ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2018. Том 25, № 4. С. 27–45

УДК 519.8 DOI: 10.17377/daio.2018.25.596

# ЗАДАЧА ДВУХУРОВНЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ *)

*С. В. Иванов*

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет),
Волоколамское шоссе, 4, 125993 Москва, Россия

*E-mail:* sergeyivanov89@mail.ru

**Аннотация.** Изучается двухуровневая задача стохастического программирования с квантильным критерием. Задачи двухуровневого программирования можно рассматривать как формализацию процесса взаимодействия двух сторон. Первой стороной является лидер, принимающий решение первым, а вторая сторона (последователь) принимает решение, зная стратегию лидера и реализацию случайных параметров задачи. Предполагается, что задача последователя при заданной реализации случайных параметров и стратегии лидера линейна. Коэффициенты целевой функции последователя считаются случайными. Целью лидера является минимизация функции квантили потерь, зависящей от его собственной стратегии и оптимальной стратегии последователя. Показано, что задача последователя с вероятностью единица имеет единственное решение, когда случайные параметры имеют абсолютно непрерывное распределение. Доказана полунепрерывность снизу функции потерь, и получены условия существования решения задачи. Приведён пример, демонстрирующий, что непрерывность функции квантили не гарантируется. Сформулирована выборочная аппроксимация задачи. Приведены условия сходимости выборочной аппроксимации задачи к исходной задаче при увеличении объёма выборки по стратегии оптимизации и по значению целевой функции. Показано, что условия сходимости выполнены для почти всех значений уровня надёжности. Рассмотрен модельный пример определения размера налоговой ставки, для которого проведены численные эксперименты. Табл. 1, ил. 2, библиогр. 13.

**Ключевые слова:** стохастическое программирование, двухуровневая задача, квантильный критерий, выборочная аппроксимация.

---

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17–07–00203а).

## Введение

Аппарат двухуровневых и многоуровневых задач оптимизации используется для моделирования иерархических систем, в которых известны цели всех субъектов, принимающих решения, и решения, принимаемые на каждом из уровней, известны субъектам, находящимся на более низких уровнях. Двухуровневым задачам посвящены монографии [5,7,9].

При моделировании сложных систем, как правило, не все параметры известны на этапе моделирования, в связи с чем возникает необходимость учёта случайных факторов, для анализа влияния которых может быть использован аппарат стохастического программирования. Если необходимо обеспечить успешное функционирование системы с заданной вероятностью, то качество её функционирования может быть описано с помощью квантильного критерия. Квантильный критерий [3] представляет собой уровень потерь, непревышение которого гарантируется с заданной вероятностью. Использование квантильного критерия особенно целесообразно для описания сложных иерархических систем, так как к надёжности их функционирования, как правило, предъявляются высокие требования.

Стохастические постановки двухуровневых задач изучены слабо. Приведём описание известных результатов для двухуровневых задач стохастического программирования с квантильным критерием. В [6] рассматривалась задача проектирования транспортной сети. В качестве случайных параметров в задаче выступал спрос на перевозки. Для решения задачи предложен генетический алгоритм, основанный на статистическом моделировании. В [10] рассматривалась двухуровневая задача со случайными параметрами, распределёнными по гауссовскому закону, при наличии неопределённости, описываемой нечёткими факторами. Рассматриваемая задача сводилась к детерминированному эквиваленту. Стохастическая двухуровневая задача конкурентного размещения предприятий с квантильным критерием рассматривалась в работах [2, 11]. В качестве случайных параметров задачи выступает прибыль предприятий, случайные параметры предполагаются дискретными. В [2] задача сведена к детерминированной смешанной целочисленной двухуровневой задаче и описан поиск локально-оптимального решения. Процедура получения верхних оценок оптимальной прибыли, основанная на методах релаксации, описана в [11]. В [8] исследована двухуровневая задача со случайными параметрами, имеющими дискретное распределение и предложена методика перехода к эквивалентной детерминированной смешанной целочисленной оптимизационной задаче. В настоящей рабо-

те исследуется двухуровневая задача, в которой коэффициенты целевой функции последователя предполагаются случайными, а множество допустимых стратегий не зависит от стратегии лидера и реализации случайных параметров. Исследуется широкий класс возможных распределений случайных параметров, что затрудняет использование методов, разработанных для специальных распределений. Ряд свойств задачи доказан для абсолютно непрерывных распределений случайных параметров.

Эффективным подходом к решению задач стохастического программирования является построение выборочной аппроксимации стохастической задачи. В основе данного метода лежит замена целевой функции задачи её выборочной оценкой и дальнейшая оптимизация полученной оценки. Данный метод для задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями описан и обоснован в [12]. В [1] метод изложен для общей задачи стохастического программирования с квантильным критерием. В настоящей работе метод применяется для решения исследуемой двухуровневой задачи.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 приводится постановка двухуровневой задачи стохастического программирования с квантильным критерием и линейной задачей последователя со случайными коэффициентами целевой функции. В разд. 2 исследуются свойства задачи, доказаны полунепрерывность функции квантили и существование решения задачи. В разд. 3 описывается построение выборочной аппроксимации задачи и приводятся условия, гарантирующие сходимость выборочных оценок решения. Доказано, что сходимость имеет место для почти всех уровней надёжности. В разд. 4 приводится модельная задача исследуемого типа, предназначенная для определения размера налоговой ставки. В разд. 5 описаны результаты численных экспериментов.

