| \geqslant p(f) + 2\left\lfloor \frac{1}{4}(p(f)+1) \right\rfloor.$$

(ii) *Для функции $f \in C_{n-3k,k}$ и $0 < \Delta k < k$ существует преобразование в функцию $f^* \in C_{n,k^*}$, для которой $p(f^*) = p(f)$, $k_i \leqslant k_i^* \leqslant k_i + \Delta k$ для $i \in I_f = I_{f^*}$ и $k^* = \max\{k_i^*,\ i \in I_{f^*}\}$.*

Любая грань $g_i \in S_f$ размерности $k_i \geqslant 2$, для которой минимальная и максимальная вершины являются вершинами пересечения, может быть заменена монотонной цепью граней, которые содержатся в ней, попарно пересекаются по максимальным и минимальным вершинам и имеют суммарную размерность k_i. Поэтому при замене одной такой грани двумя гранями изменяется чётность числа максимальных граней функции.

Векторы переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(x_r, \ldots, x_{r+k})$ обозначим через $\tilde{x}^n$ и $\tilde{x}^{r,r+k}$ соответственно.

Определение 2. Булеву функцию $f \in P_n$, для которой $N_f = S^n_{m-h,m}$, где $0 \leqslant h \leqslant m \leqslant n$, будем называть *поясковой* и обозначать через $S^n_{m-h,m}(\tilde{x}^n)$.

Максимальные грани поясковой функции имеют размерность h, а минимальная и максимальная вершины граней содержатся в слоях куба B^n_{m-h} и B^n_m соответственно. Значение поясковой функции не изменяется при любой перестановке переменных, т. е. поясковая функция является симметрической. Для поясковой функции $f = S^n_{m-h,m}$ имеем

$$p(f) = \lceil n/h \rceil, \quad |N_f| = \sum_{i=m-h}^{m} \binom{n}{i}, \quad |S_f| = \binom{n}{m}\binom{m}{h},$$
$$\sigma_f = \min\left\{ \binom{n-m+h}{h}, \binom{m}{h} \right\}, \quad l(f) = \max\left\{ \binom{n}{m-h}, \binom{n}{m} \right\},$$
$$L(f) = l(f)(n-h),$$

слои куба B^n_{m-h} и B^n_m являются независимыми множествами вершин, любая максимальная грань входит в некоторый кратчайший и минимальный комплекс.

Если параметры поясковой функции $f = S^n_{m-h,m}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$1 \leqslant h < m \leqslant \frac{n}{2}, \quad 0 \leqslant \frac{n}{2} - m = o(\sqrt{n}), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \frac{h}{m} \leqslant 1 - \varepsilon,$$

то [9]

$$p(f) = \Theta(1), \quad |N_f| \sim 2^{n-1},$$
$$|S_f| = 2^{n+m\mathcal{H}(h/m)}\Theta(n^{-1}) \geqslant 2^{n(1+\frac{1}{2}\mathcal{H}(\varepsilon))}\Theta(n^{-1}),$$
$$\log \mu_L(S^n_{m-h,m}) \sim \binom{n}{m} \log \binom{m}{h} \quad \text{при } n \to \infty,$$

где $\mathcal{H}(z) = -z\log z - (1-z)\log(1-z)$ для $0 < z < 1$, $\log$ — логарифм по основанию 2. Такая функция имеет ограниченную протяжённость, дважды экспоненциальное число минимальных комплексов, и число её максимальных граней экспоненциально превосходит число единичных вершин.

Определение 3. Для системы множеств $\langle X, Y \rangle$ и подмножеств A, B множества X выполняется *отношение доминирования* $A \succ B$, если для любого семейства множеств $S \subseteq Y$ из $A \subseteq X_S$ следует, что $B \subseteq X_S$.

Очевидно, из того, что $A_1 \succ B_1$ и $A_2 \succ B_2$, следует $A_1 \cup A_2 \succ B_1 \cup B_2$. В задаче о минимальном покрытии для сокращения размерности системы множеств $\langle X, Y\rangle$ используется отношение доминирования только для одноэлементных множеств $A = \{x_A\}$ и $B = \{x_B\}$ [12]. В этом случае достаточно рассматривать множества $y \in Y$, а не семейства множеств $S \subseteq Y$, т. е. $A \succ B$, если для любого $y \in Y$ из $x_A \in y$ следует, что $x_B \in y$.

Определение 4. *Независимым семейством множеств* для системы множеств $\langle X, Y\rangle$ называется семейство $\mathcal{A} = \{A \mid A \subset X\}$, если любое множество $y \in Y$ пересекается не более чем с одним множеством $A \in \mathcal{A}$.

Лемма 2. *Пусть* $f = f_1 \vee f_2 \in P_{n-2}$ *и*

$$\begin{aligned} D_f(\tilde{x}^n) &= \overline{x}_{n-1}\overline{x}_n f(\tilde{x}^{n-2}) \vee \overline{x}_{n-1}x_n f_1(\tilde{x}^{n-2}) \vee x_{n-1}\overline{x}_n f_2(\tilde{x}^{n-2}) \\ &= \overline{x}_{n-1} f_1(\tilde{x}^{n-2}) \vee \overline{x}_n f_2(\tilde{x}^{n-2}). \end{aligned} \tag{1}$$

(i) *Для системы* $\langle N_{D_f}, S_{D_f}\rangle$ *множества вершин* $\left\{N^{0,1}_{D_f}, N^{1,0}_{D_f}\right\}$ *образуют независимое семейство и* $N^{0,1}_{D_f} \cup N^{1,0}_{D_f} \succ N^{0,0}_{D_f}$, *где*

$$N^{\sigma_{n-1},\sigma_n}_{D_f} = N_{D_f} \cap B^{n,\sigma_{n-1},\sigma_n}_{n-1,n} \quad \text{для } \sigma_{n-1}, \sigma_n \in \{0, 1\}.$$

(ii) *Для задачи о минимальном покрытии* $\langle N_{D_f}, S_{D_f}, \mathcal{L}\rangle$ *выполняется*

$$\mathcal{L}(D_f) = \mathcal{L}(\overline{x}_{n-1} f_1) + \mathcal{L}(\overline{x}_n f_2)$$

и, если $M_1 \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\overline{x}_{n-1} f_1)$ *и* $M_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\overline{x}_n f_2)$, *то* $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(D_f)$.

(iii) *В единичном кубе* B^n *грань* g *принадлежит* S_{D_f} *тогда и только тогда, когда или* $g = \widetilde{g} \times B^{2,0}_1$ *и* $\widetilde{g} \in S_{f_1}$, *или* $g = \widetilde{g} \times B^{2,0}_2$ *и* $\widetilde{g} \in S_{f_2}$, *или* $g = \widetilde{g} \times B^{2,0,0}_{1,2}$ *и* $\widetilde{g} \in S_f \setminus (S_{f_1} \cup S_{f_2})$.

Для задачи о покрытии множеств достаточные условия минимальности [11] используют понятие независимого семейства множеств.

Семейство множеств, которые пересекаются с множеством элементов $A \subseteq X$, обозначим через $Y_A \subseteq Y$. Отметим, что для любого множества элементов $A \subset X$ имеет место однозначное представление в виде объединения попарно не пересекающихся множеств: $X_{Y_A} = A \cup X^{\succ}_A \cup \bar{X}^{\succ}_A \subseteq X$, где $A \succ X^{\succ}_A$, $\bar{X}^{\succ}_A = X_{Y_A} \setminus (A \cup X^{\succ}_A)$ и некоторые множества могут быть пустыми. Тогда для независимого семейства множеств $\mathcal{A}$ системы $\langle X, Y\rangle$ выполняется [11, с. 96]

$$C(X, Y) \geqslant \sum_{A \in \mathcal{A}} \widetilde{C}(A, X, Y), \tag{2}$$

$$C(X, Y) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \widetilde{C}(A, X, Y), \quad \text{если } X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (A \cup X^{\succ}_A). \tag{3}$$

Определение 5. *Бесповторным* называется произведение функций, которые не имеют общих переменных.

Для функций $f_1 \in P_r$ и $f_2 \in P_{n-r}$ введём следующие обозначения:

$f_1 \times f_2 \in P_n$ — бесповторное произведение функций, где $N_{f_1 \times f_2}$ является декартовым произведением множеств $N_{f_1} \subseteq B^r$ и $N_{f_2} \subseteq B^{n-r}$;

$M_1 \times M_2 = \{g = g_1 \times g_2 \in G^n \mid g_i \in M_i \subseteq \mathcal{M}(f_i),\ i = 1, 2\}$ — произведение комплексов граней;

$\mathcal{M}(f_1) \times \mathcal{M}(f_2) = \{M_1 \times M_2 \mid M_i \in \mathcal{M}(f_i),\ i = 1, 2\} \subseteq \mathcal{M}(f_1 \times f_2)$ — произведение множеств комплексов граней $\mathcal{M}(f_1)$ и $\mathcal{M}(f_2)$.

Для множеств всех граней и максимальных граней функций выполняется $G_{f_1 \times f_2} = G_{f_1} \times G_{f_2}$ и $S_{f_1 \times f_2} = S_{f_1} \times S_{f_2}$. Отметим, что

$$\begin{gathered} l(M_1 \times M_2) = l(M_1) l(M_2), \\ L(M_1 \times M_2) = L(M_1) l(M_2) + l(M_1) L(M_2), \end{gathered} \tag{4}$$

но может быть $l(f_1) l(f_2) > l(f_1 \times f_2)$ [1, разд. 3.2.4].

