ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2018. Том 25, № 3. С. 5–22

УДК 519.8 DOI: 10.17377/daio.2018.25.612

ДВУХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ «ЗАЩИТНИК — АТАКУЮЩИЙ» ПРИ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ СЦЕНАРИЯХ АТАКИ *)

В. Л. Береснев[1,2,a], *И. А. Давыдов*[1,2,b],
П. А. Кононова[1,2,c], *А. А. Мельников*[1,2,d]

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
[2]Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: [a]beresnev@math.nsc.ru, [b]vann.davydov@gmail.com,
[c]anilopko@gmail.com, [d]melnikov@math.nsc.ru

Аннотация. Рассматривается двухуровневая модель «защитник — атакующий», построенная на основе игры Штакельберга. Задано множество объектов, оказывающих социально значимые услуги для известного множества потребителей и являющихся потенциальными целями для возможной атаки. Защитнику (Лидеру) не известен сценарий атаки и приоритеты атакующего (Последователя) по выбору объектов для атаки, однако Лидер может рассмотреть несколько возможных сценариев, покрывающих планы Последователя. Задача Лидера в такой ситуации состоит в том, чтобы, исходя из возможных сценариев атаки, выбрать такие объекты для защиты, что при условии рационального решения Последователя о выборе целей атаки суммарные затраты на защиту объектов и ликвидацию последствий атаки будут наименьшими. Формально предлагаемая модель представляет собой задачу двухуровневого смешанно-целочисленного программирования, включающую задачу верхнего уровня (задачу Лидера) и нижнего уровня (задачу Последователя). Основные усилия в работе направлены на переформулировку данной задачи в виде одноуровневых задач математического программирования. Такие задачи строятся с использованием свойств оптимального решения задачи Последователя, позволяющих сформулировать необходимые и достаточные условия оптимальности в виде линейных соотношений. Библиогр. 16.

Ключевые слова: двухуровневое программирование, условия дополняющей нежёсткости, критерий оптимальности.

*)Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 17–11–01021).

Введение

Мы рассматриваем математическую модель, относящуюся к двухуровневым моделям «защитник — атакующий», построенным на основе идеи игры Штакельберга [15]. В таких моделях две противоборствующие стороны Лидер и Последователь последовательно принимают решения по защите некоторого множества объектов (например, объектов социально важной инфраструктуры) и атаке этих объектов с целью нарушения процесса их функционирования. Задача Лидера в таком игровом взаимодействии состоит в том, чтобы, обладая информацией о ресурсных возможностях Последователя и его возможных целевых установках, принять решение об использовании своих ограниченных ресурсов для защиты объектов, позволяющее достичь наилучшего результата в случае рациональной атаки.

Литературу, посвящённую оборонительным играм Штакельберга (Stackelberg security games) и, в частности, двухуровневым моделям «защитник — атакующий», в настоящее время можно считать обширной. Бóльшая часть этих публикаций в виде статей и тезисов докладов посвящена рассмотрению конкретных прикладных задач обеспечения безопасности объектов того или иного назначения (см., например, [4, 8, 10, 11]). Имеется также ряд работ, посвящённых построению математических моделей «защитник — атакующий», не привязанных к конкретным практическим ситуациям и содержащих предложения по способам решения исследуемых задач. В большинстве этих работ рассматриваются минимаксные постановки, в которых противоборствующие стороны оптимизируют одну целевую функцию, но в разных направлениях. Среди первых таких работ можно выделить статью [14], рассматривающую модель RIMF (от r-interdiction median problem with fortification), в которой Лидер защищает q объектов, а Последователь атакует r незащищённых объектов и при этом оптимизируются затраты на обслуживание заданного множества потребителей объектами, не подвергнувшимися нападению. Авторы исследуют свойства модели и предлагают схему явного перебора для поиска оптимального решения Лидера. Развитие модели RIMF можно увидеть в работе [3], где предполагается, что масштабы защиты объектов определяются заданным бюджетом. При этом целевая функция, помимо стоимости обслуживания потребителей, включает затраты на расширение мощностей объектов, используемых для обслуживания потребителей после атаки. Для полученной модели авторы адаптируют схему явного перебора из [14]. Вероятностные постановки, связанные с RIMF, предлагаются в [16], где авторы предполагают, что атакованные

Последователем объекты выходят из строя с некоторой вероятностью. Лидер в данной модели минимизирует ожидаемые затраты. Для поиска приближённых решений рассматриваемой задачи предлагаются эвристические алгоритмы. Развитие модели из [14] встречается в [2], где рассматривается задача размещения объектов и одновременно планируется их защита на случай возможной атаки. В качестве целевой функции принимаются суммарные затраты на размещение и защиту объектов, а также затраты на обслуживание потребителей, прикреплённых к атакованным объектам. Для построения решений исследуемой модели предлагаются эвристические алгоритмы.

