ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2018. Том 25, № 4. С. 81–96

УДК 519.174 DOI: 10.17377/daio.2018.25.604

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ГРАФ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ДОМИНИРУЮЩИМИ ВЕРШИНАМИ *)

А. С. Парфиненко[1,a], *А. Л. Пережогин*[1,2,b]

[1]Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1, 630090 Новосибирск, Россия,

[2]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: [a]anastasia.s.parfinenko@gmail.com, [b]pereal@math.nsc.ru

Аннотация. Описано изменение функционального графа линейной дискретной динамической системы при преобразовании её графа-носителя, а именно при добавлении к нему двух доминирующих вершин. Библиогр. 12.

Ключевые слова: дискретная динамическая система, линейная дискретная динамическая система, функциональный граф, диаграмма состояний, граф-носитель, линейная последовательная сеть.

Введение

Дискретной динамической системой (кратко *ДДС*) называется упорядоченная пара (X, f), состоящая из конечного множества X и определяющей функции $f\colon X \to X$.

Функциональным графом (или *диаграммой состояний*) дискретной динамической системы называется ориентированный граф G_f, вершины которого являются элементами множества X, а множество рёбер состоит из всех упорядоченных пар (x, y) таких, что $f(x) = y$.

Элемент $x \in X$ является *циклической вершиной*, если $f^l(x) = x$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, т. е. в G_f существует путь из x в себя. Наименьшее такое l будем называть *периодом* x, а циклическую вершину, имеющую период 1, — *неподвижной точкой*.

Известно [10], что каждая компонента связности функционального графа дискретной динамической системы состоит из единственного цикла

*) Исследование выполнено при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.5.1 (проект № 0314–2016–0017).

(возможно, петли) и присоединённых к нему деревьев, все дуги которых ориентированы к циклической вершине.

В [1,2,5,7] рассмотрены дискретные динамические системы с пороговыми функциями. Особое внимание уделялось полному описанию неподвижных точек таких систем, изучению циклов функционального графа и их длин, нахождению всех висячих вершин притягиваемых деревьев.

Дискретная динамическая система (X, f) называется *линейной* (кратко *ЛДДС*), если X является конечномерным векторным пространством над конечным полем $\mathbb{F}$, а $f\colon X \to X$ — линейным отображением.

Доказано [3, 4, 11], что в этом случае все деревья в функциональном графе G_f, которые присоединены к каждой циклической вершине, изоморфны друг другу. Тем самым каждая компонента связности функционального графа представляет собой цикл некоторой длины k, каждая вершина которого притягивает дерево, изоморфное некоторому дереву T. Такую компоненту связности будем называть (k, T)-*циклическим деревом.*

В [4,9] описано построение циклической структуры функционального графа G_f в случае, когда f является невырожденным линейным отображением.

Линейные дискретные динамические системы также рассматривались в [6, 8, 12]. В этих работах подробно описана структура деревьев функциональных графов и их высота и получены оценки наибольшей длины цикла функционального графа.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать линейные дискретные динамические системы вида $\left(\mathbb{Z}_2^n, A\right)$, где $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ — поле вычетов по модулю 2 и $A\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n$ — матрица некоторого линейного оператора в стандартном базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathbb{Z}_2^n$.

Ранее было показано [4, 9, 11] как функциональный граф линейной дискретной динамической системы с определяющей матрицей $\widetilde{A}$, которая имеет блочно-диагональный вид $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, однозначно строится по функциональным графам линейных дискретных динамических систем с определяющими матрицами A и B при условии взаимной простоты характеристических многочленов $\chi_A(\lambda)$ и $\chi_B(\lambda)$.

В данной статье рассматривается схожая задача, где в матрице $\widetilde{A}$ вместо нулевых матриц O стоят матрицы из единиц, а матрица B имеет вид $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Для удобства вектор, состоящий из единиц, будем обозначать через $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{Z}_2^n$, а вектор из нулей — через $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{Z}_2^n$. Для обозначения вектора $(x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2)^T \in \mathbb{Z}_2^{n+2}$ будем использовать запись $(x, y_1, y_2)^T$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{Z}_2^n$.