Лемма 3. *Для бесповторного произведения функций $f_1 \in P_r$ и $f_2 \in P_{n-r}$, множества вершин $Q_1 \subset N_{f_1}$ и независимого множества вершин $Q_2 \subset N_{f_2}$ функции f_2 семейство множеств $\mathcal{A} = \{Q_1 \times \{\widetilde{x}\}, \widetilde{x} \in Q_2\}$ является независимым семейством множеств функции $f_1 \times f_2 \in P_n$.*

Определим бинарное отношение $\mathcal{R}_{f,L}$ на множествах вершин и комплексах максимальных граней функции f, которое является достаточным условием принадлежности комплекса множеству $\mathcal{M}_{l \cap L}(f)$.

Определение 6. Для пары (Q, M) выполнено $(Q, M) \in \mathcal{R}_{f,L}$, если Q — независимое множество вершин функции f, для каждой вершины $\widetilde{\alpha} \in Q$ все грани $g \in S_f(\widetilde{\alpha})$ имеют одинаковую сложность, $M \in \mathcal{M}(f)$ и $|M| = |Q|$.

Лемма 4. (i) *Если $(Q, M) \in \mathcal{R}_{f,L}$, то $M \in \mathcal{M}_{l \cap L}(f)$.*

(ii) *Если $(Q_1, M_1) \in \mathcal{R}_{f_1,L}$ и $(Q_2, M_2) \in \mathcal{R}_{f_2,L}$, то*

$$(Q_1 \times Q_2, M_1 \times M_2) \in \mathcal{R}_{f_1 \times f_2, L} \quad \text{и} \quad M_1 \times M_2 \in \mathcal{M}_{l \cap L}(f_1 \times f_2).$$

(iii) *Если для каждой грани $g_i \in S_{f_i}$ есть пара $(Q_i, M_i) \in \mathcal{R}_{f_i,L}$ и $g_i \in M_i$, где $i = 1, 2$, то любая максимальная грань функции $f_1 \times f_2$ входит в некоторый кратчайший и минимальный комплекс.*

2. Основные результаты

Функции, для которых единичными вершинами являются множества вершин A_f и $W_f = N_f \setminus A_f$ циклической функции $f \in C_{r,k}$, где $1 \leqslant k < r$, обозначим через f_A и f_W соответственно. Тогда

$$f_A(\tilde{x}^r) = 1 \quad \text{для } \tilde{x}^r \in A_f = \{\widetilde{\alpha}_i,\, i \in I_f\},$$
$$f_W(\tilde{x}^r) = \bigvee_{i \in I_f} w_i(\tilde{x}^r),$$

где $w_i(\tilde{x}^r) = 1$, если $\tilde{x}^r \in g_i \setminus A_f$ и $g_i \in S_f$, для $i \in I_f = \{1, \ldots, p+1\}$.

Очевидно, что $f(\tilde{x}^r) = f_A(\tilde{x}^r) \vee f_W(\tilde{x}^r)$ и $f_A(\tilde{x}^r) f_W(\tilde{x}^r) \equiv 0$.

Функция $w_i(\tilde{x}^r)$ для $i \in I_f$ является компонентой связности функции $f_W(\tilde{x}^r)$ и представляется k_i-мерной гранью куба B^r с двумя нулевыми вершинами из множества A_f на расстоянии $d_i \leqslant k_i$. Следовательно, $w_i(\tilde{x}^r) \equiv 0$, если $k_i = 1$, и $f_W(\tilde{x}^r) \equiv 0$ для $f \in C_{r,1}$.

Множество квазициклических функций $\mathcal{F}^n_{r,k}(m, h, h_1, h_2) \subset P_n$ определяется по циклическим функциям следующим соотношением:

$$F_f(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^r) H(\tilde{x}^{r+1,n-2}) \overline{x}_{n-1} \overline{x}_n \\ \vee f_W(\tilde{x}^r)(H_1(\tilde{x}^{r+1,n-2}) \overline{x}_{n-1} x_n \vee H_2(\tilde{x}^{r+1,n-2}) x_{n-1} \overline{x}_n),$$

где $f \in C_{r,k}$ и H, H_1, H_2 — поясковые функции, для которых

$$N_H = S^{n-r-2}_{m-h,m}, \quad N_{H_1} = S^{n-r-2}_{m-h,m-h_1}, \quad N_{H_2} = S^{n-r-2}_{m-h_2,m},$$

и параметры удовлетворяют ограничениям

$$1 \leqslant k < r < n, \quad 1 \leqslant h_1 - 1 \leqslant h_2 < h < m \leqslant \frac{n-r-2}{2}.$$

Функции $H(\tilde{x}^{r+1,n-2}) \overline{x}_{n-1} \overline{x}_n$, $H_1(\tilde{x}^{r+1,n-2}) \overline{x}_{n-1}$ и $H_2(\tilde{x}^{r+1,n-2}) \overline{x}_n$ обозначим через $\widehat{H}(\tilde{x}^{r+1,n})$, $\widehat{H}_1(\tilde{x}^{r+1,n})$ и $\widehat{H}_2(\tilde{x}^{r+1,n})$ соответственно.

Для квазициклической функции справедливо представление

$$F_f(\tilde{x}^n) = F_A(\tilde{x}^n) \vee F_W(\tilde{x}^n),$$

где

$$F_A(\tilde{x}^n) = f_A(\tilde{x}^r) \widehat{H}(\tilde{x}^{r+1,n}),$$
$$F_W(\tilde{x}^n) = f_W(\tilde{x}^r)(\widehat{H}_1(\tilde{x}^{r+1,n}) \vee \widehat{H}_2(\tilde{x}^{r+1,n})) \\ = F_{W,1}(\tilde{x}^n) \vee \cdots \vee F_{W,p+1}(\tilde{x}^n), \tag{5}$$
$$F_{W,i}(\tilde{x}^n) = w_i(\tilde{x}^r)(\widehat{H}_1(\tilde{x}^{r+1,n}) \vee \widehat{H}_2(\tilde{x}^{r+1,n})) \\ = w_i(\tilde{x}^r) \widehat{H}(\tilde{x}^{r+1,n}) \vee w_i(\tilde{x}^r)(\widehat{H}_1(\tilde{x}^{r+1,n}) \vee \widehat{H}_2(\tilde{x}^{r+1,n})), \quad i \in I_f. \tag{6}$$

Для функций φ и ψ таких, что $N_\psi \subset N_\varphi$, сложность и множество $\mathcal{L}$-минимальных комплексов граней функции φ, которые *содержат* подмножество $N_\psi \subset N_\varphi$, обозначим через $\widetilde{\mathcal{L}}(\varphi, \psi)$ и $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathcal{L}}}(\varphi, \psi)$ соответственно.

Теорема 1. *Для функции $F_f \in \mathcal{F}^n_{r,k}(m, h, h_1, h_2)$ выполняются следующие утверждения.*

(i) $S_{F_f} = S_f \times S_{\widehat{H}} \cup S_{F_W}$ *и* $S_{F_W} = \bigcup\limits_{i \in I_f} S_{F_{W,i}}$, *где*

$$S_{F_{W,i}} = \begin{cases} S_{w_i} \times S_{\widehat{H}_1} \cup S_{w_i} \times S_{\widehat{H}_2} & \text{для } i \in I^{\ker}_f, \\ \varnothing & \text{для } i \in I_f \setminus I^{\ker}_f. \end{cases}$$

(ii) $N^{0,1}_{F_{W,i}} \cup N^{1,0}_{F_{W,i}} \succ N^{0,0}_{F_{W,i}}$ *для* $i \in I^{\ker}_f$ *и тогда* $N^{0,1}_{F_W} \cup N^{1,0}_{F_W} \succ N^{0,0}_{F_W}$, *где*

$$N^{\sigma_1,\sigma_2}_F = N_F \cap B^{n,\sigma_1,\sigma_2}_{n-1,n} \quad \text{для } F \in P_n \text{ и } \sigma_1, \sigma_2 \in \{0, 1\}.$$

(iii) $\mathcal{L}(F_f) = \widetilde{\mathcal{L}}(F_f, F_A) + \mathcal{L}(F_W)$ *и, если* $M_1 \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(F_f, F_A)$ *и* $M_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(F_W)$, *то* $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(F_f)$.

