ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2018. Том 25, № 4. С. 15–26

УДК 519.71 DOI: 10.17377/daio.2018.25.602

# МАКСИМАЛЬНЫЕ $k$-НЕРАЗДЕЛЁННЫЕ СЕМЕЙСТВА ПОДМНОЖЕСТВ И БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

*Ю. А. Зуев*

Московский гос. технический университет им. Н. Э. Баумана,
2-я Бауманская ул., 5, стр. 1, 105005 Москва, Россия
*E-mail*: 79851965730@yandex.ru

**Аннотация.** Семейство подмножеств $n$-элементного множества называется *$k$-неразделённым*, если пересечение любых $k$ подмножеств семейства непусто. Семейство называется *максимальным $k$-неразделённым*, если к нему невозможно добавить ни одного подмножества, не нарушив условия $k$-неразделённости. Во взаимно однозначном соответствии с каждым семейством подмножеств находится булева функция, единичные наборы которой являются характеристическими векторами подмножеств. Показано, что семейство подмножеств будет максимальным 2-неразделённым тогда и только тогда, когда соответствующая ему булева функция является монотонной самодвойственной. Представлена асимптотика для числа таких семейств. Указан также ряд свойств булевых функций, соответствующих $k$-неразделённым семействам, при $k > 2$. Библиогр. 9.

**Ключевые слова:** $k$-неразделённое семейство подмножеств, монотонная самодвойственная булева функция, слой булева куба.

## Введение

Подмножества конечного множества с операциями объединения, пересечения и дополнения образуют булеву алгебру и являются важнейшим предметом изучения в дискретной математике. Так как подмножества $n$-элементного множества находятся во взаимно однозначном соответствии с булевыми векторами длины $n$ — характеристическими векторами подмножеств, изучение семейств таких подмножеств с заданными ограничениями на пересечения подмножеств играют важную роль в информатике, помехоустойчивом кодировании и криптографии. Ряд важных теорем дискретной математики может быть адекватно переформулирован на языке пересечений подмножеств. Так, знаменитая гипотеза о существовании матриц Адамара $H_n$ для всех $n$, кратных четырём, эквивалентна существованию в $4k$-элементном множестве семейства из $4k - 1$ подмножеств мощности $2k$ каждое, все попарные пересечения которых имеют мощность $k$.

Простейшим нетривиальным ограничением, которому должно удовлетворять семейство подмножеств, является отсутствие в семействе пары подмножеств с пустым пересечением. Классическим результатом является полученная в 1961 г. Эрдёшем, Ко и Радо [8] теорема, согласно которой максимальное число $l$-элементных подмножеств $n$-элементного множества с попарно непустыми пересечениями при условии $l < n/2$ равно $C_{n-1}^{l-1}$, и этот максимум достигается в том и только в том случае, когда берутся все подмножества, содержащие некоторый фиксированный элемент.

Данный результат многократно обобщался в различных направлениях. В дальнейшем будут использоваться следующие определения.

**Определение 1.** Пусть $k$ натуральное, $k \geqslant 2$. Семейство подмножеств $n$-элементного множества называется *$k$-неразделённым*, если пересечение любых $k$ подмножеств семейства непусто.

Ясно, что $k$-неразделённое семейство при $k > 2$ является $(k-1)$-неразделённым.

**Определение 2.** $k$-Неразделённое семейство называется *точным $k$-неразделённым*, если оно не $(k+1)$-неразделённое, т. е. существуют $k+1$ подмножеств, пересечение которых пусто.

**Определение 3.** Семейство подмножеств называется *полностью неразделённым*, если пересечение всех подмножеств семейства непусто.

**Определение 4.** $k$-Неразделённое семейство называется *максимальным $k$-неразделённым*, если к нему невозможно добавить ни одного подмножества, не нарушив условия $k$-неразделённости.

Таким образом, в теореме Эрдёша, Ко и Радо речь идёт о наибольшем среди максимальных 2-неразделённых семейств подмножеств заданной мощности и оказывается, что такое семейство является полностью неразделённым.