Таким образом, исследуется структура функционального графа линейной дискретной динамической системы $\left(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{A}\right)$, где матрица $\widetilde{A}$ задаёт линейный оператор в стандартном базисе $(e_1, 0, 0)^T, \ldots, (e_n, 0, 0)^T$, $(\mathbf{0}, 1, 0)^T$, $(\mathbf{0}, 0, 1)^T$ пространства $\mathbb{Z}_2^{n+2}$ и имеет вид

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} & & & 1 & 1 \\ & A & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу A можно рассматривать как матрицу смежности некоторого ориентированного графа с множеством вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$, причём из i идёт дуга в j тогда и только тогда, когда $a_{ji} = 1$. Такой ориентированный граф полностью задаёт динамику ЛДДС $\left(\mathbb{Z}_n^2, A\right)$ и называется *графом-носителем* ЛДДС.

Аналогично можно определить граф-носитель для любой ДДС. Во многих практических задачах (описание динамических процессов в генных сетях, прогнозирование коллективного поведения) сначала задаётся граф связей (влияний) некоторых структур, а на его основе — ДДС, для которой этот граф является графом-носителем. Исследуются вопросы влияния структуры графа-носителя на функционирование ДДС, а также устойчивость ДДС при изменениях её графа-носителя. В [1,2] изучалось функционирование ДДС, у которых матрица смежности графа-носителя является циркулянтом, а в [7] исследовалось изменение функционирования ДДС при объединении двух циркулянтов.

Доминирующей вершиной в ориентированном графе (V, E) будем называть вершину $v \in V$ такую, что $(v, x), (x, v) \in E$ для любого $x \in V$, $x \neq v$.

В данной статье исследуется изменение функционирования ЛДДС при добавлении в граф-носитель двух доминирующих вершин. Это позволяет редуцировать задачу описания функционирования произвольной ЛДДС к функционированию ЛДДС с не более чем одной доминирующей вершиной.

Альтернативным способом интерпретации матрицы A являются автономные двоичные линейные последовательные сети, в которых матрица A выступает в качестве характеристической матрицы сети. Этот способ представлен в [4, 9].

2. Структура деревьев

Весом ω_x *вектора* $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{Z}_2^n$ будем называть сумму его координат $\omega_x = x_1 + \dots + x_n$. (k,T)-Циклическое дерево называется (k,w,T)-*циклическим деревом*, если сумма весов всех его циклических вершин равна w.

Утверждение 1. *Две последние координаты вектора $\widetilde{x} \in \mathbb{Z}_{n+2}^2$ равны тогда и только тогда, когда равны две последние координаты вектора $\widetilde{A}\widetilde{x}$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{x} = (x, a, b)^T$, тогда

$$\widetilde{A}\widetilde{x} = \begin{pmatrix} & & & 1 & 1 \\ & A & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Ax + a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{1} \\ x_1 + \dots + x_n + b \\ x_1 + \dots + x_n + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + (a+b) \cdot \mathbf{1} \\ \omega_x + b \\ \omega_x + a \end{pmatrix}$$

и $\omega_x + b = \omega_x + a$ в том и только том случае, когда $a = b$. Утверждение 1 доказано.

Следствие 1. *У вектора $\widetilde{x} \in \widetilde{T}$, где $\widetilde{T}$ — дерево, притягиваемое вершиной $(\mathbf{0}, 0, 0)^T \in \mathbb{Z}_2^{n+2}$ в функциональном графе системы $\big(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{A}\big)$, две последние координаты равны.*

Доказательство. Действительно, если $\widetilde{x} \in \widetilde{T}$, то существует такое $s \in \mathbb{N}$, что $\widetilde{A}^s\widetilde{x} = (\mathbf{0}, 0, 0)^T$, значит, по утверждению 1 и у $\widetilde{x}$ две последние координаты равны. Следствие 1 доказано.

Утверждение 2. *Для любого вектора $(x, a, a)^T \in \mathbb{Z}_{n+2}^2$ и любого $k \in \mathbb{N}_0$ верно равенство $\widetilde{A}^k(x,a,a)^T = (A^k x, \Omega(k,x) + a, \Omega(k,x) + a)^T$, где*

$$\Omega(k,x) = \begin{cases} \omega_{A^{k-1}x} + \dots + \omega_{Ax} + \omega_x, & k \neq 0, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Доказательство.