## 1. Постановка задачи

Пусть $u$ — стратегия лидера, выбираемая из множества $U \subset \mathbb{R}^n$, $y$ — стратегия последователя, принадлежащая пространству $\mathbb{R}^m$. Пусть $X$ — случайный вектор, определённый на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m), \mathbf{P})$, где $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ — сигма-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}^m$. Будем считать, что $X(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$.

**Замечание 1.** Поскольку любой случайный вектор размера $m$, определённый на абстрактном вероятностном пространстве, индуцирует вероятностную меру на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, а значит, и на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$, где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ — сигма-алгебра измеримых по Борелю подмножеств $\mathbb{R}^m$, можно без ограничения общ-

ности считать, что случайный вектор $X$ определён на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m), \mathbf{P})$ и $X(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$. Вместо борелевской сигма-алгебры рассматривается бóльшая сигма-алгебра измеримых по Лебегу множеств, чтобы обеспечить полноту вероятностного пространства, необходимую для исследования случайных величин, определяемых как оптимальное решение задачи оптимизации со случайными параметрами. Более подробно данный вопрос освещён в [13].

Задача последователя при фиксированных значениях $u$ и $x$ является задачей линейного программирования и имеет следующий вид:

$$(A_2 u + x)^\top y \to \min_y \tag{1}$$

при ограничениях

$$B_2 y \leqslant b_2, \quad y \geqslant 0,$$

где $A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $b_2 \in \mathbb{R}^l$ — фиксированные матрицы и вектор. Через $Y^*(u, x)$ обозначим множество оптимальных стратегий задачи последователя (1).

Пусть функция потерь лидера $\Phi(\cdot)\colon U \times \mathbb{R}^m \to [-\infty; +\infty]$ имеет вид

$$\Phi(u, x) \triangleq \begin{cases} \min\limits_{y\in Y^*(u,x)} (f + Cu)^\top y, & \text{если } Y^*(u, x) \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{если } Y^*(u, x) = \varnothing, \end{cases} \tag{2}$$

где $f \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Рассмотрим функцию квантили потерь лидера

$$u \mapsto [\Phi(u, X)]_\alpha \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}, \quad u \in U, \tag{3}$$

где

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\},$$

$\alpha \in (0, 1)$ — заданный уровень надёжности. Функция $u \mapsto P_\varphi(u)$ называется *функцией вероятности*. Сформулируем задачу лидера в виде

$$\psi^* \triangleq \min_{u\in U}\{c_1^\top u + [\Phi(u, X)]_\alpha\}, \tag{4}$$

где $c_1 \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор. Будем считать, что множество $U$ задано в виде $U \triangleq \{u \in \mathbb{R}^n \mid A_1 u \leqslant b_1\}$. Двухуровневой задачей стохастического программирования с квантильным критерием является задача лидера (4). Заметим, что данная задача сформулирована в оптимистической постановке. Это значит, что лидер учитывает лучшую для себя оптимальную стратегию последователя.

## 2. Свойства задачи

Рассмотрим задачу последователя (1). Сформулируем утверждение об условиях, гарантирующих единственность решения данной задачи.

**Утверждение 1.** *Пусть случайный вектор $X$ имеет абсолютно непрерывное распределение относительно меры Лебега и множество допустимых стратегий задачи последователя $\{y \in \mathbb{R}^m \mid B_2 y \leqslant b_2,\ y \geqslant 0\}$ непусто и ограничено. Тогда множество $Y^*(u, X)$ всегда непусто и с вероятностью единица состоит из единственного элемента.*

Доказательство. Обозначим множество допустимых стратегий задачи последователя через $Y$. В силу предположения о непустоте и ограниченности множества $Y$ задача последователя имеет оптимальное решение при любом значении стратегии лидера $u$ и реализации случайных параметров задачи $x$. Рассмотрим случай $m = 1$. Тогда оптимальное решение задачи последователя может быть неединственным, только если $X = -A_2 u$, что происходит с нулевой вероятностью. Пусть теперь $m \geqslant 2$. В этом случае оптимальное решение задачи последователя может быть неединственным, только если вектор $A_2 u + x$ перпендикулярен одной из граней множества $Y$. В силу предположения об абсолютной непрерывности распределения случайного вектора $X$ вероятность такого события равна нулю, а значит, с вероятностью единица решение задачи последователя (1) будет единственным. Утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение о полунепрерывности функции потерь $\Phi(\cdot)$.