Большое число задач, посвящённых данной проблематике, было поставлено в работе Эрдёша и Клейтмена [7]. В этой работе были затронуты, в частности, вопросы оценки мощностей $k$-неразделённых и максимальных $k$-неразделённых семейств без фиксации мощности подмножеств. Позднее А. Д. Коршуновым в [2–4] были получены асимптотики для числа $k$-неразделённых семейств подмножеств нефиксированной мощности при заданном $k$ и $n \to \infty$.

В настоящей работе изучаются максимальные $k$-неразделённые семейства без условия равномощности подмножеств семейства. Их изучение ведётся на языке булевых функций. Основанием для этого является тот факт, что $2^{2^n}$ семейств подмножеств $n$-элементного множества находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с $2^{2^n}$ булевыми функциями от $n$ переменных, при котором характеристический вектор подмножества является единичным набором булевой функции (набором, на котором булева функция принимает единичное значение).

**Определение 5.** Семейство подмножеств $n$-элементного множества и булева функция от $n$ переменных называются *соответствующими* друг другу, если единичные наборы булевой функции являются характеристическими векторами подмножеств.

На языке булевых функций удаётся дать характеризацию максимальных 2-неразделённых семейств и, опираясь на результаты А. А. Сапоженко [6], получить асимптотику их числа. Связи между максимальными $k$-неразделёнными семействами и соответствующими булевыми функциями установлены и при $k > 2$.

Связанные с булевыми функциями и широко используемые в настоящей работе, но неопределяемые здесь такие понятия, как булева функция, монотонная булева функция, нижняя единица монотонной булевой функции, самодвойственная булева функция, слой булева куба, хорошо известны. При необходимости их можно найти в стандартных руководствах по дискретной математике, например, в [1, 5].

## 1. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведём несколько простейших результатов, относящихся к булевым функциям, соответствующим максимальным $k$-неразделённым семействам.

**Утверждение 1.** *Булева функция, соответствующая максимальному $k$-неразделённому семейству, при любом $k \geqslant 2$ монотонна.*

Доказательство. Максимальное $k$-неразделённое семейство вместе с каждым принадлежащим ему множеством содержит и каждое множество, содержащее это множество. В противном случае такое множество можно было бы добавить к семейству, что противоречит условию максимальности. Поэтому соответствующая семейству булева функция монотонна. Утверждение 1 доказано.

**Утверждение 2.** *Единственными максимальными полностью неразделёнными семействами подмножеств $n$-элементного множества*

*$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ являются $n$ семейств, задаваемых булевыми функциями $f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. По определению пересечение всех подмножеств семейства непусто. Оно состоит из единственного элемента $a_i \subseteq A$, так как в противном случае семейство можно было бы расширить, добавив к нему некоторое собственное подмножество пересечения, а это противоречит условию максимальности. Поэтому семейство состоит из всех подмножеств, содержащих элемент $a_i$, а значит, оно задаётся монотонной булевой функцией $f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Утверждение 2 доказано.

## 2. Характеризация максимальных 2-неразделённых семейств

Установленное взаимно однозначное соответствие между семействами подмножеств и булевыми функциями позволяет дать характеризацию 2-неразделённых семейств на языке булевых функций и в дальнейшем при изучении таких семейств использовать известные свойства булевых функций.

**Теорема 1.** *Семейство подмножеств $n$-элементного множества будет максимальным 2-неразделённым тогда и только тогда, когда соответствующая семейству булева функция от $n$ переменных является монотонной самодвойственной.*

Доказательство. Устанавливая взаимно однозначное соответствие между максимальными 2-неразделёнными семействами подмножеств и булевыми функциями, покажем сначала, что каждому максимальному 2-неразделённому семейству $F$ соответствует монотонная самодвойственная булева функция. Монотонность уже была доказана в утверждении 1. Докажем самодвойственность. Если $A \in F$, то $\overline{A} \notin F$ ввиду 2-неразделённости семейства $F$. Если же $A \notin F$, то все лежащие внутри $A$ подмножества также не принадлежат $F$ ввиду максимальности семейства $F$. Следовательно, $\overline{A} \in F$, так как $\overline{A}$ имеет непустое пересечение с любым подмножеством, не лежащим внутри $A$. Тем самым доказано, что соответствующая семейству $F$ булева функция самодвойственна. Таким образом, соответствующая семейству $F$ функция принадлежит классу $M \cap S$ монотонных самодвойственных булевых функций.