В настоящей работе рассматривается двухуровневая модель «защитник — атакующий», в которой Лидер принимает решение о защите объектов, а Последователь — о выборе целей для атаки с учётом принятого Лидером решения. Предполагается, что защищаемые объекты (предприятия) являются поставщиками социально важных услуг для заданного конечного множества потребителей. При этом предприятия имеют ограниченные возможности (мощности) по оказанию таких услуг. Предполагается, что Последователь обладает информацией о роли каждого объекта в обслуживании потребителей и имеет возможность ранжировать объекты по важности или задать «веса» важности каждого объекта. Используемые для атаки ресурсы Последователя ограничены и определяются числом атакуемых объектов. Таким образом, целевая функция Последователя (веса важности объектов) и используемые ресурсы (число атакуемых объектов) задают сценарий рациональной атаки Последователя. В рамках определённого сценария задача Последователя состоит в том, чтобы выбрать для атаки заданное число незащищённых объектов максимальной суммарной важности.

Лидер принимает решение о защите объектов, исходя из своих ресурсов, задаваемых в виде ограничения на число защищаемых объектов, и стремится минимизировать суммарные затраты на защиту объектов и ликвидацию последствий возможной атаки. Предполагается, что атакованные объекты не могут обслуживать потребителей и все потребители должны быть обслужены неатакованными предприятиями. При этом предполагается, что глобального перераспределения поставщиков не производится и неатакованные предприятия продолжают обслуживать «своих» потребителей. Для обслуживания потребителей, «потерявших» поставщиков, используются резервы мощностей неатакованных предприятий. Считается, что этих резервов достаточно для обслуживания всех потребителей. Таким образом, в качестве затрат на ликвидацию последствий атаки принимаются затраты на переназначение поставщиков для потребителей, обслуживаемых атакованными предприятиями.

Лидер, принимая решение о защите объектов, не имеет полной информации о сценарии атаки Последователя. Тем не менее будем предполагать, что Лидер может рассмотреть набор возможных сценариев атаки, покрывающих планы Последователя. Задача Лидера в ситуации нескольких альтернативных сценариев атаки состоит в том, чтобы, исходя из ресурсных ограничений, выбрать такие объекты для защиты, что при реализации наиболее неблагоприятного сценария атаки и при условии рационального решения Последователя при выборе объектов атаки суммарные затраты на защиту объектов и ликвидацию последствий атаки будут минимальны. В приведённой постановке задачи Лидера предполагается, что все рассматриваемые Лидером сценарии равновероятны и в силу этого Лидер, принимая решение, ориентируется на худший для него сценарий. Если у Лидера есть возможность оценить вероятность реализации каждого сценария, то в рассматриваемой модели целью Лидера можно считать минимизацию ожидаемых суммарных затрат.

Формально предлагаемая модель представляет собой задачу двухуровневого смешанно-целочисленного программирования, включающую задачу верхнего уровня (задачу Лидера) и нижнего уровня (задачу Последователя). Задача Последователя при каждом сценарии атаки имеет вид задачи о ранце [7, 12], в которой нужно выбрать заданное число незащищённых объектов максимальной суммарной важности. Коэффициенты важности предполагаются попарно различными, а следовательно, оптимальное решение — единственным. В силу этого для изучаемой модели не возникает необходимости в уточнении понятия оптимального решения и рассмотрении оптимистических и пессимистических постановок [6, 9].

Для построения алгоритмов решения исследуемой задачи рассматривается вопрос о её эквивалентной переформулировке в виде одноуровневой задачи. Показано, что при фиксированных переменных, определяющих решение Лидера по выбору защищаемых объектов, задача сводится к серии (по числу сценариев) задач линейного программирования той же суммарной размерности, что и задача Лидера. Тем самым показано, что исследуемая задача сводится к задаче минимизации некоторой псевдобулевой функции с эффективно вычисляемыми значениями. Такое представление позволяет использовать для построения быстрых алгоритмов поиска приближённых решений огромный арсенал методов локального поиска и метаэвристик [1, 5, 13].

Основное внимание в работе сосредоточено на построении одноуровневых задач смешанно-целочисленного программирования, эквивалентных исходной. Такие задачи строятся с использованием свойств оптимального решения задачи Последователя, позволяющих сформулировать необходимые и достаточные условия оптимальности в виде линейных соотношений.

В разд. 3 приводятся результаты вычислительных экспериментов на тестовых примерах, демонстрирующих работоспособность предложенных способов построения оптимальных решений исследуемой двухуровневой модели.

1. Математическая модель

В исследуемой модели будем использовать следующие обозначения.

Множества:

$I = \{1, \dots, m\}$ — множество объектов (предприятий);

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество потребителей;

S — множество сценариев атаки объектов.

Параметры:

f_i — фиксированные затраты на защиту объекта $i \in I$;

c_{ij} — затраты на обслуживание потребителя $j \in J$ предприятием $i \in I$;

r — величина, ограничивающая число защищаемых объектов;

a_{ij} — количество ресурса предприятия $i \in I$, необходимое для обслуживания потребителя $j \in J$;

A_i — мощность предприятия $i \in I$;

x^0_{ij} — доля предприятия $i \in I$ в обслуживании потребителя $j \in J$ до предполагаемой атаки;

ρ_s — вероятность атаки по сценарию $s \in S$;

w^s_i — коэффициент («вес») важности объекта $i \in I$ при сценарии атаки $s \in S$;

p^s — число объектов, атакуемых при сценарии атаки $s \in S$.

Переменные:

x_i, $i \in I$, принимает значение 1, если Лидер защищает предприятие i, и 0 в противном случае;

x^s_{ij}, $i \in I$, $j \in J$, $s \in S$, обозначает долю предприятия i в обслуживании потребителя j в случае атаки по сценарию s;

z^s_i, $i \in I$, $s \in S$, принимает значение 1, если Последователь атакует предприятие i при атаке по сценарию s, и 0 в противном случае.