(iv) *Если функция* $f_{A,\widetilde{\alpha}} \in P_n$ *такая, что* $N_{f_{A,\widetilde{\alpha}}} = A_f \times \{\widetilde{\alpha}\} \times \tilde{0}^2$, *где* $\widetilde{\alpha} \in B^{n-r-2}_m$, *то* $\mathcal{A} = \{N_{f_{A,\widetilde{\alpha}}},\ \widetilde{\alpha} \in B^{n-r-2}_m\}$ *является независимым семейством множеств системы* $\langle N_{F_f}, S_{F_f} \rangle$ *и для любой вершины* $\widetilde{\alpha} \in B^{n-r-2}_m$ *верно*

$$\widetilde{\mathcal{L}}(F_f, F_A) \geqslant \widetilde{\mathcal{L}}(F_f, f_{A,\widetilde{\alpha}}) \bigl|B^{n-r-2}_m\bigr|. \tag{7}$$

(v) *Справедливы соотношения*

$$\tilde{l}(F_f, F_A) = \tilde{l}(f, f_A) l(\widehat{H}), \quad \widetilde{L}(F_f, F_A) \geqslant \widetilde{L}(f, f_A) l(\widehat{H}) + \tilde{l}(f, f_A) L(\widehat{H}), \tag{8}$$

при этом равенство достигается, если $\mathcal{M}_{l \cap L}(f, f_A) \neq \varnothing$, *т. е. комплекс* $M_1 \times M_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}_{l \cap L}(F_f, F_A)$, *если*

$$M_1 \in \widetilde{\mathcal{M}}_{l \cap L}(f, f_A), \quad M_2 \in \mathcal{M}_L(\widehat{H}) = \mathcal{M}_l(\widehat{H}).$$

(vi) *Для функции* F_f *любая максимальная грань входит в некоторый комплекс* $M \in \mathcal{M}_{l \cap L}(F_f)$, *если любая максимальная грань функции* f *входит в некоторый комплекс* $\widetilde{M} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{l \cap L}(f, f_A)$.

Очевидно, что $\widetilde{\mathcal{M}}_{l \cap L}(f, f_A) \neq \varnothing$, когда для максимальных граней функции $f \in C_{r,k}$ или все грани имеют одинаковую сложность, или последовательные пары пересекающихся граней имеют одинаковую сложность при чётном числе граней (лемма 4(i)).

Следствие 1. *Для функции* $F_f \in \mathcal{F}^n_{r,k}(m, h, h_1, h_2)$ *верны следующие утверждения.*

(i) $p(F_f) \geqslant p(f)$, $|S_{F_f}| \geqslant |S_f| \times |S_H|$, $\sigma_{F_f} \geqslant \min\{\sigma_H, \sigma_{H_1}, \sigma_{H_2}\}$.

(ii) *Число и мощность связных компонент доминируемых и доминирующих множеств не меньше, чем* $\bigl|I^{\ker}_f\bigr|$ *и* $\min\{|N_H|, |N_{H_1}|, |N_{H_2}|\}$.

(iii) *Независимое семейство множеств* $\{N_{f_{A,\widetilde{\alpha}}},\ \widetilde{\alpha} \in B^{n-r-2}_m\}$ *для системы* $\langle N_{F_f}, S_{F_f} \rangle$ *состоит из* $\binom{n-r-2}{m}$ *множеств мощности* $p(f) + 1$.

Теорема 2. *Множество функций $\mathcal{F}^n_{r,k}(m,h,h_1,h_2)$ при определённых значениях параметров k,r,m,h,h_1,h_2 содержит функции, которые обладают совокупностью следующих свойств:*

— их протяжённость экспоненциальна;

— их число максимальных граней экспоненциально превосходит число единичных вершин, любая единичная вершина содержится в экспоненциальном числе максимальных граней, а каждая максимальная грань входит в кратчайший и минимальный комплекс;

— экспоненциально их число связных компонент доминируемых и доминирующих множеств единичных вершин, которые имеют экспоненциальную мощность;

— минимальность комплексов граней обосновывается достаточными условиями, которые используют независимое множество экспоненциальной мощности или независимое семейство множеств, в котором каждое множество семейства имеет экспоненциальную мощность;

— дважды экспоненциально их число кратчайших и минимальных комплексов граней, имеющих различные множества собственных вершин.

Изучение квазициклических функций позволяет расширить понимание проблем минимизации булевых функций с использованием известных подходов. Применение локальных методов сокращения трудоёмкости минимизации для квазициклических булевых функций оказывается неэффективным. Поэтому актуальными являются исследования классов булевых функций, для которых эффективно применение локальных методов [7] или которые отражают специфику прикладных задач [6].

3. Доказательства

Доказательство леммы 1. (i) Для грани $g_i \in S_f$ функции $f \in C_{n-k,k}$ грани $g_i \times \tilde{0}^k$ и $g_i \times \tilde{1}^k$ в кубе B^n обозначим через g_i^0 и g_i^1 соответственно.

Определим функцию $f_0 \in C_{n,k}$, которая совпадает с функцией f в грани $B^{n,0,\dots,0}_{n-k+1,\dots,n}$, т. е. имеет множество максимальных граней

$$S_{f_0} = \left\{g_i^0 \mid g_i \in S_f\right\}_{i=1}^{p+1} \subset B^{n,0,\dots,0}_{n-k+1,\dots,n}.$$

Очевидно, что $k_{f_0} = k_f$ и $d_{f_0} = d_f$.

Для вершины $\widetilde{\alpha}_i \in A_f \subset B^{n-k}$ через $g^{\widetilde{\alpha}_i}$ обозначим грань размерности k в кубе B^n с минимальной вершиной $\widetilde{\alpha}_i^0 = \widetilde{\alpha}_i \times \tilde{0}^k$ и максимальной вершиной $\widetilde{\alpha}_i^1 = \widetilde{\alpha}_i \times \tilde{1}^k$. Добавление k-мерных граней в k-циклическую

функцию $f_0 \in C_{n,k}$ выполняется для трёх или четырёх последовательных максимальных граней $\left\{g_i^0, g_{i+1}^0, g_{i+2}^0, g_{i+3}^0\right\}$ в зависимости от расстояния d_i, где $1 \leqslant i < i+3 \leqslant p+1$.

Если $d_i = 1$, то грани $\left\{g_i^0, g_{i+1}^0\right\}$ заменяются гранями $\left\{g_i^1, g_{i+1}^1\right\} \subset B_{n-k+1,\ldots,n}^{n,1,\ldots,1}$, добавляются k-мерные грани $\{g^{\widetilde{\alpha}_i}, g^{\widetilde{\alpha}_{i+2}}\}$ и грани $\left\{g_{i+2}^0, g_{i+3}^0\right\}$ не изменяются. Если $d_i > 1$, то грань $\left\{g_i^0\right\}$ заменяется гранью $g_i^1 \subset B_{n-k+1,\ldots,n}^{n,1,\ldots,1}$, добавляются k-мерные грани $\{g^{\widetilde{\alpha}_i}, g^{\widetilde{\alpha}_{i+1}}\}$ и грани $\left\{g_{i+1}^0, g_{i+2}^0\right\}$ не изменяются. Расстояние между этими и последующими добавленными гранями будет не меньше 2.

Такое преобразование может быть применено не менее $\left\lfloor \frac{1}{4}(p(f)+1) \right\rfloor$ раз, и каждый раз добавляются две грани размерности k, для которых минимальные и максимальные вершины являются вершинами пересечения граней. В результате получается k-циклическая функция $f^* \in C_{n,k}$, для которой $\mathcal{I}$ — множество индексов добавленных граней,

$$p(f^*) \geqslant p(f) + |\mathcal{I}|, \quad |\mathcal{I}| \geqslant 2\left\lfloor \frac{1}{4}(p(f)+1) \right\rfloor.$$

(ii) Для последовательности $\{k_i^* \mid k_i \leqslant k_i^* \leqslant k_i + \Delta k\}_{i=1}^{p+1}$ функция $f^* \in P_n$ задаётся комплексом граней $M = \{g_i^* \mid g_i^* = g_i \times \Delta g_i^*,\ g_i \in S_f\}_{i=1}^{p+1}$, где $\Delta g_i^* = \tilde{0}^{3k}$ при $k_i^* = k_i$ и $\Delta g_i^* = \Delta g_i \times \tilde{0}^{2k}$ для $i = 1 \pmod 3$, $\Delta g_i^* = \tilde{0}^k \times \Delta g_i \times \tilde{0}^k$ для $i = 2 \pmod 3$ и $\Delta g_i^* = \tilde{0}^{2k} \times \Delta g_i$ для $i = 0 \pmod 3$, где $\Delta g_i = B_{1,\ldots,k_i^*-k_i}^{k,0,\ldots,0} \subset B^k$, при $k_i^* > k_i$ для $i = 1, \ldots, p+1$.

Очевидно, что размерность грани g_i^* равна k_i^*, для различных граней $\rho(g_i^*, g_j^*) \geqslant \rho(g_i, g_j)$ при $i, j = 1, \ldots, p+1$, $g_i^* \cap g_{i+1}^* = \{\widetilde{\alpha}_{i+1}^*\}$, если $i = 1, \ldots, p$, и $g_{p+1}^* \cap g_1^* = \{\widetilde{\alpha}_1^*\}$, где $\widetilde{\alpha}_i^* = \widetilde{\alpha}_i \times \tilde{0}^{3k} \in B^n$ для $\widetilde{\alpha}_i \in A_f$.