Пусть соответствующая семейству $F$ булева функция монотонна и самодвойственна. Покажем, что семейство $F$ является максимальным 2-неразделённым. Пусть $A \in F$. В силу самодвойственности $\overline{A} \notin F$, а ввиду монотонности любое подмножество множества $\overline{A}$ также не принадлежит $F$. Следовательно, все множества семейства $F$ имеют непустые пересечения с $A$. Поскольку $A$ — это произвольное множество семейства, тем самым доказано, что $F$ является 2-неразделённым семейством. Покажем его максимальность. Пусть $A \notin F$. Тогда в силу самодвойственности $\overline{A} \in F$, и $A$ невозможно включить в $F$, так как $A$ и $\overline{A}$ не пересекаются. Теорема 1 доказана.

Любая самодвойственная функция имеет $2^{n-1}$ единичных наборов. Поэтому из теоремы 1 немедленно вытекает отмеченный в [7] результат.

**Следствие 1.** *Каждое максимальное 2-неразделённое семейство подмножеств $n$-элементного множества состоит из $2^{n-1}$ подмножеств.*

## 3. Число максимальных 2-неразделённых семейств подмножеств

Эрдёш и Клейтмен [7] получили асимптотические оценки для числа максимальных 2-неразделённых семейств подмножеств $n$-элементного множества при $n \to \infty$. Согласно [7] число таких семейств не меньше чем $2^{(C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}(1+o(1)))/2}$ и не больше чем $2^{C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}(1+o(1))}$. Намеченное в [7] доказательство этих соотношений, переведённое на язык булевых функций, выглядит следующим образом. Верхняя оценка сразу вытекает из полученной ранее Клейтменом [9] асимптотики логарифма числа монотонных булевых функций $|M| = 2^{C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}(1+o(1))}$. Нижняя же оценка получается конструктивно в результате следующих построений.

В случае чётного $n$ рассматривается класс монотонных самодвойственных функций, равных единице на всех наборах с большим чем $n/2$ числом единиц, и равных нулю на всех наборах с меньшим чем $n/2$ числом единиц. На слое $n/2$ функция определяется следующим образом. В среднем слое берётся множество $Q$ всех наборов, имеющих единицу в первом разряде, $|Q| = C_n^{n/2}/2$. Выбирается произвольное подмножество этого множества $P \subseteq Q$, и функция полагается равной единице на наборах множества $P$ и нулю — на наборах множества $Q \setminus P$. На наборах среднего слоя, имеющих нуль в первом разряде, функция определяется условием самодвойственности. Полученная таким образом функция является монотонной самодвойственной. Так как выбрать подмножество $P$ можно $2^{C_n^{n/2}/2}$ способами, данная конструкция позволяет получить $2^{C_n^{n/2}/2}$ самодвойственных булевых функций.

В случае нечётного $n = 2k + 1$ конструкция выглядит следующим образом. На всех наборах с большим чем $k + 1$ числом единиц функция полагается равной единице, а на всех наборах с меньшим чем $k$ числом единиц — нулю. В слое $k$ берётся множество $Q$ всех наборов, имеющих единицу в первом разряде,

$$|Q| = (k/(2k+1))C_n^{\lfloor n/2\rfloor} = (C_n^{\lfloor n/2\rfloor}(1+o(1)))/2.$$

Выбирается произвольное подмножество $P \subseteq Q$, и функция полагается равной единице на наборах множества $P$ и равной нулю на всех остальных наборах слоя $k$. На наборах слоя $k+1$ функция определяется условием самодвойственности. Данная конструкция позволяет получить $2^{C_n^{\lfloor n/2\rfloor}(1+o(1))/2}$ монотонных самодвойственных функций.

Таким образом, для числа семейств оставалась неизвестной даже асимптотика логарифма, хотя в [7] авторами было предположено, что их нижняя оценка правильно отражает асимптотику логарифма числа максимальных 2-неразделённых семейств. Однако в [6] найдена асимптотика для числа монотонных самодвойственных функций. Полученная там асимптотика в силу теоремы 1 является асимптотикой для числа максимальных 2-неразделённых семейств подмножеств.