Используя введённые обозначения, запишем рассматриваемую двухуровневую модель «защитник — атакующий» в случае, когда Лидер оценивает решение по критерию затрат при худшем сценарии атаки, как следующую задачу двухуровневого целочисленного программирования:

$$\min_{(x_i),\,(x_{ij}^s)}\Big(\sum_{i\in I} f_i x_i + \max_{s\in S}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij}^s\Big), \tag{1}$$

$$\sum_{i\in I} x_i \leqslant r, \tag{2}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij}^s = 1, \quad j\in J,\, s\in S, \tag{3}$$

$$1-\tilde z_i^s \geqslant x_{ij}^s, \quad i\in I,\, j\in J,\, s\in S, \tag{4}$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij}x_{ij}^s \leqslant A_i, \quad i\in I,\, s\in S, \tag{5}$$

$$x_{ij}^s \geqslant x_{ij}^0\big(1-\tilde z_i^s\big), \quad i\in I,\, j\in J,\, s\in S, \tag{6}$$

$$x_i\in\{0,1\}, \quad x_{ij}^s\in[0,1], \quad i\in I,\, j\in J,\, s\in S, \tag{7}$$

$$\big(\tilde z_i^s\big) \text{ — оптимальное решение задачи:} \tag{8}$$

$$\max_{(z_i^s)}\sum_{s\in S}\sum_{i\in I} w_i^s z_i^s, \tag{9}$$

$$\sum_{i\in I} z_i^s = p^s, \quad s\in S, \tag{10}$$

$$z_i^s \leqslant 1-x_i, \quad i\in I,\, s\in S, \tag{11}$$

$$z_i^s\in\{0,1\}, \quad i\in I,\, s\in S. \tag{12}$$

Задачу верхнего уровня (1)–(8) будем обозначать через $\mathcal{L}$, задачу нижнего уровня (9)–(12) — через $\mathcal{F}$. Для задачи (1)–(12) в целом используем обозначение $(\mathcal{L},\mathcal{F})$. Целевая функция (1) задачи $\mathcal{L}$ выражает величину суммарных затрат Лидера при реализации сценария атаки, приводящего к наибольшим затратам на обслуживание потребителей. Неравенство (2) ограничивает число защищаемых объектов. Неравенства (3) гарантируют, что при любом сценарии атаки все потребители будут обслужены, а неравенства (4) показывают, что потребителей могут обслужить только неатакованные предприятия. Неравенства (5) гарантируют выполнение условия ограниченности ресурсов предприятий, а условия (6) не уменьшают доли неатакованного предприятия в обслуживании каждого потребителя. Целевая функция (9) задачи $\mathcal{F}$ равняется суммарной важности атакованных объектов по всем сценариям атаки.

Максимизация этой величины эквивалентна максимизации суммарной важности атакованных объектов по каждому сценарию отдельно. Равенства (10) указывают на число атакуемых объектов при каждом сценарии, а ограничения (11) показывают, что при любом сценарии атакованными могут быть только незащищённые предприятия.

Формулировка рассматриваемой двухуровневой задачи «защитник — атакующий», когда Лидер при выборе решения использует критерий ожидаемых суммарных затрат, отличается от задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ только видом целевой функции, которая в этом случае записывается следующим образом:

$$\min_{(x_i),\,(x_{ij}^s)} \Big(\sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{s \in S} \rho_s \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}^s \Big). \tag{1$'$}$$

Задачу $(1')$, (2)–(8) обозначим через $\mathcal{L}'$, а двухуровневую модель $(1')$, (2)–(12) через $(\mathcal{L}', \mathcal{F})$.

Далее сфокусируем внимание на задаче $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Для задачи $(\mathcal{L}', \mathcal{F})$ справедливы аналогичные результаты.

При исследовании задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ будем считать, что для всякого $s \in S$ значения коэффициентов w_i^s, $i \in I$, в целевой функции задачи $\mathcal{F}$ попарно различны. В силу этого при любом (0,1)-векторе $x = (x_i)$ задача $\mathcal{F}$ имеет единственное оптимальное решение. Это означает, что для заданного вектора $x = (x_i)$ значение целевой функции (1) определяется однозначно и, следовательно, задача (1)–(12) является корректной.

Пусть $X = \big((x_i), \big(x_{ij}^s\big)\big)$ — допустимое решение задачи $\mathcal{L}$ при заданных векторах $\tilde{z}^s = \big(\tilde{z}_i^s\big)$, $s \in S$, и пусть $\widetilde{Z} = \big(\tilde{z}_i^s\big)$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{F}$ при заданном (0,1)-векторе $x = (x_i)$. Тогда пару $(X, \widetilde{Z})$ назовём *допустимым решением* задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Далее будем рассматривать только допустимые решения $(X, \widetilde{Z})$ с оптимальными значениями переменных x_{ij}^s, $i \in I$, $j \in J$, $s \in S$, т. е. значениями, которые при фиксированных векторах $x = (x_i)$ и $z^s = \big(z_i^s\big)$, $s \in S$, доставляют минимум целевой функции (1).