**Утверждение 2.** *Функция $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$ полунепрерывна снизу по $u$ при каждом фиксированном значении $x$ и измерима по $x$ для всех $u$. При этом для каждого фиксированного $u \in U$ множество значений функции $x \mapsto \Phi(u, x)$ конечно.*

Доказательство. Запишем задачу последователя в канонической форме. Для этого введём вектор дополнительных переменных $y^+ \in \mathbb{R}^l$. Будем использовать следующие обозначения:

$$c(u, x) \triangleq \begin{pmatrix} A_2 u + x \\ 0_l \end{pmatrix}, \quad B \triangleq \begin{pmatrix} B_2 & I \end{pmatrix}, \quad y' \triangleq \begin{pmatrix} y \\ y^+ \end{pmatrix},$$

где $0_l$ — нулевой вектор размера $l$. Тогда задача последователя может быть записана в виде

$$c^\top(u, x) y' \to \min_{y'} \tag{5}$$

при ограничениях

$$B y' = b_2, \quad y' \geqslant 0.$$

Из теории линейного программирования известно, что базисное решение $y_{\mathbf{B}}$ задачи (5) оптимально в том и только том случае, когда соответствующая ему базисная матрица $\mathbf{B}$ такова, что

$$c^{\top}(u,x) - c_{\mathbf{B}}^{\top}(u,x)\mathbf{B}^{-1}B \geqslant 0, \tag{6}$$

$$\mathbf{B}^{-1}b \geqslant 0, \tag{7}$$

где $c_{\mathbf{B}}(u,x)$ — подвектор $c(u,x)$, составленный из его координат, соответствующих базисным переменным. Множество базисных матриц, удовлетворяющих ограничениям (6) и (7), обозначим через $\mathfrak{B}(u,x)$.

Введём функцию $f_{\mathbf{B}}(\cdot)\colon U\times\mathbb{R}^m \to (-\infty;+\infty]$, совпадающую со значением функции потерь лидера (2) для всех пар $(u,x)$, при которых базис $\mathbf{B}$ является оптимальным в задаче последователя:

$$f_{\mathbf{B}}(u,x) = \begin{cases} ((f+Cu)^{\top}, 0_l^{\top})^{\top} y_{\mathbf{B}}, & \text{если } \mathbf{B}\in\mathfrak{B}(u,x), \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку функция $(u,x) \mapsto f_{\mathbf{B}}(u,x)$ принимает конечные значения на замкнутом множестве и непрерывна на нём, она полунепрерывна снизу.

Используя введённые обозначения, функцию потерь лидера можно представить в виде

$$\Phi(u,x) = \min_{\mathbf{B}\in\mathfrak{B}} f_{\mathbf{B}}(u,x),$$

где $\mathfrak{B}$ — множество всех базисных матриц, составленных из столбцов матрицы $B$. В силу утверждения 1 значение $\Phi(u,x)$ всегда конечно. Согласно [13, предложение 1.26] поточечный минимум конечного числа полунепрерывных снизу функций является полунепрерывной снизу функцией. Таким образом, функция $(u,x)\mapsto\Phi(u,x)$ полунепрерывна снизу по совокупности аргументов, а значит, и полунепрерывна снизу по $u$ при каждом фиксированном значении $x$, а также измерима по $x$ для всех $u$.

Из того, что при заданном $u\in U$ и $\mathbf{B}\in\mathfrak{B}$ функция $x\mapsto f_{\mathbf{B}}(u,x)$ может принимать только два возможных значения и множество $\mathbf{B}\in\mathfrak{B}$ конечно, следует, что множество возможных значений функции $x\mapsto\Phi(u,x)$ при каждом $u\in U$ конечно. Утверждение 2 доказано.

Из утверждения 2 выводится следствие о существовании решения задачи (4).

**Следствие 1.** *Если множество $U$ непусто и ограничено, то существует оптимальное решение задачи* (4).

Доказательство. Поскольку множество $U$ задаётся системой линейных неравенств, оно замкнуто, а значит, множество $U$ является компактом. Как доказано в [3], при полунепрерывности снизу функции $u \mapsto \Phi(u, x)$ для почти всех $x$ и измеримости функции $u \mapsto \Phi(u, x)$ для всех $u \in U$ функция квантили $u \mapsto [\Phi(u, X)]_\alpha$ полунепрерывна снизу на $U$. Таким образом, для функции $u \mapsto [\Phi(u, X)]_\alpha$ и множества $U$ выполнены условия теоремы Вейерштрасса, гарантирующей существование точки минимума. Следствие 1 доказано.

При доказательстве следствия 1 существенно использовалась полунепрерывность снизу функции $u \mapsto \Phi(u, x)$, которая гарантирована оптимистической постановкой задачи 4. В случае пессимистической постановки полунепрерывность снизу функции $u \mapsto \Phi(u, x)$ не гарантирована, поэтому решения задачи 4 в пессимистической постановке в общем случае может не существовать. Решение задачи 4 в пессимистической постановке будет существовать и совпадать с решением задачи 4 в оптимистической постановке при абсолютно непрерывном случайном векторе $X$, что следует из утверждения 1

Приведём пример, показывающий, что непрерывность функции квантили в общем случае не гарантируется.