**Следствие 2.** *Число максимальных 2-неразделённых семейств подмножеств $n$-элементного множества при нечётных $n \to \infty$ асимптотически равно*

$$2^{C_{n-1}^{(n+1)/2}} \exp\{\nu_1 + \nu_2 - \gamma\},$$

*где*

$$\nu_1 = C_{n-1}^{(n+3)/2}(2^{-(n+3)/2} + (n^2-2n)2^{-n-6}),$$
$$\nu_2 = C_{n-1}^{(n-1)/2}(2^{-(n-1)/2} + (n^2-2n)2^{-n-2}),$$
$$\gamma = 2^{-n-1}C_{n-1}^{(n-1)/2}C_{(n-1)/2}^2,$$

*а при чётных $n \to \infty$ асимптотически равно*

$$2^{C_{n-1}^{n/2}} \exp\{\nu_1' + \nu_2' - \gamma'\},$$

*где*

$$\nu_1' = C_{n-1}^{(n+2)/2}(2^{-(n+2)/2} + (n^2-2n)2^{-n-5}),$$
$$\nu_2' = C_{n-1}^{(n-2)/2}(2^{-(n+2)/2} + (n^2-2n)2^{-n-5}),$$
$$\gamma' = 2^{-n-2}C_{n-1}^{(n+2)/2}C_{n/2+1}^2.$$

Из соотношений следствия 2 видно, что, как и предполагали Эрдёш и Клейтмен, число максимальных 2-неразделённых семейств подмножеств $n$-элементного множества при $n \to \infty$ асимптотически равно $2^{C_n^{\lfloor n/2\rfloor}(1+o(1))/2}$.

## 4. Свойства максимальных $k$-неразделённых семейств при $k \geqslant 3$

Максимальные $k$-неразделённые семейства при $k \geqslant 3$, по-видимому, уже не допускают простой характеризации на языке булевых функций. Соответствующие таким семействам булевы функции монотонны, но не обязаны быть самодвойственными. А именно, имеет место

**Теорема 2.** *При $k \geqslant 3$ максимальное $k$-неразделённое семейство подмножеств $n$-элементного множества, булева функция которого самодвойственна, является полностью неразделённым, т. е. одним из семейств, задаваемых булевыми функциями $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Доказательство. Если бы наименьшее по мощности подмножество из 3-неразделённого семейства имело более одного элемента, то его дополнение содержало бы не более $n-2$ элементов и было бы наибольшим по мощности подмножеством, не принадлежащим семейству. Тогда нашлись бы два различных принадлежащих семейству подмножества, получаемые из этого дополнения присоединением двух различных элементов. При этом пересечение трёх подмножеств — исходного наименьшего и этих двух — было бы пусто. Поэтому наименьшее подмножество семейства обязано иметь единичную мощность, т. е. семейство задаётся одной из булевых функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Теорема 2 доказана.

Следующая теорема говорит о том, что у булевой функции максимального точного $k$-неразделённого семейства в слоях ниже $k$-го не может быть нижних единиц.

**Теорема 3.** *Если в $k$-неразделённом семействе имеется подмножество мощности менее $k$, то семейство является полностью неразделённым.*

Доказательство. Пусть в $k$-неразделённом семействе имеется подмножество $A_0$ такое, что $|A_0| < k$. Покажем, что пересечение любых $k+1$ подмножеств, среди которых имеется $A_0$, непусто. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — произвольные подмножества семейства, отличные от $A_0$. Введём следующие обозначения:

$$A_{i0} = A_i \cap A_0, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$A_0^j = \bigcap_{i \neq j} A_{i0}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

В силу $k$-неразделённости каждое из множеств $A_0^j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, непусто. Так как $\bigcup\limits_{j=1}^{k} A_0^j \subseteq A_0$, найдутся два множества $A_0^{j_1}$ и $A_0^{j_2}$, пересечение которых непусто. Следовательно,

$$A_0^{j_1} \cap A_0^{j_2} = \bigcap_{i=0}^{k} A_i \neq \varnothing.$$

Аналогично можно показать, что пересечение любых $k+2$ подмножеств, среди которых имеется $A_0$, непусто, и т. д., доказав, в конце концов, что пересечение всех подмножеств семейства непусто. Теорема 3 доказана.