Обозначим значение целевой функции (1) задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на допустимом решении $(X, \widetilde{Z})$ через $L(X, \widetilde{Z})$. Допустимое решение $(X^*, \widetilde{Z}^*)$ назовём *оптимальным решением* задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, если $L(X^*, \widetilde{Z}^*) \leqslant L(X, \widetilde{Z})$ для всякого допустимого решения $(X, \widetilde{Z})$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

2. Эквивалентные формулировки

Исследуем вопрос об эквивалентных формулировках задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Рассмотрим прежде всего вопрос о построении допустимого решения задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ в случае заданного $(0,1)$-вектора $x = (x_i)$. Такое решение может быть найдено в два этапа.

На первом этапе при заданном векторе $x = (x_i)$, $i \in I$, решается $|S|$ задач о ранце, на которые распадается задача $\mathcal{F}$, и строятся оптимальные решения $\tilde{z}^s = (\tilde{z}_i^s)$, $s \in S$, этих задач. Процедура построения решения $\tilde{z}^s$ для всякого $s \in S$ сводится к упорядочению коэффициентов w_i^s, $i \in I$, по убыванию.

На втором этапе при заданных векторах $z^s = (z_i^s)$, $s \in S$, для всякого $s \in S$ решается следующая вспомогательная задача линейного программирования:

$$\min_{(x_{ij}^s)} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}^s \tag{13}$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} x_{ij}^s = 1, \quad j \in J, \tag{14}$$

$$1 - \tilde{z}_i^s \geqslant x_{ij}^s, \quad i \in I, \, j \in J, \tag{15}$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_{ij}^s \leqslant A_i, \quad i \in I, \tag{16}$$

$$x_{ij}^s \geqslant x_{ij}^0 (1 - \tilde{z}_i^s), \quad i \in I, \, j \in J, \tag{17}$$

$$x_{ij}^s \geqslant 0, \quad i \in I, \, j \in J. \tag{18}$$

Если $(\tilde{x}_{ij}^s)$, $s \in S$, — оптимальные решения вспомогательных задач, то решение $(X, \widetilde{Z})$, где $X = \big((x_i), (\tilde{x}_{ij}^s)\big)$, $\widetilde{Z} = (\tilde{z}_i^s)$, является допустимым решением задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Назовём его *решением, порождённым* $(0,1)$-*вектором* x.

Отсюда следует, что задача $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ может быть представлена как задача минимизации некоторой псевдобулевой функции $f(x)$ от переменных (x_i), $i \in I$. Значение этой функции на $(0,1)$-векторе $x = (x_i)$ равняется значению целевой функции (1) на допустимом решении $(X, \widetilde{Z})$, порождённом вектором x. Для вычисления значения функции $f(x)$ при заданном $(0,1)$-векторе x необходимо решить задачу $\mathcal{F}$ и вспомогательную задачу для всякого $s \in S$.

Рассмотрим эквивалентную формулировку задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ в виде задачи смешанно-целочисленного линейного программирования, построенную с использованием свойств оптимального решения задачи о ранце. Эта задача в модели $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ является задачей Последователя при каждом сценарии и имеет следующий вид:

$$\max_{(z_i)} \sum_{i \in I} w_i z_i, \tag{19}$$

$$\sum_{i \in I} z_i = p, \tag{20}$$

$$z_i \leqslant 1 - x_i, \quad i \in I, \tag{21}$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I. \tag{22}$$

Эту задачу будем обозначать через $\mathcal{K}$, а значение её целевой функции на решении $z = (z_i)$ — через $K(z)$. Будем считать, что $\sum\limits_{i \in I} x_i \leqslant r$, $r + p \leqslant m$, а коэффициенты w_i, $i \in I$, попарно различны.

Пусть перестановка (i_k), $k \in I$, упорядочивает величины w_i, $i \in I$, по убыванию. Критерий оптимальности решения $z = (z_i)$ задачи $\mathcal{K}$ в виде линейных соотношений формулируется следующим образом.

Утверждение 1. *Допустимое решение $z = (z_i)$ задачи $\mathcal{K}$ оптимально тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$x_{i_k} + z_{i_k} \geqslant z_{i_l}, \quad 1 \leqslant k < l \leqslant m. \tag{23}$$

Действительно, рассмотрим множество $I^0(x) = \{i \in I \mid x_i = 0\}$ и его подмножество $I^0_p(x)$ такое, что $\left|I^0_p(x)\right| = p$ и $w_{i_1} > w_{i_2}$ для любых $i_1 \in I^0_p(x)$, $i_2 \in I^0(x) \backslash I^0_p(x)$. Заметим, что оптимальное решение $z^* = (z^*_i)$ задачи $\mathcal{K}$ таково, что $\{i \in I \mid z^*_i = 1\} = I^0_p(x)$.

Покажем, что указанное z^* удовлетворяет неравенствам (23). Рассмотрим произвольное $l > 1$. Если $z^*_{i_l} = 0$ в правой части (23), то для любого $k < l$ неравенство (23) выполнено в силу неотрицательности его левой части. Если же $z^*_{i_l} = 1$, то для любого $k < l$ такого, что $x_{i_k} = 0$, имеем $i_k \in I^0_p(x)$ и, следовательно, $z^*_{i_k} = 1$.