Пусть задача последователя имеет вид

$$(x + u)y \to \min_{y \in [0,1]}.$$

Нетрудно видеть, что множество оптимальных решений задачи последователя имеет следующий вид:

$$Y^*(u, x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{если } x + u < 0, \\ \{0\}, & \text{если } x + u > 0, \\ [0, 1], & \text{если } x + u = 0. \end{cases}$$

Пусть $f = 1$, $C = 0$, тогда

$$\Phi(u, x) = \min_{y \in Y^*(u,x)} fy = \begin{cases} 1, & \text{если } x + u < 0, \\ 0, & \text{если } x + u \geqslant 0. \end{cases}$$

Функция квантили записывается в виде

$$\varphi_\alpha(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{P}\{X + u \geqslant 0\} \geqslant \alpha, \\ 1, & \text{если } \mathbf{P}\{X + u \geqslant 0\} < \alpha. \end{cases}$$

Например, для равномерного распределения на отрезке $[0;1]$ функция квантили имеет вид

$$\varphi_\alpha(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u < \alpha - 1, \\ 0, & \text{если } u \geqslant \alpha - 1. \end{cases}$$

Таким образом, функция $u \mapsto \varphi_\alpha(u)$ не является непрерывной, но будет полунепрерывной снизу.

Для дальнейшего исследования сходимостей выборочных аппроксимаций задачи представляют интерес свойства функции $(u,\varphi) \mapsto P_\varphi(u)$.

**Утверждение 3.** *Пусть случайный вектор $X$ имеет абсолютно непрерывное распределение. Тогда область определения функции $(u,\varphi) \mapsto P_\varphi(u)$ можно разбить на конечное число полиэдров, на внутренностях которых функция непрерывна, а в граничных точках полунепрерывна сверху.*

Доказательство. В [3, теорема 2.2] доказано, что полунепрерывность сверху функции вероятности следует из полунепрерывности снизу по $u \in U$ и измеримости по $x$ функции потерь $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$.

Найдём области непрерывности функции вероятности. Введём величины

$$\varphi_{\mathbf{B}}(u) \triangleq \left((f + Cu)^\top, 0_l^\top\right)^\top y_{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{B} \in \mathfrak{B}.$$

При фиксированном $u \in U$ упорядочим величины $\varphi_{\mathbf{B}}(u)$ по возрастанию. В результате получим последовательность $\{\varphi_{(k)}(u)\}_{k=1}^K$, где $K = |\mathfrak{B}|$, при этом

$$\varphi_{(1)}(u) \leqslant \varphi_{(2)}(u) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_{(K)}(u).$$

Базисную матрицу $\mathbf{B}$, соответствующую $\varphi_{(k)}(u)$, обозначим через $\mathbf{B}_{(k)}$. С помощью введённых обозначений можно записать

$$P_\varphi(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi < \varphi_{(1)}(u), \\ \mathbf{P}\left\{ \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} \{\mathbf{B}_{(i)} \in \mathfrak{B}(u,X)\} \right\}, & \text{если } \varphi_{(k-1)}(u) \leqslant \varphi < \varphi_{(k)}(u), \\ 1, & \text{если } \varphi > \varphi_{(K)}(u). \end{cases}$$

Неравенства $\varphi_{(k-1)}(u) \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{(k)}(u)$ задают полиэдры, на внутренности каждого из которых функция $(u,\varphi) \mapsto P_\varphi(u)$ непрерывна в силу абсолютной непрерывности распределения случайного вектора $X$. Утверждение 3 доказано.

### 3. Выборочная аппроксимация задачи

Рассмотрим последовательность $\{X_N\}_{N=1}^{\infty}$ независимых случайных векторов, одинаково распределённых с $X$. Будем считать, что данная последовательность определена на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}')$. Ниже, если не оговорено противное, сходимость почти наверное (п. н.) будет рассматриваться относительно вероятностной меры $\mathbf{P}'$.

**Замечание 2.** Процедура построения вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}')$, на котором можно определить последовательность независимых одинаково распределённых случайных векторов, описана в доказательстве теоремы Колмогорова [4]. Заметим, что аналогичное условию $X(x) = x$ требование $X_N(x) = x$ не может быть выполнено по причине независимости случайных векторов, образующих последовательность $\{X_N\}_{N=1}^{\infty}$. Описание вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}')$ не приводится в статье, поскольку его структура несущественна для дальнейшего изложения.

Если в выражении (3) вероятность события $\{\varphi \mid \Phi(u, X) \leqslant \varphi\}$ заменить её выборочной оценкой

$$P_{\varphi}^{(N)}(u) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \chi_{(-\infty,0]}(\Phi(u, X_k) - \varphi), \quad N \in \mathbb{N},$$

где

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

то получится следующая оценка функции квантили:

$$\varphi_{\alpha}^{(N)}(u) \triangleq \min \left\{\varphi \mid P_{\varphi}^{(N)}(u) \geqslant \alpha\right\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, вместо исходной задачи (4) можно рассмотреть её выборочную аппроксимацию:

$$\psi_N \triangleq \min_{u \in U} \left\{c_1^{\top} u + \varphi_{\alpha}^{(N)}(u)\right\}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

$$u_N \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \left\{c_1^{\top} u + \varphi_{\alpha}^{(N)}(u)\right\}, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Полученная задача при фиксированных реализациях случайных векторов является детерминированной двухуровневой задачей, и для её решения могут быть применены соответствующие методы [5, 7, 9].