**Следствие 3.** *Точное $k$-неразделённое семейство, мощность которого больше $k$, не может содержать подмножеств мощности меньшей $k$.*

**Следствие 4.** *Максимальное $k$-неразделённое семейство подмножеств $n$-элементного множества при $k \geqslant n$ является полностью неразделённым, т. е. задаётся одной из булевых функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Следующая теорема даёт конструктивный метод построения максимальных точных $k$-неразделённых семейств подмножеств.

**Теорема 4.** *Пусть $|A| = n$, $B \subseteq A$, $|B| = m$, $k \geqslant 2$ и $l$ — натуральные числа такие, что $m = kl + 1$. Тогда монотонная булева функция с $C_m^l$ нижними единицами, соответствующими $(m-l)$-элементным подмножествам множества $B$, задаёт максимальное точное $k$-неразделённое семейство подмножеств множества $A$.*

Доказательство. Легко проверяется, что пересечение любых $k$ подмножеств семейства непусто и найдутся $k+1$ подмножеств мощности $m-l$, пересечение которых пусто, т. е. семейство будет точным $k$-неразделённым. Также для любого $C \subseteq A$ такого, что $|C \cap B| < m-l$, существуют $k$ $(m-l)$-элементных подмножеств множества $B$, которые в пересечении с $C$ дают пустое множество, т. е. семейство является максимальным точным $k$-неразделённым. Теорема 4 доказана.

Доказанная теорема позволяет, в частности, показать, что при $k > 2$ максимальные точные $k$-неразделённые семейства могут иметь различную мощность. Пусть, например, основное множество равно $A = \{a_1, \ldots, a_7\}$. Выбрав $B = \{a_1, \ldots, a_4\}$, $k = 3$, $l = 1$, в соответствии с теоремой получим максимальное точное 3-неразделённое семейство, задаваемое булевой функцией

$$f(x_1, \ldots, x_7) = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_3x_4 \vee x_2x_3x_4,$$

которое, как нетрудно подсчитать, состоит из 40 подмножеств (единичных вершин функции $f$).

Однако взяв $B = A$, $k = 3$, $l = 2$, получим максимальное 3-неразделённое семейство, состоящее из всех подмножеств мощности не менее 5 и содержащее 29 подмножеств.

Доказанная теорема позволяет также оценить число максимальных точных $k$-неразделённых семейств снизу. Легко видеть, что при фиксированном $k$ и $n \to \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\sum_{m \equiv 1 \pmod{k}} C_n^m \sim \frac{2^n}{k}, \quad n \to \infty.$$

Поэтому из теоремы 4 вытекает

**Следствие 5.** *Число максимальных точных $k$-неразделённых семейств подмножеств $n$-элементного множества для произвольного фиксированного $k \geqslant 2$ и $n \to \infty$ асимптотически не меньше $2^n/k$.*

Вопрос о близости данной оценки к асимптотике числа максимальных точных $k$-неразделённых семейств остаётся открытым.

Автор признателен А. А. Сапоженко за ценные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Зуев Ю. А.** Современная дискретная математика: От перечислительной комбинаторики до криптографии XXI века. М.: Либроком, 2018.
2. **Коршунов А. Д.** Число $k$-неразделённых семейств подмножеств $n$-элементного множества ($k$-неразделённых булевых функций). Ч. 1. Случай чётных $n$ и $k = 2$ // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 4. С. 31–69.
3. **Коршунов А. Д.** Число $k$-неразделённых семейств подмножеств $n$-элементного множества ($k$-неразделённых булевых функций). Ч. 2. Случай нечётных $n$ и $k = 2$ // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, № 1. С. 12–70.
4. **Коршунов А. Д.** Число $k$-неразделённых семейств подмножеств $n$-элементного множества ($k$-неразделённых булевых функций). Ч. 3. Случай $k > 2$ и произвольных $n$ // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, № 3. С. 60–73.
5. **Нигматуллин Р. Г.** Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.
6. **Сапоженко А. А.** О числе антицепей в многослойных ранжированных множествах // Дискрет. математика 1989. Т. 1, вып. 2. С. 110–128.
7. **Erdös P., Kleitman D. J.** Extremal problems among subsets of a set // Discrete Math. 1974. Vol. 8. P. 281–294.