В обратную сторону, пусть некоторое решение $z = (z_i)$ удовлетворяет (23) и $z_i = 0$ для некоторого $i \in I^0_p(x)$. Тогда $z_i + x_i = 0$ и, значит, $z_{i'} = 0$ для всех $i' \in I^0(x) \backslash I^0_p(x)$. Следовательно,

$$\sum_{i \in I} z_i = \sum_{i \in I^0_p(x)} z_i < p,$$

и решение z является недопустимым решением задачи $\mathcal{K}$.

Пусть для всякого $s \in S$ перестановка $\left(i^s_k\right)$, $k \in I$, упорядочивает коэффициенты w^s_i, $i \in I$, по убыванию. Рассмотрим следующую задачу смешанно-целочисленного линейного программирования, получаемую из задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ заменой требования оптимальности решения задачи $\mathcal{F}$ условием (23):

$$\min_{(x_i),\,(x^s_{ij}),\,(z^s_i)}\Big(\sum_{i\in I} f_i x_i + \max_{s\in S}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x^s_{ij}\Big), \tag{24}$$

$$\sum_{i\in I} x_i \leqslant r, \tag{25}$$

$$\sum_{i\in I} x^s_{ij} = 1, \quad j\in J,\, s\in S, \tag{26}$$

$$1 - z^s_i \geqslant x^s_{ij}, \quad i\in I,\, j\in J,\, s\in S, \tag{27}$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij}x^s_{ij} \leqslant A_i, \quad i\in I,\, s\in S, \tag{28}$$

$$x^s_{ij} \geqslant x^0_{ij}\big(1 - z^s_i\big), \quad i\in I,\, j\in J,\, s\in S, \tag{29}$$

$$\sum_{i\in I} z^s_i = p^s, \quad s\in S, \tag{30}$$

$$z^s_i \leqslant 1 - x_i, \quad i\in I,\, s\in S, \tag{31}$$

$$x^s_{i^s_k} + z^s_{i^s_k} \geqslant z^s_{i^s_l}, \quad 1\leqslant k < l \leqslant m,\, s\in S, \tag{32}$$

$$x_i\in\{0,1\}, \quad x^s_{ij}\in[0,1], \quad i\in I,\, j\in J,\, s\in S, \tag{33}$$

$$z^s_i\in\{0,1\}, \quad i\in I,\, s\in S. \tag{34}$$

Задачу (24)–(34) будем обозначать через $\mathcal{R}_1$.

Утверждение 2. *Оптимальное решение* (X,Z), $X = \big((x_i),\big(x^s_{ij}\big)\big)$, $Z = \big(z^s_i\big)$, *задачи* $\mathcal{R}_1$ *является оптимальным решением задачи* $(\mathcal{L},\mathcal{F})$.

Действительно, пусть (X,Z) есть допустимое решение задачи $\mathcal{R}_1$. Тогда Z — допустимое решение задачи $\mathcal{F}$, которое в силу условий (32) является её оптимальным решением. Следовательно, (X,Z) — допустимое решение задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$.

Верно и обратное: любое допустимое решение (X,Z) задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ удовлетворяет ограничениям (25)–(34). Таким образом, у рассматриваемых задач совпадают множество допустимых решений и целевые функции, откуда следует совпадение их оптимальных решений.

Рассмотрим ещё одну эквивалентную формулировку задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ в виде задачи смешанно-целочисленного линейного программирования, построенную с использованием критерия оптимальности решения задачи $\mathcal{K}$, вытекающего из теории двойственности. Для этого рассмотрим линейную релаксацию $\mathcal{K}_L$ задачи $\mathcal{K}$, а также двойственную к указанной релаксации задачу $\mathcal{DK}_L$, записанную с помощью переменных u и v_i, $i \in I$, допустимые значения которых задаются ограничениями

$$u + v_i \geqslant w_i, \quad i \in I, \tag{35}$$

$$v_i \geqslant 0, \quad i \in I. \tag{36}$$

Согласно теории двойственности допустимые решения $Z = (z_i)$ и $D = (u, (v_i))$ задач $\mathcal{K}_L$ и $\mathcal{DK}_L$ соответственно оптимальны, если выполнены соотношения дополняющей нежёсткости

$$(1 - x_i - z_i)v_i = 0, \quad i \in I, \tag{37}$$

$$(w_i - u - v_i)z_i = 0, \quad i \in I. \tag{38}$$

Отсюда следует, что если для допустимого решения $Z = (z_i)$ задачи $\mathcal{K}$ можно указать допустимое решение $D = (u, (v_i))$ задачи $\mathcal{DK}_L$ такое, что выполняются соотношения (37) и (38), то Z является оптимальным решением задачи $\mathcal{K}_L$, а следовательно, и $\mathcal{K}$. С учётом целочисленности переменных (x_i) и (z_i) условия (37), (38) могут быть переписаны в виде следующих линейных неравенств:

$$v_i \leqslant M(x_i + z_i), \quad i \in I, \tag{39}$$

$$u + v_i \leqslant w_i z_i + M(1 - z_i), \quad i \in I, \tag{40}$$

где M — достаточно большое число.

Утверждение 3. *Если $Z = (z_i)$ и $D = (u, (v_i))$ — допустимые решения задач $\mathcal{K}$ и $\mathcal{DK}_L$ соответственно, то равенства* (37), (38) *выполняются тогда и только тогда, когда справедливы неравенства* (39), (40).