В [1] доказана теорема о сходимости выборочных аппроксимаций общей задачи стохастического программирования с квантильным критерием вида

$$\psi^* \triangleq \min_{u\in U}[\Psi(u, X)]_\alpha. \tag{10}$$

Заметим, что задача (4) может быть представлена в виде (10), если $\Psi(u,x) = c_1^\top u + \Phi(u,x)$. В формулировке теоремы через $u_N$ и $\psi_N$ обозначены оптимальная стратегия и оптимальное значение целевой функции в задаче минимизации выборочной оценки квантили $[\Psi(u,X)]_\alpha$, соответствующей выборке объёма $N$. Также используется обозначение

$$\widetilde{P}_\psi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Psi(u,X) \leqslant \psi\}.$$

**Теорема 1** [1]**.** *Пусть выполнены следующие условия.*

1. *Множество $U$ компактно и непусто.*

2. *Функция $\Psi(\cdot)\colon U\times\mathbb{R}^m \to (-\infty,+\infty]$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}(U)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ и полунепрерывна снизу по $u\in U$ при каждом фиксированном значении $x\in\mathbb{R}^m$.*

3. *Для всех $\varepsilon > 0$ существует пара $(\widetilde{u},\widetilde{\psi}) \in U\times\mathbb{R}$ такая, что*

$$|\psi^* - \widetilde{\psi}| \leqslant \varepsilon, \quad \widetilde{P}_{\widetilde{\psi}}(\widetilde{u}) > \alpha.$$

*Тогда $\psi_N \to \psi^*$ (п. н.) при $N\to\infty$ и каждая предельная точка последовательности $\{u_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ является оптимальной в задаче* (10) *(п. н.).*

Из утверждения 2 следует выполнение условия 2 теоремы 1.

**Утверждение 4.** *Условие* 3 *теоремы* 1 *выполнено для всех $\alpha$, принадлежащих интервалу $(0,1)$, за исключением не более чем счётного множества точек.*

Доказательство. Предположим, что условие 3 теоремы 1 не выполнено. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\psi\in[\psi^*-\varepsilon,\psi^*+\varepsilon]$ имеем

$$\sup_{u\in U}\widetilde{P}_\psi(u) \leqslant \alpha.$$

Согласно следствию 1 решение задачи (10) существует, поэтому

$$\sup_{\psi\in[\psi^*-\varepsilon,\psi^*+\varepsilon]}\ \sup_{u\in U}\widetilde{P}_\psi(u) = \max_{\substack{\psi\in[\psi^*-\varepsilon,\psi^*+\varepsilon],\\ u\in U}}\widetilde{P}_\psi(u) = \alpha.$$

В силу монотонности вероятности функция

$$\psi \mapsto \sup_{u\in U}\widetilde{P}_\psi(u) \tag{11}$$

монотонно неубывающая, поэтому

$$\sup_{u\in U} \widetilde{P}_\psi(u) = \alpha$$

для всех $\psi \in [\psi^*, \psi^* + \varepsilon]$, а значит, область определения монотонной функции (11) содержит участок, на котором она постоянна. Каждому такому участку можно сопоставить принадлежащее ему рациональное число, поэтому множество участков постоянства функции (11) не более чем счётно. Таким образом, множество значений $\alpha$, при которых условие 3 теоремы 1 не выполнено, не более чем счётно. Утверждение 4 доказано.

Если множество $U$ конечно, то сформулированное утверждение 4 можно усилить.

**Утверждение 5.** *Пусть множество $U$ конечно. Тогда условие* 3 *теоремы* 1 *выполнено для всех $\alpha \in (0, 1)$ за исключением некоторого конечного множества.*

Доказательство. Как следует из доказательства утверждения 4, условие 3 теоремы 1 может быть не выполнено, только если

$$\widetilde{P}_\psi(u) = \mathbf{P}\{\Psi(u, X) \leqslant \psi\} = \alpha \tag{12}$$

для некоторой пары $\psi \in \mathbb{R}$, $u \in U$. Из утверждения 2 следует, что при каждом $u \in U$ случайная величина $\Psi(u, X)$ имеет дискретное распределение с конечным множеством реализаций. Таким образом, множество

$$A \triangleq \bigcup_{u\in U} \bigcup_{\psi\in\mathbb{R}} \{\widetilde{P}_\psi(u)\}$$

конечно, а значит, равенство (12) может нарушаться только при $\alpha \in A$. Утверждение 5 доказано.

Для определения того, в каких именно точках может быть не выполнено условие 3 теоремы 1, могут быть использованы утверждение 3 о свойствах функции $(u, \varphi) \mapsto P_\varphi(u)$ и равенство $\widetilde{P}_\psi(u) = P_{\psi - c^\top u}(u)$.

Для решения задачи (4) можно предложить следующий алгоритм, заключающийся в увеличении объёма выборки до тех пор, пока не будет найдено приближённое решение задачи.

1. Установить $N := 0$. Выбрать $\Delta \in \mathbb{N}$.
2. Получить реализации случайного вектора $X$:

$$x^{N+1}, x^{N+2}, \ldots, x^{N+\Delta}.$$

3. Увеличить объём выборки: $N := N + \Delta$.

4. Найти $\psi_N$ и $u_N$, решив задачу (8), (9).

5. Если $|\psi_N - \psi_{N-\Delta}| > \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — параметр алгоритма, задающий точность, то перейти к шагу 1.