Докажем, что все грани комплекса M максимальны и нет других максимальных граней функции $f^* \in C_{n,k^*}$. Если максимальная грань g функции f^* не содержится в комплексе M, то грань g содержит различные вершины из различных граней комплекса M. Следовательно, найдутся такие вершины $\tilde{x}^*, \tilde{y}^* \in g$, что $\rho(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) = 1$, $\tilde{x}^* \in g_i^*$ и $\tilde{y}^* \in g_j^*$, где $i, j \in 1, \ldots, p+1$. Тогда $\rho(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) \geqslant \rho(g_i^*, g_j^*) \geqslant \rho(g_i, g_j)$ и для k-циклической функции расстояние между непересекающимися гранями не меньше 2 и может быть равно 1 только для двух граней, которые пересекаются с одной гранью, и вершины пересечения находятся на расстоянии 1. Поэтому можно считать, что $\tilde{x}^* \in g_1^*$ и $\tilde{y}^* \in g_2^*$ или $\tilde{y}^* \in g_3^*$.

Вершины куба B^{n-3k}, совпадающие с вершинами $\tilde{x}^*$ и $\tilde{y}^*$ в координатах $1, \ldots, n-3k$, обозначим через $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ соответственно. Очевидно, что $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leqslant \rho(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) = 1$.

Рассмотрим возможные случаи.

(1) В случае $\tilde{x}^* \in g_1^*$, $\tilde{y}^* \in g_2^*$ и $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0$, т. е. $\widetilde{x} = \widetilde{y} = \widetilde{\alpha}_2$, получаем, что если $\tilde{x}^* = \widetilde{x}$, то $\tilde{x}^*, \tilde{y}^* \in g_2^*$; если $\tilde{y}^* = \widetilde{y}$, то $\tilde{x}^*, \tilde{y}^* \in g_1^*$; если $\tilde{x}^* \neq \widetilde{x}$ и $\tilde{y}^* \neq \widetilde{y}$, то $\rho(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) \geqslant 2$.

(2) В случае $\tilde{x}^* \in g_1^*$, $\tilde{y}^* \in g_2^*$ и $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 1$ получаем, что если $\widetilde{x} = \widetilde{\alpha}_2$ и $\widetilde{y} \neq \widetilde{\alpha}_2$, то $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in g_2 \subseteq g_2^*$ и $\tilde{x}^* \neq \widetilde{x}$ или $\tilde{y}^* \neq \widetilde{y}$; если $\widetilde{x} \neq \widetilde{\alpha}_2$ и $\widetilde{y} = \widetilde{\alpha}_2$, то $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in g_1 \subseteq g_1^*$ и $\tilde{x}^* \neq \widetilde{x}$ или $\tilde{y}^* \neq \widetilde{y}$; если $\tilde{x}^* \neq \widetilde{x}$ или $\tilde{y}^* \neq \widetilde{y}$, то $\rho(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) > \rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 1$.

(3) В случае, когда $\tilde{x}^* \in g_1^*$, $\tilde{y}^* \in g_3^*$ и $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leqslant 1$, т. е. $\widetilde{x} \in g_1$, $\widetilde{y} \in g_3$ и $1 \leqslant d_2 = \rho(\widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_3) \leqslant \rho(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, что возможно только при $d_2 = 1$, $\widetilde{x} = \widetilde{\alpha}_2$ и $\widetilde{y} = \widetilde{\alpha}_3$, получаем, что если $\tilde{x}^* = \widetilde{\alpha}_2^*$ и $\tilde{y}^* = \widetilde{\alpha}_3^*$, то $\tilde{x}^*, \tilde{y}^* \in g_2^*$; если $\tilde{x}^* \neq \widetilde{\alpha}_2^*$ или $\tilde{y}^* \neq \widetilde{\alpha}_3^*$, то $\rho(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) > \rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 1$.

Таким образом, пришли к противоречию: вершины либо содержатся в одной грани, либо не являются соседними. Лемма 1 доказана.

Для грани $g = B_{j_1,\ldots,j_t}^{n,\alpha_1,\ldots,\alpha_t} \subseteq B^n$ и множества индексов $\{i_1, \ldots, i_k\}$, где $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, грань в кубе B^{n-k}, которая получается из грани g удалением координат $i_1, \ldots, i_k$, обозначим через $\widetilde{g}_{i_1,\ldots,i_k}$.

Доказательство леммы 2. (i) Любой комплекс граней M функции D_f однозначно представляется в виде объединения непересекающихся комплексов $M = M_{0,0} \cup M_{0,1} \cup M_{1,0}$, где

$$M_{0,0} = \bigl\{g \in M \mid g \subseteq B_{n-1,n}^{n,0,0}\bigr\},$$
$$M_{0,1} = \bigl\{g \in M \mid g \cap B_{n-1,n}^{n,0,1} \neq \varnothing\bigr\},$$
$$M_{1,0} = \bigl\{g \in M \mid g \cap B_{n-1,n}^{n,1,0} \neq \varnothing\bigr\},$$

так как $\bigl\{N_{D_f}^{0,1}, N_{D_f}^{1,0}\bigr\}$ — независимое семейство множеств для $\langle N_{D_f}, S_{D_f}\rangle$.

Для комплекса максимальных граней M выполняется

$$N_{M_{0,1}} = N_{\overline{x}_{n-1} f_1}, \quad N_{M_{1,0}} = N_{\overline{x}_n f_2}, \quad N_{M_{0,1}} \cup N_{M_{1,0}} = N_{D_f}.$$

Это означает, что

$$N_{D_f}^{0,1} = N_{M_{0,1}} \cap B_{n-1,n}^{n,0,1} \succ N_{M_{0,1}} \cap B_{n-1,n}^{n,0,0},$$
$$N_{D_f}^{1,0} = N_{M_{1,0}} \cap B_{n-1,n}^{n,1,0} \succ N_{M_{1,0}} \cap B_{n-1,n}^{n,0,0}$$

и, стало быть, $N_{D_f}^{0,1} \cup N_{D_f}^{1,0} \succ (N_{M_{0,1}} \cup N_{M_{1,0}}) \cap B_{n-1,n}^{n,0,0} = N_{D_f}^{0,0}$.

(ii) Из свойств независимости и доминирования семейства множеств $\bigl\{N_{D_f}^{0,1}, N_{D_f}^{1,0}\bigr\}$ и соотношения (2) следует, что

$$\mathcal{L}(D_f) \geqslant \widetilde{\mathcal{L}}\bigl(N_{D_f}^{0,1}, N_{D_f}, S_{D_f}\bigr) + \widetilde{\mathcal{L}}\bigl(N_{D_f}^{1,0}, N_{D_f}, S_{D_f}\bigr)$$
$$= \mathcal{L}(f_1 \overline{x}_{n-1}) + \mathcal{L}(f_2 \overline{x}_n),$$

где $\widetilde{\mathcal{L}}(A, N_{D_f}, S_{D_f})$ — сложность $\mathcal{L}$ минимального комплекса $M \subseteq S_{D_f}$, который содержит $A \subseteq N_{D_f}$. Для комплексов $M_1 \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\overline{x}_{n-1}f_1)$ и $M_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\overline{x}_n f_2)$ выполняется

$$N_{M_1} \cup N_{M_2} = N_{D_f}, \quad \mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(M_2) = \mathcal{L}(\overline{x}_{n-1}f_1) + \mathcal{L}(\overline{x}_n f_2),$$

т. е. $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(D_f)$.

(iii) Для $g \in S_{D_f}$ и грани $\widetilde{g}_{n-1,n}$, которая получена из g удалением координат $n-1$ и n, возможны следующие случаи.

Если $g \cap B^{n,0,1}_{n-1,n} \neq \varnothing$, то

$$\widetilde{g}_{n-1,n} \subseteq N_{f_1}, \quad g \subseteq \widetilde{g}_{n-1,n} \times B^{2,0}_1 \subseteq N_{f_1} \times B^{2,0}_1 \subseteq N_{D_f}.$$

Следовательно, $g \in S_{D_f}$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{g}_{n-1,n} \in S_{f_1}$ и $g = \widetilde{g}_{n-1,n} \times B^{2,0}_1$.

Если $g \cap B^{n,1,0}_{n-1,n} \neq \varnothing$, то

$$\widetilde{g}_{n-1,n} \subseteq N_{f_2}, \quad g \subseteq \widetilde{g}_{n-1,n} \times B^{2,0}_2 \subseteq N_{f_2} \times B^{2,0}_2 \subseteq N_{D_f}.$$

В этом случае $g \in S_{D_f}$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{g}_{n-1,n} \in S_{f_2}$ и $g = \widetilde{g}_{n-1,n} \times B^{2,0}_2$.