Действительно, пусть для решений Z и D справедливы соотношения (37) и (38). Из (37) имеем $v_i = 0$ или $x_i + z_i = 1$. В обоих случаях неравенство (39) выполнено. Аналогично из (38) имеем $z_i = 0$ или $u + v_i = w_i$, что влечёт выполнимость неравенства (40).

Обратно, пусть для решений Z и D выполняются неравенства (39), (40). Заметим, что если $v_i > 0$, то из (39) получаем $x_i + z_i = 1$, следовательно, равенство (37) справедливо. Если же $z_i = 1$, то из (40) получаем $u + v_i \leqslant w_i$. Отсюда с учётом (35) имеем $w_i - u - v_i = 0$, значит, (38) справедливо.

Рассмотрим следующую задачу смешанно-целочисленного линейного программирования, получаемую из задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ заменой задачи $\mathcal{F}$

условиями (35), (36), (39), (40), гарантирующими оптимальность её допустимого решения:

$$\min_{(x_i),\,(x_{ij}^s),\,(u^s),\,(v_i^s)} \Big(\sum_{i\in I} f_i x_i + \max_{s\in S} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij} x_{ij}^s\Big), \tag{41}$$

$$\sum_{i\in I} x_i \leqslant r, \tag{42}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij}^s = 1, \quad j\in J,\ s\in S, \tag{43}$$

$$1 - z_i^s \geqslant x_{ij}^s, \quad i\in I,\ j\in J,\ s\in S, \tag{44}$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_{ij}^s \leqslant A_i, \quad i\in I,\ s\in S, \tag{45}$$

$$x_{ij}^s \geqslant x_{ij}^0\big(1 - z_i^s\big), \quad i\in I,\ j\in J,\ s\in S, \tag{46}$$

$$\sum_{i\in I} z_i^s = p^s, \quad s\in S, \tag{47}$$

$$z_i^s \leqslant 1 - x_i, \quad i\in I,\ s\in S, \tag{48}$$

$$u^s + v_i^s \geqslant w_i^s, \quad i\in I,\ s\in S, \tag{49}$$

$$v_i^s \leqslant M\big(x_i + z_i^s\big), \quad i\in I,\ s\in S, \tag{50}$$

$$u^s + v_i^s \leqslant w_i^s z_i^s + M\big(1 - z_i^s\big), \quad i\in I,\ s\in S, \tag{51}$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad x_{ij}^s \in [0,1], \quad i\in I,\ j\in J,\ s\in S, \tag{52}$$

$$z_i^s \in \{0,1\}, \quad i\in I,\ s\in S, \tag{53}$$

$$v_i^s \geqslant 0, \quad i\in I,\ s\in S. \tag{54}$$

Обозначим полученную задачу (41)–(54) через $\mathcal{R}_2$.

Утверждение 4. *Если* (X, Z, U, V), $X = \big((x_i), \big(x_{ij}^s\big)\big)$, $Z = \big(z_i^s\big)$, $U = (u^s)$, $V = \big(v_i^s\big)$, *является оптимальным решением задачи* $\mathcal{R}_2$, *то* (X, Z) *— оптимальное решение задачи* $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Действительно, если (X, Z, U, V) — допустимое решение задачи $\mathcal{R}_2$, то в силу утверждения 3 решение Z является оптимальным решением задачи $\mathcal{F}$ для заданного вектора (x_i) и, следовательно, (X, Z) — допустимое решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. С другой стороны, если (X, Z) — допустимое решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, то Z — оптимальное решение задачи $\mathcal{F}$. Оно является оптимальным и для её релаксации, поэтому найдутся величины u^s, v_i^s, $i \in I$, $s \in S$, для которых выполняются неравенства (49) и в силу утверждения 3 неравенства (50), (51). Поэтому решение (X, Z, U, V), где $U = (u^s)$, $V = \left(v_i^s\right)$, будет допустимым решением задачи $\mathcal{R}_2$. Значения целевых функций задач $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ и $\mathcal{R}_2$ на рассматриваемых решениях равны, поэтому если (X, Z, U, V) — оптимальное решение задачи $\mathcal{R}_2$, то (X, Z) — оптимальное решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

3. Краткие результаты численных экспериментов

Для сравнения предложеных эквивалентных формулировок задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ в виде задач смешанно-целочисленного программирования была проведена серия численных экспериментов на примерах со случайно сгенерированными входными данными. В экспериментах использовался PC Intel Core i5 3.2 GHz, 4 Gb RAM с программным пакетом Gurobi 7.0. Для порождения примеров использовались следующие значения параметров: число объектов (предприятий) для защиты $m = 20$, число потребителей $n = 30$, число различных сценариев $|S| = 3$. Величина фиксированных затрат на защиту объектов выбирается так, чтобы позволить Лидеру организовать защиту не более пяти предприятий. Величина затрат на обслуживание выбирается с равномерным распределением на целых точках отрезка $[3, 8]$. Количество предприятий, атакуемых Последователем, варьируется в пределах от 5 до 10 и выбирается случайным образом с равномерным распределением. В каждом сценарии предприятия произвольным образом ранжируются по важности, получая весовые коэффициенты от 1 до 20. Во всех примерах для потребности каждого клиента полагается $a_{ij} = 1$, $i \in I$, $j \in J$, а для мощности каждого предприятия полагается $A_i = 4$, $i \in I$.