$$\widetilde{A}\begin{pmatrix}x\\a\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & & 1 & 1\\ & A & & \vdots & \vdots\\ & & & 1 & 1\\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1\\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\a\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ax+a\cdot\mathbf{1}+a\cdot\mathbf{1}\\x_1+\dots+x_n+a\\x_1+\dots+x_n+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ax\\\omega_x+a\\\omega_x+a\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}^2\begin{pmatrix}x\\a\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & & 1 & 1\\ & A & & \vdots & \vdots\\ & & & 1 & 1\\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1\\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Ax\\\omega_x+a\\\omega_x+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^2x\\\omega_{Ax}+\omega_x+a\\\omega_{Ax}+\omega_x+a\end{pmatrix},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\widetilde{A}^k\begin{pmatrix}x\\a\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & & 1 & 1\\ & A & & \vdots & \vdots\\ & & & 1 & 1\\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1\\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{k-1}x\\\omega_{A^{k-2}x}+\dots+\omega_x+a\\\omega_{A^{k-2}x}+\dots+\omega_x+a\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A^kx\\\omega_{A^{k-1}x}+\omega_{A^{k-2}x}+\dots+\omega_x+a\\\omega_{A^{k-1}x}+\omega_{A^{k-2}x}+\dots+\omega_x+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^kx\\\Omega(k,x)+a\\\Omega(k,x)+a\end{pmatrix}.$$

Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Дерево $\widetilde{T}$, притягиваемое вершиной $(\mathbf{0},0,0)^T\in\mathbb{Z}_2^{n+2}$ в функциональном графе линейной дискретной динамической системы $\big(\mathbb{Z}_2^{n+2},\widetilde{A}\big)$, изоморфно дереву T, притягиваемому вершиной $\mathbf{0}\in\mathbb{Z}_2^n$ в функциональном графе линейной дискретной динамической системы $\big(\mathbb{Z}_2^n,A\big)$.*

Доказательство. Пусть T имеет высоту m и $V(T)=L_0\cup L_1\cup\dots\cup L_m$, где L_i — это множество вершин i-го уровня дерева T, $i=\overline{0,m}$, а $\widetilde{T}$ имеет высоту s и $V(\widetilde{T})=\widetilde{L}_0\cup\widetilde{L}_1\cup\dots\cup\widetilde{L}_s$, где $\widetilde{L}_j$ — это множество вершин j-го уровня дерева $\widetilde{T}$, $j=\overline{0,s}$.

Пусть $x\in L_k$, тогда $(x,\Omega(k,x),\Omega(k,x))^T\in\widetilde{L}_k$. Действительно, так как

$$\widetilde{A}^k\begin{pmatrix}x\\\Omega(k,x)\\\Omega(k,x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^kx\\\Omega(k,x)+\Omega(k,x)\\\Omega(k,x)+\Omega(k,x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^kx\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\0\\0\end{pmatrix}$$

и $A^i x \neq \mathbf{0}$ для любого $i < k$, то по определению $\widetilde{L}_k$ следует, что $(x, \Omega(k,x), \Omega(k,x))^T \in \widetilde{L}_k$.

Рассмотрим вектор $(x, a, a)^T \in \widetilde{L}_k$ (две последние координаты равны по следствию 1). По определению $\widetilde{L}_k$ имеем

$$\widetilde{A}^k \begin{pmatrix} x \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^k x \\ \Omega(k,x) + a \\ \Omega(k,x) + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} A^k x = \mathbf{0}, \\ a = \Omega(k,x). \end{cases}$$

Тем самым $x \in L_k$, так как если $x \in L_i$, где $i < k$, то $\Omega(k,x) = \Omega(k-i,x)$ и по доказанному выше вектор $(x,a,a)^T$ принадлежит множеству $\widetilde{L}_i$, чего быть не может.

Таким образом получаем, что $s = m$ и между множествами L_k и $\widetilde{L}_k$, $k = \overline{0,m}$, существует взаимно однозначное отображение $\varphi_k \colon L_k \to \widetilde{L}_k$, $\varphi_k(x) = (x, \Omega(k,x), \Omega(k,x))^T$, $x \in L_k$.

Рассмотрим отображение $\varphi \colon V(T) \to V(\widetilde{T})$ такое, что $\varphi(x) = \varphi_k(x)$, если $x \in L_k$. Оно также взаимно однозначно. Покажем, что в дереве T существует дуга из x в y тогда и только тогда, когда в дереве $\widetilde{T}$ есть дуга из $\varphi(x)$ в $\varphi(y)$, т. е. $Ax = y$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{A}\varphi(x) = \varphi(y)$.