Также в качестве критерия окончания можно рассматривать стабилизацию значения целевой функции в течение нескольких итераций. По теореме 1 в случае выполнения её условий предложенный алгоритм будет сходиться за конечное число шагов п. н.

### 4. Задача определения налоговой ставки

Рассмотрим модельную задачу, которая может быть записана в виде (4). В качестве лидера будем рассматривать государство, а в качестве последователя — производителя. Задача лидера состоит в определении размера налоговой ставки, обеспечивающей максимальный сбор налогов. Целью последователя является максимизация собственной прибыли после уплаты налогов. Производитель имеет возможность выпускать несколько видов продукции.

Стратегией лидера является размер налоговой ставки $u \in [0; 1]$. Стратегией последователя является вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top$, где $y_j$ — объём производства $j$-го вида продукции, $j = \overline{1, m}$.

Задача последователя является стандартной задачей планирования производства в условиях ограниченных ресурсов. Считается, что для производства единицы продукции $j$-го вида требуется $A_{2ij}$ единиц ресурсов $i$-го типа, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, l}$. Величины $A_{2ij}$ определяют технологическую матрицу $A_2$. Заданы цены $c_j$ на каждый из видов продукции, $j = \overline{1, m}$, и доступные объёмы ресурсов каждого типа $b_{2i}$, $i = \overline{1, l}$. Через $c$ и $b_2$ обозначим векторы, составленные из величин $c_j$ и $b_{2i}$ соответственно.

Издержки производства единицы продукции $j$-го типа $X_j$, $j = \overline{1, m}$, будем считать случайными. Случайный вектор, составленный из данных случайных величин, будем обозначать через $X$, а его реализации — через $x$.

Последователь при принятии своего решения знает реализацию случайного вектора $X$ и величину налоговой ставки. Таким образом, задача последователя формулируется как задача максимизации прибыли при ограничениях на ресурсы:

$$Y^*(u, x) = \operatorname{Arg}\min_{y \in Y} \{x^\top y - (1 - u)c^\top y\},$$

где множество $Y$ задаётся системой ограничений

$$A_2 y \leqslant b_2, \quad y \geqslant 0.$$

Потери лидера задаются соотношением

$$\Phi(u,x) = \min_{y \in Y^*(u,x)} \{-uc^\top y\},$$

т. е. они равны величине сбора налогов, взятой с противоположным знаком. Будем считать, что лидер ставит целью максимизировать величину гарантированного с вероятностью $\alpha$ сбора налогов. Тогда для поиска его оптимальной стратегии можно сформулировать двухуровневую задачу стохастического программирования с квантильным критерием:

$$[\Phi(u,X)]_\alpha \to \min_{u \in [0,1]}.$$

## 5. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим задачу определения налоговой ставки для следующих данных:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что издержки производства $X_1$, $X_2$ независимы и описываются равномерным распределением на отрезке $[0,3]$.

Результат применения алгоритма для решения задачи при $\alpha = 0{,}8$ и $\alpha = 0{,}95$ отражён в табл. 1. Для удобства значение целевой функции приводится с противоположным знаком.

Таблица 1

| | $\alpha = 0{,}8$ | | $\alpha = 0{,}95$ | |
|---|---|---|---|---|
| $N$ | $u_N$ | $-\psi_N$ | $u_N$ | $-\psi_N$ |
| 500 | 0,630 | 2,520 | 0,495 | 1,980 |
| 1000 | 0,625 | 2,500 | 0,490 | 1,960 |
| 1500 | 0,625 | 2,500 | 0,490 | 1,960 |
| 2000 | 0,625 | 2,500 | 0,490 | 1,960 |
| 2500 | 0,625 | 2,500 | 0,490 | 1,960 |
| 3000 | 0,625 | 2,500 | 0,495 | 1,980 |
| 3500 | 0,625 | 2,500 | 0,495 | 1,980 |
| 4000 | 0,630 | 2,520 | 0,495 | 1,980 |
| 4500 | 0,630 | 2,520 | 0,500 | 2,000 |
| 5000 | 0,630 | 2,520 | 0,500 | 2,000 |
| 5500 | 0,625 | 2,500 | 0,495 | 1,980 |
| 6000 | 0,625 | 2,500 | 0,495 | 1,980 |
| 6500 | 0,630 | 2,520 | 0,500 | 2,000 |
| 7000 | 0,630 | 2,520 | 0,495 | 1,980 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7500 | 0,630 | 2,520 | 0,495 | 1,980 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 10000 | 0,630 | 2,520 | 0,495 | 1,980 |

Для поиска оптимального значения стратегии лидера $u_N$ в аппроксимирующей задаче перебирались её значения с шагом 0,005.

Из таблицы видна стабилизация значений целевой функции и стратегии с $N = 7000$. При этом оптимальный размер налоговой ставки для уровня надёжности 0,8 составляет 63%, а для уровня надёжности 0,95 — 49,5%.

График зависимости гарантированной величины сбора налогов для уровня надёжности 0,8 приведён на рис. 1, а для уровня надёжности 0,95 — на рис. 2.