Было сгенерировано 20 наборов входных данных. Вычислительные эксперименты показали, что формулировка $\mathcal{R}_1$ предпочтительнее $\mathcal{R}_2$ с точки зрения скорости вычислений. Время, затрачиваемое на решение модели $\mathcal{R}_1$, не превосходит нескольких секунд. Поиск оптимального решения модели $\mathcal{R}_2$ требует в среднем в полтора раза больше времени. Таким образом, переформулировка $\mathcal{R}_1$, использующая свойства оптимальных решений внутренней задачи, в данном случае эффективнее стандартного подхода, состоящего в замене внутренней задачи линеаризованными соотношениями дополняющей нежёсткости. Последняя использует дополнительные переменные, а также требует применения больших констант, увеличивающих разрыв целочисленности и снижающих эффективность точных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Давыдов И. А., Мельников А. А., Кононова П. А.** Локальный поиск для задач балансировки нагрузки серверов большой размерности // Автоматика и телемеханика. 2017. № 3. С. 34–50.
2. **Aksen D., Aras N.** A bilevel fixed charge location model for facilities under imminent attack // Comput. Oper. Res. 2012. Vol. 39, No. 1. P. 1364–1381.
3. **Aksen D., Piyade N., Aras N.** The budget constrained r-interdiction median problem with capacity expansion // Central Eur. J. Oper. Res. 2010. Vol. 18, No. 3. P. 269–291.
4. **An B., Ordóñez F., Tambe M., Shieh E., Yang R., Baldwin C., DiRenzo J., Moretti K., Maule B., Meyer G.** A deployed quantal response-based patrol planning system for the U. S. Coast Guard // Interfaces. 2013. Vol. 43, No. 5. P. 400–420.
5. **Angelo J. S., Barbosa H. J. C.** A study on the use of heuristics to solve a bilevel programming problem // Int. Trans. Oper. Res. 2015. Vol. 22. P. 861–882.
6. **Beresnev V., Melnikov A.** Facility location in unfair competition // Discrete Optimization and Operations Research. Proc. 9th Int. Conf., (Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016). Cham: Springer, 2016. P. 325–335. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 9869).
7. **Brotcorne L., Hanafi S., Mansi R.** One-level reformulation of the bilevel knapsack problem using dynamic programming // Discrete Optimization 2013. Vol. 10, No. 1. P. 1–10.
8. **Delle Fave F. M., Jiang A. X., Yin Z., Zhang C., Tambe M., Kraus S., Sullivan J. P.** Game-theoretic security patrolling with dynamic execution uncertainty and a case study on a real transit system // J. Artif. Intell. Res. 2014. Vol. 50. P. 321–367.
9. **Dempe S.** Foundations of bilevel programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 332 p.
10. **Jain M., Tsai J., Pita J., Kiekintveld C., Rathi S., Tambe M., Ordóñez F.** Software assistants for randomized patrol planning for the LAX airport police and the federal air marshal service // Interfaces. 2010. Vol. 40, No. 4. P. 267–290.
11. **Jiang A. X., Yin Z., Zhang C., Tambe M., Kraus S.** Game-theoretic randomization for security patrolling with dynamic execution uncertainty // Proc. 12th Int. Conf. Auton. Agents Multiagent Syst. (Saint Paul, MN, USA, May 6–10, 2013). Richland, SC: Int. Found. Auton. Agents Multiagent Syst., 2013. P. 207–214.
12. **Martello S., Toth P.** Knapsack problems: Algorithms and computer implementations. New York: John Wiley & Sons, 1990.
13. **Melo M. T., Nickel S., Saldanha-Da-Gama F.** A tabu search heuristic for redesigning a multi-echelon supply chain network over a planning horizon // Int. J. Production Econ. 2012. Vol. 136, No. 1. P. 218–230.

14. **Scaparra M. P., Church R. L.** A bilevel mixed-integer program for critical infrastructure protection planning // Comput. Oper. Res. 2008. Vol. 35. P. 1905–1923.
15. **Stackelberg H.** The theory of the market economy. Oxford: Oxf. Univ. Press, 1952. 289 p.
16. **Zhu Y., Zheng Z., Zhang X., Cai K. Y.** The r-interdiction median problem with probabilistic protection and its solution algorithm // Comput. Oper. Res. 2013. Vol. 40. P. 451–462.

Береснев Владимир Леонидович,
Давыдов Иван Александрович,
Кононова Полина Александровна,
Мельников Андрей Андреевич

Статья поступила
19 марта 2018 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2018. Volume 25, No. 3. P. 5–22

UDC 519.8 DOI: 10.17377/daio.2018.25.612

BILEVEL "DEFENDER–ATTACKER" MODEL WITH MULTIPLE ATTACK SCENARIOS

V. L. Beresnev[1,2,a], *I. A. Davydov*[1,2,b],
P. A. Kononova[1,2,c], and *A. A. Melnikov*[1,2,d]

[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
[2]Novosibirsk State University,
1 Pirogov St., 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: [a]beresnev@math.nsc.ru, [b]vann.davydov@gmail.com,
[c]anilopko@gmail.com, [d]melnikov@math.nsc.ru