Если $g \subset B^{n,0,0}_{n-1,n}$, то

$$\widetilde{g}_{n-1,n} \subseteq N_f = N_{f_1 \vee f_2}, \quad g = \widetilde{g}_{n-1,n} \times B^{2,0,0}_{1,2} \subseteq N_f \times B^{2,0,0}_{1,2} \subseteq N_{D_f}.$$

При этом если $\widetilde{g}_{n-1,n} \in S_{f_1}$, то $g \subset \widetilde{g}_{n-1,n} \times B^{2,0}_1 \subseteq N_{D_f}$, а если $\widetilde{g}_{n-1,n} \in S_{f_2}$, то $g \subset \widetilde{g}_{n-1,n} \times B^{2,0}_2 \subseteq N_{D_f}$. Поэтому $g \in S_{D_f}$ только тогда, когда $\widetilde{g}_{n-1,n} \in S_f \setminus (S_{f_1} \cup S_{f_2})$. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Предположим, что $\mathcal{A}$ не является независимым семейством множеств, т. е. есть два множества $\{A_i, A_j\} \in \mathcal{A}$ и грань $g \in G_{f_1 \times f_2}$, для которой $g \cap A_i \neq \varnothing$ и $g \cap A_j \neq \varnothing$. Это означает, что $g \cap (Q_1 \times \{\widetilde{\alpha}_1\}) \neq \varnothing$ и $g \cap (Q_1 \times \{\widetilde{\alpha}_2\}) \neq \varnothing$ для некоторых $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2 \in Q_2$. Но тогда грань $\widetilde{g}_{1,\dots,r} \subset N_{f_2}$, получающаяся из g удалением координат $1, \dots, r$, содержит $\widetilde{\alpha}_1$ и $\widetilde{\alpha}_2$, что противоречит независимости множества Q_2. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. (i) Для пары $(Q, M) \in \mathcal{R}_{f,L}$ комплекс граней $M \in \mathcal{M}(f)$ имеет вид $M = \{g_{\widetilde{\alpha}} \in S_f(\widetilde{\alpha}) \mid \widetilde{\alpha} \in Q\}$ и для него достигаются нижние оценки длины и сложности минимального покрытия (2). Следовательно, $M \in \mathcal{M}_l(f)$, $M \in \mathcal{M}_L(f)$ и $M \in \mathcal{M}_{l \cap L}(f)$.

(ii) Очевидно, что для функции $f_1 \times f_2$ имеем

$$N_{f_1 \times f_2} = N_{f_1} \times N_{f_2}, \quad S_{f_1 \times f_2} = S_{f_1} \times S_{f_2},$$
$$S_{f_1 \times f_2}(\widetilde{\alpha}_1 \times \widetilde{\alpha}_2) = S_{f_1}(\widetilde{\alpha}_1) \times S_{f_2}(\widetilde{\alpha}_2)$$

для любой вершины $\widetilde{\alpha}_1 \times \widetilde{\alpha}_2 \in N_{f_1 \times f_2}$, множество вершин $Q = Q_1 \times Q_2$ независимо и

$$M_1 \times M_2 = \{g_{\widetilde{\alpha}_1 \times \widetilde{\alpha}_2} = g_{\widetilde{\alpha}_1} \times g_{\widetilde{\alpha}_2} \mid \widetilde{\alpha}_1 \times \widetilde{\alpha}_2 \in Q = Q_1 \times Q_2,$$
$$\widetilde{\alpha}_i \in Q_i,\ g_{\widetilde{\alpha}_i} = M_i \cap S_{f_i}(\widetilde{\alpha}_i),\ i = 1, 2\} \in \mathcal{M}(f_1 \times f_2).$$

При этом любая грань $g \in S_{f_1 \times f_2}(\widetilde{\alpha}_1 \times \widetilde{\alpha}_2)$ однозначно представляется в виде $g = g_1 \times g_2$, где $g_i \in S_{f_i}(\widetilde{\alpha}_i)$ для $i = 1, 2$, т. е.

$$L(g) = L(g_1) + L(g_2) = L_{\widetilde{\alpha}_1} + L_{\widetilde{\alpha}_2}.$$

Следовательно, $(Q_1 \times Q_2, M_1 \times M_2) \in \mathcal{R}_{f_1 \times f_2, L}$.

(iii) Для любой грани $g \in S_{f_1 \times f_2}$ справедливо однозначное представление $g = g_1 \times g_2$, где $g_i \in S_{f_i}$ и $g_i \in M_i$ для некоторой пары $(Q_i, M_i) \in \mathcal{R}_{f_i, L}$ при $i = 1, 2$. Тогда $g \in M_1 \times M_2 \in \mathcal{M}_{l \cap L}(f_1 \times f_2)$. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. (i) Для функции F_f используем следующее представление:

$$F_f(\tilde{x}^n) = F(\tilde{x}^{n-2})\overline{x}_{n-1}\overline{x}_n \vee F_1(\tilde{x}^{n-2})\overline{x}_{n-1}x_n \vee F_2(\tilde{x}^{n-2})x_{n-1}\overline{x}_n,$$

где

$$F(\tilde{x}^{n-2}) = f(\tilde{x}^r)H(\tilde{x}^{r+1,n-2}),$$
$$F_j(\tilde{x}^{n-2}) = f_W(\tilde{x}^r)H_j(\tilde{x}^{r+1,n-2}), \quad j = 1, 2.$$

Тогда $S_F = S_f \times H$,

$$S_{F_j} = S_{f_W} \times S_{H_j} = \bigcup_{i \in I_f^{\ker}} (S_{w_i} \times S_{H_j}) \quad \text{для } j = 1, 2,$$

$S_F \cap (S_{F_1} \cup S_{F_2}) = \varnothing$ и из леммы 2 следует, что

$$S_{F_f} = S_F \times B_{1,2}^{2,0,0} \cup S_{F_1} \times B_1^{2,0} \cup S_{F_2} \times B_2^{2,0}.$$

При этом

$$S_{F_W} = S_{F_1} \times B_1^{2,0} \cup S_{F_2} \times B_2^{2,0} = \bigcup_{i \in I_f} S_{F_{W,i}},$$

где $S_{F_{W,i}} = S_{w_i} \times S_{\widehat{H}_1} \cup S_{w_i} \times S_{\widehat{H}_2}$, и для функции $w_i \in P_r$ множество единичных вершин N_{w_i} представляется гранью размерности k_i в кубе B^r с двумя нулевыми вершинами, расстояние между которыми равно d_i.

Функцию на кубе B^k, которая имеет ровно две нулевые вершины $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in B^k$, обозначим через $v_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, а если $\widetilde{\alpha} = \tilde{0}^k$ и $\widetilde{\beta} = \tilde{1}^d\tilde{0}^{k-d}$, то функцию обозначим через v_d.

Если π — перестановка координат куба B^k, для которой $\pi(\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}) = \tilde{1}^d\tilde{0}^{k-d}$, то $v_d(\pi(\widetilde{x} \oplus \widetilde{\alpha})) = v_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(\widetilde{x})$. При применении к вершинам куба B^k преобразования $\pi(\widetilde{x} \oplus \widetilde{\alpha})$ грани преобразуются в грани, сохраняются размерности граней и отношения принадлежности для вершин, граней и комплексов граней. Поэтому свойства комплексов граней функции $v_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$ однозначно определяются свойствами комплексов граней функции v_d.

В единичном кубе B^k через $g_{i,j}$ и g_j обозначим грани $B^{k,0,1}_{i,j}$ и $B^{k,1}_j$ соответственно, где $i, j = 1, \ldots, k$ и $i \neq j$.

Для функции v_d множества кратчайших и минимальных комплексов граней совпадают, любая максимальная грань входит в некоторый минимальный комплекс и достаточные условия минимальности основаны на независимом множестве вершин слоя B^k_1, так как

$$
\begin{gathered}
v_1(\tilde{x}^k) = S^{k-1}_{1,k-1}(\tilde{x}^{2,k}), \quad S_{v_1} = \mathcal{M}_L(v_1) = \mathrm{Ker}(v_1) = \{g_j\}^k_{j=2},\\
v_d(\tilde{x}^k) = S^d_{1,d-1}(\tilde{x}^d) \vee S^{k-d}_{1,r-d}(\tilde{x}^{d+1,k}), \quad 1 < d < k,\\
S_{v_d} = \{g_{i,j} i \neq j\}^d_{i,j=1} \cup \mathrm{Ker}(v_d), \quad \mathrm{Ker}(v_d) = \{g_j\}^k_{j=d+1},\\
\mathcal{M}_L(v_d) = \bigl\{M \times B^{k-d} \cup \mathrm{Ker}(v_d) \mid M \in \mathcal{M}_L\bigl(S^d_{1,d-1}\bigr)\bigr\},\\
v_k(\tilde{x}^k) = S^k_{1,k-1}(\tilde{x}^k), \quad S_{v_k} = \{g_{i,j},\, i \neq j\}^k_{i,j=1}, \quad \mathcal{M}_L(v_k) = \mathcal{M}_L\bigl(S^k_{1,k-1}\bigr),
\end{gathered}
$$

где $\mathrm{Ker}(v_d)$ — множество ядровых граней функции v_d.

(ii) Отношение доминирования $N^{0,1}_{F_{W,i}} \cup N^{1,0}_{F_{W,i}} \succ N^{0,0}_{F_{W,i}}$, где $i \in I^{\mathrm{ker}}_f$, следует из леммы 2, так как выполняется соотношение (6).