8. **Erdös P., Ko C., Rado R.** Intersection theorems for systems of finite sets // Q. J. Math. 1961. Vol. 12. P. 313–320.
9. **Kleitman D. J.** On Dedekind's problem: The number of monotone Boolean functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 21, No. 3. P. 677–682.

*Зуев Юрий Анатольевич*

Статья поступила
11 декабря 2017 г.

Исправленный вариант —
16 марта 2018 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2018. Volume 25, No. 4. P. 15–26

UDC 519.71 DOI: 10.17377/daio.2018.25.602

# MAXIMAL $k$-INTERSECTING FAMILIES OF SUBSETS AND BOOLEAN FUNCTIONS

*Yu. A. Zuev*
Bauman Moscow State Technical University,
5 Vtoraya Baumanskaya St., 105005 Moscow, Russia
*E-mail*: 79851965730@yandex.ru

**Abstract.** A family of subsets of an $n$-element set is *$k$-intersecting* if the intersection of every $k$ subsets in the family is nonempty. A family is *maximal $k$-intersecting* if no subset can be added to the family without violating the $k$-intersection property. There is a one-to-one correspondence between the families of subsets and Boolean functions defined as follows: To each family of subsets, assign the Boolean function whose unit tuples are the characteristic vectors of the subsets. We show that a family of subsets is maximal 2-intersecting if and only if the corresponding Boolean function is monotone and selfdual. Asymptotics for the number of such families is obtained. Some properties of Boolean functions corresponding to $k$-intersecting families are established for $k > 2$. Bibliogr. 9.

**Keywords:** $k$-intersecting family of subsets, monotone selfdual Boolean function, layer of Boolean cube.

## REFERENCES

1. **Yu. A. Zuev,** *Modern Discrete Mathematics: From Enumerative Combinatorics to Cryptography of the XXI Century,* Librokom, Moscow, 2018 [Russian].
2. **A. D. Korshunov,** The number of $k$-nonseparated families of subsets of an $n$-element set ($k$-nonseparated Boolean functions). I. The case of even $n$ and $k = 2$, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **10**, No. 4, 31–69, 2003 [Russian].
3. **A. D. Korshunov,** The number of $k$-nonseparated families of subsets of an $n$-element set ($k$-nonseparated Boolean functions of $n$ variables). II. The case of odd $n$ and $k = 2$, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **12**, No. 1, 12–70, 2005 [Russian].
4. **A. D. Korshunov,** The number of $k$-nonseparated families of subsets of an $n$-element set ($k$-nonseparated Boolean functions of $n$-variables). III. The case of $k \geqslant 3$ and arbitrary $n$, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **12**, No. 3, 60–70, 2005 [Russian].

5. **R. G. Nigmatullin,** *The Complexity of Boolean Functions,* Nauka, Moscow, 1991 [Russian].
6. **A. A. Sapozhenko,** On the number of antichains in multilevelled ranked posets, *Diskretn. Mat.*, **1**, No. 2, 110–128, 1989 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **1**, No. 2, 149–169, 1991.
7. **P. Erdös** and **D. J. Kleitman,** Extremal problems among subsets of a set, *Discrete Math.,* **8**, 281–294, 1974.
8. **P. Erdös, C. Ko,** and **R. Rado,** Intersection theorems for systems of finite sets, *Q. J. Math., Oxf. II. Ser.,* **12**, 313–320, 1961.
9. **D. J. Kleitman,** On Dedekind's problem: The number of monotone Boolean functions, *Proc. Am. Math. Soc.,* **21**, No. 3, 677–682, 1969.


*Yury A. Zuev*

Received
11 December 2017
Revised
16 March 2018