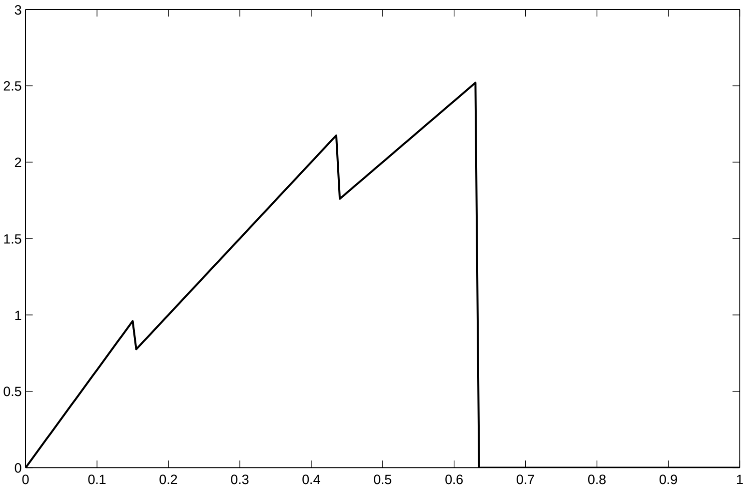


Рис. 1. График зависимости $-\varphi_{0,8}^{(10000)}(u)$ от $u$.

Как и следовало ожидать, полученные графики показывают, что сбор налогов является низким как при низкой, так и при высокой налоговой ставке. При высокой налоговой ставке производителю невыгодно выпускать продукцию, поэтому он уходит с рынка. Заметим, что при незначительном отклонении от оптимальной стратегии государства производитель будет уходить с рынка. По этой причине полученная в результате решения модельной задачи стратегия государства, хотя и обеспечивает максимальный сбор налогов, не может быть реализована на практике.

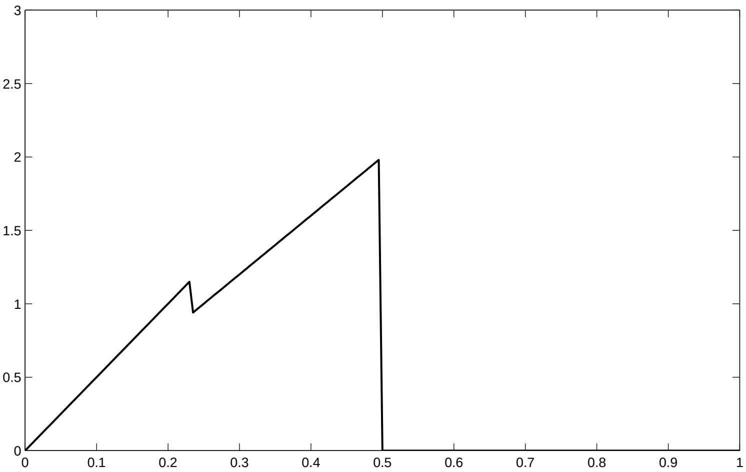


Рис. 2. График зависимости $-\varphi_{0,95}^{(10000)}(u)$ от $u$.

### Заключение

В статье рассмотрена двухуровневая задача стохастического линейного программирования с квантильным критерием и случайными параметрами в целевой функции последователя. Доказаны утверждения о свойствах задачи, показана сходимость выборочных аппроксимаций задачи. Сходимость проверена экспериментально для модельной задачи. В дальнейшем планируется провести исследования общей двухуровневой задачи стохастического программирования с квантильным критерием и получить обобщения результатов данной работы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Иванов С. В., Кибзун А. И.** О сходимости выборочных аппроксимаций задач стохастического программирования с вероятностными критериями // Автоматика и телемеханика. 2018. № 2. С. 19–35.
2. **Иванов С. В., Морозова М. В.** Стохастическая задача конкурентного размещения предприятий с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. 2016. № 3. С. 109–122.
3. **Кибзун А. И., Кан Ю. С.** Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009. 372 с.
4. **Ширяев А. Н.** Вероятность-1. М.: МЦНМО, 2017. 552 с.
5. **Bard J. F.** Practical bilevel optimization: Algorithms and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. 476 p.

6. **Chen A., Kim J., Zhou Z., Chootinan P.** Alpha reliable network design problem // Transp. Res. Rec., J. Transp. Res. Board. 2007. Vol. 2029. P. 49–57.
7. **Dempe S.** Foundations of bilevel programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 309 p.
8. **Dempe S., Ivanov S., Naumov A.** Reduction of the bilevel stochastic optimization problem with quantile objective function to a mixed-integer problem // Appl. Stoch. Models Bus. Ind. 2017. Vol. 33, No. 5. P. 544–554.
9. **Dempe S., Kalashnikov V., Pérez-Valdés G. A., Kalashnykova N.** Bilevel programming problems: theory, algorithms and applications to energy network. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer, 2015. 325 p.
10. **Katagiri H., Uno T., Kato K., Tsuda H., Tsubaki H.** Random fuzzy bilevel linear programming through possibility-based value at risk model // Int. J. Mach. Learn. Cybern. 2014. Vol. 5, No. 2. P. 211–224.
11. **Melnikov A., Beresnev V.** Upper bound for the competitive facility location problem with quantile criterion // Discrete optimization and operations research. Proc. 9th Int. Conf. DOOR (Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016). Cham: Springer, 2016. P. 373–387. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 9869).
12. **Pagnoncelli B. K., Ahmed S., Shapiro A.** Sample average approximation method for chance constrained programming: theory and applications // J. Optim. Theory Appl. 2009. Vol. 142. P. 399–416.
13. **Rockafellar R. T., Wets R. J.-B.** Variational analysis. Heidelberg: Springer, 2009. 736 p.