(iii) Заметим, что

$$
N_{F_A} = N^{0,0}_{F_A}, \quad N^{0,0}_{F_A} \cap N^{0,0}_{F_W} = \varnothing, \quad g \cap (N^{0,1}_{F_W} \cup N^{1,0}_{F_W}) = \varnothing
$$

для грани $g \in S_{F_f} \setminus S_{F_W}$ и $g \cap N_{F_A} = \varnothing$ для грани $g \in S_{F_W}$, т. е. семейство $\bigl\{N_{F_A}, N^{0,1}_{F_W}, N^{1,0}_{F_W}\bigr\}$ независимо для системы $\langle N_{F_f}, S_{F_f}\rangle$ и

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}(F_f) \geqslant \widetilde{\mathcal{L}}(F_f, F_A) + \widetilde{\mathcal{L}}(F_f, F_W\overline{x}_{n-1}x_n) + \widetilde{\mathcal{L}}(F_f, F_W x_{n-1}\overline{x}_n),\\
\widetilde{\mathcal{L}}(F_f, F_W\overline{x}_{n-1}x_n) = \widetilde{\mathcal{L}}(F_f, F_W\overline{x}_{n-1}),\\
\widetilde{\mathcal{L}}(F_f, F_W x_{n-1}\overline{x}_n) = \widetilde{\mathcal{L}}(F_f, F_W\overline{x}_n).
\end{gathered}
$$

Так как семейство $\{N^{0,1}_{F_W}, N^{1,0}_{F_W}\}$ независимо для системы $\langle N_{F_W}, S_{F_W}\rangle$, $N^{0,1}_{F_W} \cup N^{1,0}_{F_W} \succ N^{0,0}_{F_W}$ и $N^{0,1}_{F_W} \cup N^{1,0}_{F_W} \cup N^{0,0}_{F_W} = N_{F_W}$, из (3) следует, что

$$\widetilde{\mathcal{L}}(F_W, F_W\overline{x}_{n-1}x_n) + \widetilde{\mathcal{L}}(F_W, F_W x_{n-1}\overline{x}_n) = \mathcal{L}(F_W).$$

Поэтому $\mathcal{L}(F_f) \geqslant \widetilde{\mathcal{L}}(F_f, F_A) + \mathcal{L}(F_W)$ и равенство достигается, так как объединение любых комплексов $M_1 \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(F_f, F_A)$ и $M_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(F_W)$ является комплексом функции F_f.

(iv) Пусть $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2 \in B^{n-r-2}_m \times \tilde{0}^2$ и π — перестановка координат куба B^n, для которой $\pi(\widetilde{x} \times \widetilde{\alpha}_1) = \widetilde{x} \times \widetilde{\alpha}_2$ при любых $\widetilde{x} \in B^r$. Тогда для любого комплекса $M \in \widetilde{\mathcal{M}}(F_f, f_{A,\widetilde{\alpha}_1})$ комплекс $\pi(M) \in \widetilde{\mathcal{M}}(F_f, f_{A,\widetilde{\alpha}_2})$ имеет такую же сложность $\mathcal{L}$ в силу аксиомы инвариантности относительно изоморфизма. Следовательно, $\widetilde{\mathcal{L}}(F_f, f_{A,\widetilde{\alpha}_1}) = \widetilde{\mathcal{L}}(F_f, f_{A,\widetilde{\alpha}_2})$.

Множество $B^{n-r-2}_m \times \tilde{0}^2 \subset B^{n-r}$ является независимым множеством вершин для функции $\widehat{H} \in P_{n-r}$ и $A_f \subset N_f \subset B^r$. Поэтому из леммы 3 следует, что семейство $\mathcal{A}$ независимо для системы $\langle N_{f\times\widehat{H}}, S_{f\times\widehat{H}}\rangle$. Так как $N_{f_{A,\widetilde{\alpha}}} \subset N_{F_A}$ для $\widetilde{\alpha} \in B^{n-r-2}_m$, $N_{F_A} \cap N_{F_W} = \varnothing$ и $S_{F_f} = S_f \times S_{\widehat{H}} \cup S_{F_W}$, семейство $\mathcal{A}$ будет независимым для системы

$$\langle N_{F_f}, S_{F_f}\rangle = \langle N_{f\times\widehat{H}} \cup N_{F_W}, S_{f\times\widehat{H}} \cup S_{F_W}\rangle$$

и оценка (7) вытекает из (2).

(v) Любой комплекс максимальных граней $M \in \widetilde{\mathcal{M}}(F_f, f_{A,\widetilde{\alpha}})$ имеет вид

$$M = \{g_i = g_{i,A} \times g_{i,\widehat{H}} \in S_{F_f} \mid g_{i,A} \in S_f,\ g_{i,\widehat{H}} \in S_{\widehat{H}}\}_{i=1}^{l},$$

где $M_A = \{g_{i,A}\}_{i=1}^{l} \in \widetilde{\mathcal{M}}(f, f_A)$ и $l = l(M) = l(M_A)$. Следовательно,

$$l(M_A) \geqslant \tilde{l}(f, f_A) \quad \text{и} \quad L(M_A) \geqslant \widetilde{L}(f, f_A).$$

Для любой грани $g_{i,\widehat{H}} \in S_{\widehat{H}}$ ранг $R_{\widehat{H}}$ равен $L(g_{i,\widehat{H}}) = n-r-h$, поэтому

$$L(\widehat{H}) = l(\widehat{H})R_{\widehat{H}} \quad \text{и} \quad l(\widehat{H}) = l(H) = \left|B^{n-r-2}_m\right|.$$

Так как $L(g_1 \times g_2) = L(g_1) + L(g_2)$ для любых граней g_1 и g_2, то

$$\sum_{g_i \in M} (L(g_{i,A}) + L(g_{i,\widehat{H}})) = L(M_A) + l(M_A)R_{\widehat{H}} \geqslant \widetilde{L}(f, f_A) + \tilde{l}(f, f_A)R_{\widehat{H}}.$$

Значит, $\widetilde{L}(F_f, f_{A,\widetilde{\alpha}}) \geqslant \widetilde{L}(f, f_A) + \tilde{l}(f, f_A)R_{\widehat{H}}$ и из (7) получаем

$$\tilde{l}(F_f, F_A) \geqslant \tilde{l}(f, f_A)l(\widehat{H}),$$

$$\widetilde{L}(F_f, F_A) \geqslant (\widetilde{L}(f, f_A) + \tilde{l}(f, f_A)R_{\widehat{H}})l(\widehat{H}) = \widetilde{L}(f, f_A)l(\widehat{H}) + \tilde{l}(f, f_A)L(\widehat{H}).$$

Используя соотношения (4), покажем что эти нижние оценки достижимы. Отметим, что $M_1 \times M_2 \in \mathcal{M}(F_f, F_A)$ для любых комплексов $M_1 \in \mathcal{M}(f, f_A)$ и $M_2 \in \mathcal{M}(\widehat{H})$. Пусть $M_2 \in \mathcal{M}_L(\widehat{H}) = \mathcal{M}_l(\widehat{H})$, т. е. $L(M_2) = L(\widehat{H})$ и $l(M_2) = l(\widehat{H})$.

Если $M_1 \in \mathcal{M}_l(f, f_A)$, то

$$l(M_1) = \tilde{l}(f, f_A), \quad l(M_1 \times M_2) = l(f, f_A) l(\widehat{H}),$$

т. е. $M_1 \times M_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}_l(F_f, F_A)$.

Если $M_1 \in \mathcal{M}_{l \cap L}(f, f_A)$, то

$$l(M_1) = \tilde{l}(f, f_A), \quad L(M_1) = \widetilde{L}(f, f_A),$$
$$L(M_1 \times M_2) = L(f, f_A) l(\widehat{H}) + l(f, f_A) L(\widehat{H}),$$

т. е. $M_1 \times M_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}_{l \cap L}(F_f, F_A)$.

(vi) Из пп. (i) и (iii) теоремы 1 следует, что $S_{F_f} = S_f \times S_{\widehat{H}} \cup S_{F_W}$ и $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(F_f)$ для любых комплексов $M_1 \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(F_f, F_A)$ и $M_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(F_W)$. Поэтому для грани $g \in S_{F_f}$ достаточно рассмотреть два случая: $g \in S_f \times S_{\widehat{H}}$ или $g \in S_{F_W}$.

Если $g \in S_f \times S_{\widehat{H}}$, то грань g однозначно представляется в виде $g = g_f \times g_{\widehat{H}}$, где $g_f \in S_f$ и $g_{\widehat{H}} \in S_{\widehat{H}}$. Всегда есть комплекс граней $M_{\widehat{H}}$ функции $\widehat{H}$, для которого $g_{\widehat{H}} \in M_{\widehat{H}} \in \mathcal{M}_L(\widehat{H}) = \mathcal{M}_l(\widehat{H})$. Если всегда есть комплекс M_f функции f, для которого $g_f \in M_f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{l \cap L}(f, f_A)$, то из теоремы 1(v) следует, что

$$g = g_f \times g_{\widehat{H}} \in M_f \times M_{\widehat{H}} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{l \cap L}(F_f, F_A)$$

и грань входит в некоторый комплекс из множества $\mathcal{M}_{l \cap L}(F_f)$.