Abstract. We consider a bilevel "defender-attacker" model built on the basis of the Stackelberg game. In this model, given is a set of the objects providing social services for a known set of customers and presenting potential targets for a possible attack. At the first step, the Leader (defender) makes a decision on the protection of some of the objects on the basis of his/her limited resources. Some Follower (attacker), who is also limited in resources, decides then to attack unprotected objects, knowing the decision of the Leader. It is assumed that the Follower can evaluate the importance of each object and makes a rational decision trying to maximize the total importance of the objects attacked. The Leader does not know the attack scenario (the Follower's priorities for selecting targets for the attack). But, the Leader can consider several possible scenarios that cover the Follower's plans. The Leader's problem is then to select the set of objects for protection so that, given the set of possible attack scenarios and assuming the rational behavior of the Follower, to minimize the total costs of protecting the objects and eliminating the consequences of the attack associated with the reassignment of the facilities for customer service. The proposed model may be presented as a bilevel mixed-integer programming problem that includes an upper-level problem (the Leader problem) and a lower-level problem (the Follower problem). The main efforts in this article are aimed at reformulation of the problem as some one-level mathematical programming problems. These formulations are constructed using the properties of the optimal solution of the Follower's problem, which makes it possible to formulate necessary and sufficient optimality conditions in the form of linear relations. Bibliogr. 16.

Keywords: bilevel programming, complementarity slackness, optimality criteria.

REFERENCES

1. **I. A. Davydov, A. A. Melnikov,** and **P. A. Kononova,** Local search for load balancing problems for servers with large dimension, *Avtom. Telemekh.,* No. 3, 34–50, 2017 [Russian]. Translated in *Autom. Remote Control,* **78**, No. 3, 412–424, 2017.
2. **D. Aksen** and **N. Aras,** A bilevel fixed charge location model for facilities under imminent attack, *Comput. Oper. Res.,* **39**, No. 1, 1364–1381, 2012.
3. **D. Aksen, N. Piyade,** and **N. Aras,** The budget constrained r-interdiction median problem with capacity expansion, *Cent. Eur. J. Oper. Res.,* **18**, No. 3, 269–291, 2010.
4. **B. An, F. Ordóñez, M. Tambe, E. Shieh, R. Yang, C. Baldwin, J. DiRenzo, K. Moretti, B. Maule,** and **G. Meyer,** A deployed quantal response-based patrol planning system for the U. S. Coast Guard, *Interfaces,* **43**, No. 5, 400–420, 2013.
5. **J. S. Angelo** and **H. J. C. Barbosa,** A study on the use of heuristics to solve a bilevel programming problem, *Int. Trans. Oper. Res.,* **22**, 861–882, 2015.
6. **V. Beresnev** and **A. Melnikov,** Facility location in unfair competition, in *Discrete Optimization and Operations Research* (Proc. 9th Int. Conf. DOOR, Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016), pp. 325–335, Springer, Cham, 2016 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9869).
7. **L. Brotcorne, S. Hanafi,** and **R. Mansi,** One-level reformulation of the bilevel Knapsack problem using dynamic programming, *Discrete Optim.,* **10**, No. 1, 1–10, 2013.
8. **F. M. Delle Fave, F. M. Jiang, Z. Yin, C. Zhang, M. Tambe, S. Kraus,** and **J. P. Sullivan,** Game-theoretic security patrolling with dynamic execution uncertainty and a case study on a real transit system, *J. Artif. Intell. Res.,* **50**, 321–367, 2014.
9. **S. Dempe,** *Foundations of Bilevel Programming,* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
10. **M. Jain, J. Tsai, J. Pita, C. Kiekintveld, S. Rathi, M. Tambe,** and **F. Ordóñez,** Software assistants for randomized patrol planning for the LAX airport police and the federal air marshal service, *Interfaces,* **40**, No. 4, 267–290, 2010.
11. **A. X. Jiang, Z. Yin, C. Zhang, M. Tambe,** and **S. Kraus,** Game-theoretic randomization for security patrolling with dynamic execution uncertainty, in *Proc. 12th Int. Conf. Auton. Agents Multiagent Syst., Saint Paul, MN, USA, May 6–10, 2013,* pp. 207–214, Int. Found. Auton. Agents Multiagent Syst., Richland, SC, 2013.
12. **S. Martello** and **P. Toth,** *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations,* John Wiley & Sons, New York, USA, 1990.

13. **M. T. Melo, S. Nickel,** and **F. Saldanha-Da-Gama,** A tabu search heuristic for redesigning a multi-echelon supply chain network over a planning horizon, *Int. J. Prod. Econ.,* **136**, No. 1, 218–230, 2012.
14. **M. P. Scaparra** and **R. L. Church,** A bilevel mixed-integer program for critical infrastructure protection planning, *Comput. Oper. Res.,* **35**, 1905–1923, 2008.
15. **H. von Stackelberg,** *The Theory of the Market Economy,* Oxf. Univ. Press, Oxford, 1952.
16. **Y. Zhu, Z. Zheng, X. Zhang,** and **K. Y. Cai,** The r-interdiction median problem with probabilistic protection and its solution algorithm, *Comput. Oper. Res.,* **40**, 451–462, 2013.

Vladimir L. Beresnev,
Ivan A. Davydov,
Polina A. Kononova,
Andrey A. Melnikov

Received
19 March 2018