*Иванов Сергей Валерьевич*

Статья поступила
16 октября 2017 г.

Исправленный вариант —
19 апреля 2018 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2018. Volume 25, No. 4. P. 27–45

UDC 519.8 DOI: 10.17377/daio.2018.25.596

# A BILEVEL STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEM WITH RANDOM PARAMETERS IN THE FOLLOWER'S OBJECTIVE FUNCTION

*S. V. Ivanov*
Moscow Aviation Institute (National Research University),
4 Volokolamskoe Shosse, 125993 Moscow, Russia
*E-mail:* sergeyivanov89@mail.ru

**Abstract.** Under study is a bilevel stochastic linear programming problem with quantile criterion. Bilevel programming problems can be considered as formalization of the process of interaction between two parties. The first party is a Leader making a decision first; the second is a Follower making a decision knowing the Leader's strategy and the realization of the random parameters. It is assumed that the Follower's problem is linear if the realization of the random parameters and the Leader's strategy are given. The aim of the Leader is the minimization of the quantile function of a loss function that depends on his own strategy and the optimal Follower's strategy. It is shown that the Follower's problem has a unique solution with probability 1 if the distribution of the random parameters is absolutely continuous. The lower-semicontinuity of the loss function is proved and some conditions are obtained of the solvability of the problem under consideration. Some example shows that the continuity of the quantile function cannot be provided. The sample average approximation of the problem is formulated. The conditions are given to provide that, as the sample size increases, the sample average approximation converges to the original problem with respect to the strategy and the objective value. It is shown that the convergence conditions hold for almost all values of the reliability level. A model example is given of determining the tax rate, and the numerical experiments are executed for this example. Tab. 1, illustr. 2, bibliogr. 13.

**Keywords:** stochastic programming, bilevel problem, quantile criterion, value-at-risk, sample average approximation.

## REFERENCES


1. **S. V. Ivanov** and **A. I. Kibzun,** On the convergence of sample approximations for stochastic programming problems with probabilistic criteria, *Avtom. Telemekh.,* No. 2, 19–35, 2018 [Russian]. Translated in *Autom. Remote Control,* **79**, No. 2, 216–228, 2018.
2. **S. V. Ivanov** and **M. V. Morozova,** Stochastic problem of competitive location of facilities with quantile criterion, *Avtom. Telemekh.,* No. 3, 109–122, 2016 [Russian]. Translated in *Autom. Remote Control,* **77**, No. 3, 451–461, 2016.
3. **A. I. Kibzun** and **Yu. S. Kan,** *Stochastic Programming Problems with Probabilistic Criteria,* Fizmatlit, Moscow, 2009 [Russian].
4. **A. N. Shiryaev** *Probability*-1, MTsNMO, Moscow, 2007 [Russian]. Translated under the title *Probability*-1, Springer, New York, 2016 (Grad. Texts Math., Vol. 95).
5. **J. F. Bard,** *Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications,* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.
6. **A. Chen, J. Kim, Z. Zhou,** and **P. Chootinan,** Alpha reliable network design problem, *Transp. Res. Rec., J. Transp. Res. Board,* **2029**, 49–57, 2007.
7. **S. Dempe,** *Foundations of Bilevel Programming,* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
8. **S. Dempe, S. V. Ivanov,** and **A. Naumov,** Reduction of the bilevel stochastic optimization problem with quantile objective function to a mixed-integer problem, *Appl. Stoch. Models Bus. Ind.,* **33**, No. 5, 544–554, 2017.
9. **S. Dempe, V. Kalashnikov, G. A. Pérez-Valdés,** and **N. Kalashnykova,** *Bilevel Programming Problems: Theory, Algorithms and Applications to Energy Network,* Springer, Heidelberg, 2015.
10. **H. Katagiri, T. Uno, K. Kato, H. Tsuda,** and **H. Tsubaki,** Random fuzzy bilevel linear programming through possibility-based value at risk model, *Int. J. Mach. Learn. Cybern.,* **5**, No. 2, 211–224, 2014.
11. **A. Melnikov** and **V. Beresnev,** Upper bound for the competitive facility location problem with quantile criterion, in *Discrete Optimization and Operations Research* (Proc. 9th Int. Conf. DOOR, Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016), pp. 373–387, Springer, Cham, 2016 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9869).
12. **B. K. Pagnoncelli, S. Ahmed,** and **A. Shapiro,** Sample average approximation method for chance constrained programming: Theory and applications, *J. Optim. Theory Appl.,* **142**, 399–416, 2009.

13. **R. T. Rockafellar** and **R. J.-B. Wets,** *Variational Analysis,* Springer, Heidelberg, 2009 (Grundlehren Math. Wiss., Vol. 317).

*Sergey V. Ivanov*

Received
16 October 2017
Revised
19 April 2018