Если $g \in S_{F_W}$, то $g \in S_{F_{W,i}}$ для некоторого $i \in I_f^{\ker}$, так как функции $F_{W,i}$ являются компонентами связности функции F_W для $i \in I_f^{\ker}$. Для функции $F_{W,i}$ множество максимальных граней равно $S_{F_{W,i}} = S_{w_i} \times S_{\widehat{H}_1} \cup S_{w_i} \times S_{\widehat{H}_2}$ (теорема 1(i)). Поэтому грань $g \in S_{F_{W,i}}$ однозначно представляется в виде $g = g_{w_i} \times g_1$ или $g = g_{w_i} \times g_2$, где $g_{w_i} \in S_{w_i}$, $g_1 \in S_{\widehat{H}_1}$ или $g_2 \in S_{\widehat{H}_2}$. Функции w_i, $\widehat{H}_1$ и $\widehat{H}_2$ удовлетворяют условиям леммы 4(iii), т. е. для любых граней $g_{w_i} \in S_{w_i}$, $g_1 \in S_{\widehat{H}_1}$ и $g_2 \in S_{\widehat{H}_2}$ есть комплексы $M_{w_i}, M_{\widehat{H}_1}, M_{\widehat{H}_2}$, содержащие эти грани, и независимые множества вершин $Q_{w_i}, Q_{\widehat{H}_1}, Q_{\widehat{H}_2}$, одинаковые для различных максимальных граней, при этом максимальные грани каждой функции, содержащие любую вершину из соответствующего множества, имеют одинаковый ранг.

Следовательно, выполняются отношения

$$(Q_{w_i}, M_{w_i}) \in \mathcal{R}_{w_i,L}, \quad (Q_{\widehat{H}_1}, M_{\widehat{H}_1}) \in \mathcal{R}_{\widehat{H}_1,L}, \quad (Q_{\widehat{H}_2}, M_{\widehat{H}_2}) \in \mathcal{R}_{\widehat{H}_2,L}.$$

Очевидно, что для функции $F_{W,i}$ множество вершин

$$Q = Q_{w_i} \times Q_{\widehat{H}_1} \cup Q_{w_i} \times Q_{\widehat{H}_2}$$

является независимым множеством и комплекс граней

$$M = M_{w_i} \times M_{\widehat{H}_1} \cup M_{w_i} \times M_{\widehat{H}_2}$$

таков, что $|M| = |Q|$. При этом все максимальные грани функции $F_{W,i}$, содержащие любую вершину из множества Q, имеют одинаковый ранг. Следовательно, выполнены условия леммы 4(i) и $M \in \mathcal{M}_{l \cap L}(F_{W,i})$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Функция $F_f \in \mathcal{F}^n_{r,k}(m, h, h_1, h_2)$ получается из функции $f \in C_{r,k}$ для параметров

$$r = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2} - \Theta(1), \quad r - 4k > \frac{n}{4} - 4k = \Theta(n),$$
$$m = \left\lfloor \frac{n-r-2}{2} \right\rfloor = \frac{n}{4} - \Theta(1), \quad h = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \frac{n}{8} - \Theta(1),$$
$$h_1 = h_2 = \left\lfloor \frac{h}{2} \right\rfloor = \frac{n}{16} - \Theta(1) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Построение функции $f \in C_{r,k}$ основано на преобразованиях леммы 1. На 1-м шаге из функции $f_0 \in C_{r-4k,1}$ получается k-циклическая функция $f_1 \in C_{r-3k,k}$, для которой число максимальных граней может быть определённой чётности, не менее $2\left\lfloor \frac{1}{4}(p(f_0)+1) \right\rfloor$ граней имеют размерность k, при этом расстояние между вершинами пересечения этих граней равно k, а для протяжённости верна оценка

$$p(f_1) \geqslant p(f_0) + 2\left\lfloor \frac{1}{4}(p(f_0)+1) \right\rfloor.$$

На 2-м шаге по функции $f_1 \in C_{r-3k,k}$ получается k-циклическая функция $f \in C_{r,k}$, в которой размерность граней может быть увеличена до значения, не большего k, с сохранением остальных свойств функции f_1, т. е. $p(f) = p(f_1)$. По функции $f_0 \in C_{r-4k,1}$, для которой $p(f_0) =$

$2^{\Theta(n)}$ при $r-4k=\Theta(n)$, может быть получена функция $f\in C_{r,k}$, имеющая число максимальных граней определённой чётности, экспоненциальные значения протяжённости и числа максимальных граней размерности k.

Тогда из теоремы 1 и следствия 1 получаем следующие оценки: для протяжённости

$$p(F_f)\geqslant p(f)=\Theta(2^{r-4k})=2^{\Theta(n)};$$

для отношения числа максимальных граней и числа единичных вершин из того, что

$$|S_f|=p(f)+1\geqslant\Theta(2^{\frac{n}{2}-4k}),$$
$$|S_H|\geqslant 2^{(n-r)+m\mathcal{H}(h/m)}\Theta(n^{-1})=2^{\frac{n}{2}+\frac{n}{4}}\Theta(n^{-1}),$$

следует, что $|S_{F_f}|\geqslant|S_f|\times|S_H|\geqslant 2^{n+\Theta(n)}\geqslant|N_{F_f}|2^{\Theta(n)}$; число максимальных граней σ_{F_f}, которые содержат любую вершину, не меньше

$$\min\{\sigma_H,\sigma_{H_1},\sigma_{H_2}\}=\min\left\{\binom{m}{h},\binom{m-\lfloor h/2\rfloor}{h-\lfloor h/2\rfloor},\binom{m}{\lfloor h/2\rfloor}\right\}\geqslant 2^{\Theta(n)}.$$

Для связных компонент доминируемых и доминирующих множеств единичных вершин функции (теорема 1(ii)): их число не меньше чем

$$\left|I_f^{\ker}\right|\geqslant 2\left\lfloor\frac{1}{4}(p(f_0)+1)\right\rfloor=\Theta(2^{\frac{n}{2}-4k})=2^{\Theta(n)},$$

а мощность не меньше чем

$$\min\left\{\left|N_{F_{W,i}}^{0,1}\right|,\left|N_{F_{W,i}}^{1,0}\right|,\left|N_{F_{W,i}}^{0,0}\right|\right\}\geqslant|N_{w_i}|\min\{|N_H|,|N_{H_1}|,|N_{H_2}|\}=2^{\Theta(n)}.$$

Для независимого семейства множеств, которое используется для обоснования минимальности комплексов граней (теорема 1(iv)), число множеств в семействе равно

$$\left|B_m^{n-r-2}\right|=\binom{n-r-2}{m}=2^{\Theta(n)},$$

а мощность каждого множества в семействе равна $p(f)+1=2^{\Theta(n)}$.

Из теоремы 1(vi) следует, что любая максимальная грань функции F_f входит в некоторый комплекс $M\in\mathcal{M}_{l\cap L}(F_f)$, если любая максимальная грань функции f входит в некоторый комплекс $\widetilde{M}\in\widetilde{\mathcal{M}}_{l\cap L}(f,f_A)$.

Для построения комплексов с различными множествами собственных вершин используем представление пояса куба в виде $S^{n-r-2}_{m-h,m} = \bigcup\limits_{i=0}^{h} C_i$ при $m \leqslant \frac{n-r-2}{2}$, где множество C_i содержит монотонные последовательности из $i+1$ соседних вершин, с максимальной вершиной в слое m и минимальной вершиной в слое $m-i$ для $i = 0, \dots, h$ [9]. Любая такая последовательность вершин содержится в одной максимальной грани пояса и множество таких граней образует кратчайший и минимальный комплекс поясковой функции. Стало быть, $|C_i| = \binom{n-r-2}{m-i} - \binom{n-r-2}{m-i-1}$ для $i = 0, \dots, h-1$ и $|C_h| = \binom{n-r-2}{m-h}$.

Функция $\widehat{H}$, для которой множество единичных вершин совпадает с поясом $S^{n-r-2}_{m-h,m}$ в грани $B^{n-r-2} \times \tilde{0}^2$, обладает такими же свойствами.

Множество вершин $B^{n-r-2}_m \times \tilde{0}^2$ представим в виде объединения непересекающихся множеств $Z_0 = C_0 \times \tilde{0}^2$ и $\overline{Z}_0 = \left(B^{n-r-2}_m \times \tilde{0}^2\right) \setminus Z_0$.

Функцию, для которой множество единичных вершин есть $N_{\widehat{H}} \setminus Z_0$, обозначим через H_Z. Для функции H_Z пусть $S_{H_Z} = \bigcup\limits_{\widetilde{\alpha} \in \overline{Z}_0} S_{\widehat{H}}(\widetilde{\alpha})$ — множество максимальных граней, $\overline{Z}_0$ — независимое множество вершин, $M_Z = \{g_{\widetilde{\alpha}} \mid g_{\widetilde{\alpha}} \in S_{\widehat{H}}(\widetilde{\alpha}),\ \widetilde{\alpha} \in \overline{Z}_0\}$ — комплекс максимальных граней, в котором каждая грань $g_{\widetilde{\alpha}}$ содержит монотонную последовательность соседних вершин с максимальной вершиной $\widetilde{\alpha} \in \overline{Z}_0$.

Тогда для M_Z выполнены условия леммы 4(i) и $M_Z \in \mathcal{M}_{l \cap L}(H_Z)$.

Представим семейство $\mathcal{A} = \left\{N_{f_{A,\widetilde{\alpha}}},\ \widetilde{\alpha} \in B^{n-r-2}_m \times \tilde{0}^2\right\}$ (см. теорему 1) в виде $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, где

$$\mathcal{A}_1 = \{N_{f_{A,\widetilde{\alpha}}} = A_f \times \{\widetilde{\alpha}\},\ \widetilde{\alpha} \in \overline{Z}_0\}, \quad \mathcal{A}_2 = N_{F_A} \setminus \mathcal{A}_1.$$

Определим комплекс $M_1 = M_A \times M_Z$, где M_A — некоторый комплекс из множества $\widetilde{\mathcal{M}}(f, f_A)$, т. е. $N_{M_1} \subset N_{F_f}$ и множество $N_{F_A} \setminus N_{M_1}$ содержит только вершины из множеств семейства $\mathcal{A}_2$. Определим комплекс M_2, который содержит вершины множества $N_{F_A} \setminus N_{M_1}$ и представляется в виде $M_2 = \bigcup\limits_{\widetilde{\alpha} \in Z_0} M_{2,\widetilde{\alpha}}$, где

$$M_{2,\widetilde{\alpha}} = \{g_1 \times g_2 \mid g_1 \in M_{A,\widetilde{\alpha}},\ g_2 \in S_{\widehat{H}}(\widetilde{\alpha})\} \in \mathcal{M}(F_f, N_{f_{A,\widetilde{\alpha}}})$$

и комплексы $M_{A,\widetilde{\alpha}} \in \widetilde{\mathcal{M}}(f, f_A)$ могут быть различными для различных вершин $\widetilde{\alpha} \in Z_0$.

Тогда $M = M_1 \cup M_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}(F_f, F_A)$ и аналогично теореме 1(v), если $M_1, M_{A,\widetilde{\alpha}} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{l \cap L}(f, f_A)$ для всех вершин $\widetilde{\alpha} \in Z_0$, то

$$L(M) = \widetilde{L}(f, f_A) l(\widehat{H}) + \widetilde{l}(f, f_A) L(\widehat{H}), \quad M \in \widetilde{\mathcal{M}}_{l \cap L}(F_f, F_A).$$

Пусть комплексы $M_{A,\widetilde{\alpha}}$ выбираются из множества $\mathcal{M} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_{l \cap L}(f, f_A)$, в котором комплексы имеют различные множества собственных вершин (например, если $|S_f|$ — нечётное число и все максимальные грани одного ранга). Если для определения комплекса M_2 используются различные наборы комплексов $\{M_{A,\widetilde{\alpha}} \in \mathcal{M},\ \widetilde{\alpha} \in Z_0\}$, то получаются комплексы $M_A \in \widetilde{\mathcal{M}}_A \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_{l \cap L}(F_f, F_A)$ с различными множествами собственных вершин.

Тогда комплексы вида $M_A \cup M_W \in \mathcal{M}_{l \cap L}(F_f)$, если $M_A \in \widetilde{\mathcal{M}}_A$ и $M_W \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(F_W)$ (теорема 1(iii)), имеют различные множества собственных вершин, число таких комплексов будет не меньше чем $|\mathcal{M}|^{|Z_0|}$, где $|\mathcal{M}| \geqslant 2$ и $|Z_0| = 2^{\Theta(n)}$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев Ю. Л., Глаголев В. В.** Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. М.: Наука, 1974. С. 99–148.
2. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
3. **Евдокимов А. А.** О максимальной длине цепи в единичном n-мерном кубе // Мат. заметки. 1969. Т. 6, № 3. С. 309–319.
4. **Журавлёв Ю. И.** Алгоритмы построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. М.: Наука, 1974. С. 67–98.
5. **Кудрявцев В. Б., Андреев А. Е.** О сложности алгоритмов // Фунд. прикл. математика. 2009. Т. 15, № 3. С. 135–169.
6. **Максимов Ю. В.** Реализация булевых функций с ограниченным числом нулей в классе дизъюнктивных нормальных форм // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 9. С. 1569–1588.
7. **Панов А. В.** Алгоритмы, использующие окрестности первого порядка для минимизации булевых функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 9. С. 1589–1600.
8. **Сапоженко А. А, Чухров И. П.** Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика. 1987. Т. 25. С. 68–116.
9. **Чухров И. П.** Оценки числа минимальных дизъюнктивных нормальных форм для поясковой функции // Методы дискретного анализа в исследованиях функциональных систем. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. № 36. С. 74–92.
10. **Чухров И. П.** О мерах сложности комплексов граней в единичном кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 6. С. 77–94.

11. **Чухров И. П.** О доказательстве минимальности покрытий через обобщение понятия независимости // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2017. Т. 24, № 2. С. 87–106.
12. **Coudert O., Sasao T.** Two-level logic minimization // Logic synthesis and verification. Norwell, MA: Kluwer Acad. Publ., 2001. P. 1–27. (Springer Int. Ser. Eng. Comput. Sci.; Vol. 654).
13. **Umans C., Villa T., Sangiovanni-Vincentelli A. L.** Complexity of two-level logic minimization // IEEE Trans. CAD Integrated Circuits Systems. 2006. Vol. 25, No. 7. P. 1230–1246.

Чухров Игорь Петрович

Статья поступила
24 ноября 2017 г.
Исправленный вариант —
19 января 2018 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2018. Volume 25, No. 3. P. 126–151

UDC 519.714.7 DOI: 10.17377/daio.2018.25.601

ON THE COMPLEXITY OF MINIMIZING QUASICYCLIC BOOLEAN FUNCTIONS

I. P. Chukhrov
Institute of Computer Aided Design RAS,
19/18 Vtoraya Brestskaya St., 123056 Moscow, Russia
E-mail: chip@icad.org.ru

Abstract. We investigate the Boolean functions that combine various properties: the extremal values of complexity characteristics of minimization, the inapplicability of local methods for reducing the complexity of the exhaustion, and the impossibility to efficiently use sufficient minimality conditions. Some quasicyclic functions are constructed that possess the properties of cyclic and zone functions, the dominance of vertex sets, and the validity of sufficient minimality conditions based on independent families of sets. For such functions, we obtain the exponential lower bounds for the extent and special sets and also a twice exponential lower bound for the number of shortest and minimal complexes of faces with distinct sets of proper vertices. Bibliogr. 13.

Keywords: minimization of Boolean functions, complexity, extent, domination, independent family of sets.

REFERENCES

1. **Yu. L. Vasil'ev** and **V. V. Glagolev,** Metric properties of disjunctive normal forms, in *Diskretnaya matematika i matematicheskie voprosy kibernetiki* (Discrete Mathematics and Mathematical Problems of Cybernetics), Vol. 1, pp. 99–148, Nauka, Moscow, 1974.
2. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness,* Freeman, San Francisco, 1979. Translated under the title *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi,* Mir, Moscow, 1982.
3. **A. A. Evdokimov,** Maximal length of circuit in a unitary n-dimensional cube, *Mat. Zametki,* **6**, No. 3, 309–319, 1969. Translated in *Math. Notes Acad. Sci. USSR,* **6**, No. 3, 642–648, 1969.

4. **Yu. I. Zhuravlyov,** Algorithms for constructing minimal disjunctive normal forms of Boolean functions, in *Diskretnaya matematika i matematicheskie voprosy kibernetiki* (Discrete Mathematics and Mathematical Problems of Cybernetics), Vol. 1, pp. 67–98, Nauka, Moscow, 1974.
5. **V. B. Kudryavtsev** and **A. E. Andreev,** On algorithm complexity, *Fundam. Prikl. Mat.,* **15**, No. 3, 135–169, 2009. Translated in *J. Math. Sci.,* **168**, No. 1, 89–122, 2010.
6. **Yu. V. Maksimov,** Realization of Boolean functions with a bounded number of zeros in the class of disjunctive normal forms, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **53**, No. 9, 1569–1588, 2013. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.,* **53**, No. 9, 1391–1409, 2013.
7. **A. V. Panov,** Algorithms using first-order neighborhoods for minimization of Boolean functions, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **53**, No. 9, 1589–1600, 2013. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.,* **53**, No. 9, 1410–1420, 2013.
8. **A. A. Sapozhenko** and **I. P. Chukhrov,** Boolean function minimization in the class of disjunctive normal forms, *Itogi Nauki Tekh., Ser. Teor. Veroyatn., Mat. Stat., Teor. Kibern.,* **25**, 68–116, 1987. Translated in *J. Sov. Math.,* **46**, No. 4, 2021–2052, 1989.
9. **I. P. Chukhrov,** Estimates of the number of minimal disjunctive normal forms for the belt function, in *Metody diskretnogo analiza v issledovanii funktsional'nykh sistem* (Methods of Discrete Analysis in Functional Systems Research), Vol. 36, pp. 74–92, Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1981.
10. **I. P. Chukhrov,** On complexity measures of complexes of faces in the unit cube, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **20**, No. 6, 77–94, 2013. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **8**, No. 1, 9–19, 2014.
11. **I. P. Chukhrov,** Proof of covering minimality by generalizing the notion of independence, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **24**, No. 2, 87–106, 2017. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **11**, No. 2, 193–203, 2017.
12. **O. Coudert** and **T. Sasao,** Two-level logic minimization, in *Logic Synthesis and Verification,* pp. 1–27, Kluwer Acad. Publ., Netherlands, 2002 (Springer Int. Ser. Eng. Comput. Sci., Vol. 654).
13. **C. Umans, T. Villa,** and **A. L. Sangiovanni-Vincentelli,** Complexity of two-level logic minimization, *IEEE Trans. CAD Integr. Circuits Syst.,* **25**, No. 7, 1230–1246, 2006.

Igor P. Chukhrov

Received
24 November 2017
Revised
19 January 2018