Пусть $Ax = y$ и $x \in L_k$, тогда $\widetilde{A}\varphi(x) = (Ax, \Omega(k,x) + \omega_x, \Omega(k,x) + \omega_x)^T$ и $y \in L_{k-1}$. Преобразуя последние координаты вектора $\widetilde{A}\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \Omega(k,x) + \omega_x &= \omega_{A^{k-1}x} + \cdots + \omega_{Ax} + \omega_x + \omega_x \\ &= \omega_{A^{k-1}x} + \cdots + \omega_{Ax} = \omega_{A^{k-2}y} + \cdots + \omega_y = \Omega(k-1,y), \end{aligned}$$

получаем $\widetilde{A}\varphi(x) = (y, \Omega(k-1,y), \Omega(k-1,y))^T = \varphi(y)$. В обратную сторону доказывается аналогично.

Тем самым φ является изоморфизмом деревьев T и $\widetilde{T}$. Утверждение 3 доказано.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Все деревья, притягиваемые циклическими вершинами функционального графа линейной дискретной динамической системы* $\big(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{A}\big)$, *изоморфны деревьям, притягиваемым циклическими вершинами функционального графа линейной дискретной динамической системы* $\big(\mathbb{Z}_2^n, A\big)$.

3. Структура циклов

Матрица E — это единичная матрица размера $n \times n$, а через $\widetilde{E}$ будем обозначать единичную матрицу размера $(n+2)\times(n+2)$. Многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A+\lambda E)$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A.

Утверждение 4. $\chi_{\widetilde{A}}(\lambda) = (\lambda+1)^2\chi_A(\lambda)$.

Доказательство. Имеем

$$\chi_{\widetilde{A}}(\lambda) = \det(\widetilde{A}+\lambda\widetilde{E}) = \begin{vmatrix} & & & 1 & 1 \\ & A+\lambda E & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} & & & 1 & 1 \\ & A+\lambda E & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & 0 & 1 \\ & A+\lambda E & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^2\det(A+\lambda E) = (\lambda+1)^2\chi_A(\lambda).$$

Утверждение 4 доказано.

Следствие 2. *$\lambda = 1$ является собственным значением матрицы $\widetilde{A}$.*

Множество $V_A(\lambda) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \ker(A+\lambda E)^k$ называется *корневым пространством* матрицы A, соответствующим собственному значению λ.

Следствие 3. $\dim V_{\widetilde{A}}(1) = \dim V_A(1) + 2$.

Утверждение 5. *Вектор $\widetilde{v} = (\mathbf{0},1,1)^T \in \mathbb{Z}_2^{n+2}$ является собственным вектором матрицы $\widetilde{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda = 1$.*

Доказательство. Имеем

$$(\widetilde{A}+\widetilde{E})\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 1 & 1 \\ & A+E & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Утверждение 5 доказано.

Утверждение 6. *Существует корневой вектор матрицы $\widetilde{A}$, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$, вида $(x, 1, 0)^T \in \mathbb{Z}_2^{n+2}$.*

Доказательство. Допустим, что это не так и все корневые векторы, соответствующие $\lambda = 1$ и отличные от $\widetilde{v}$ и $(\mathbf{0}, 0, 0)^T$, имеют вид $(x, 0, 1)^T$ или $(x, a, a)^T$, где $x \in \mathbb{Z}_2^n$, $a \in \mathbb{Z}$.

Однако если вектор $(x, 0, 1)^T$ корневой, то вектор

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

также является корневым как сумма двух корневых векторов.

Если же $(x, a, a)^T$ — корневой вектор, то существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $(\widetilde{A} + \widetilde{E})^k (x, a, a)^T = (\mathbf{0}, 0, 0)^T$, т. е.

$$\begin{pmatrix} & & & 1 & 1 \\ & A+E & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & & 1 & 1 \\ & A+E & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} (A+E)x \\ \omega_x \\ \omega_x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & & 1 & 1 \\ & A+E & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{k-2} \begin{pmatrix} (A+E)^2 x \\ \omega_{(A+E)x} \\ \omega_{(A+E)x} \end{pmatrix} = \dots$$

$$= \begin{pmatrix} (A+E)^k x \\ \omega_{(A+E)^{k-1}x} \\ \omega_{(A+E)^{k-1}x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $(A+E)^k x = \mathbf{0}$ и $x \in V_A(1)$. Таким образом получаем, что каждому корневому вектору $(x, a, a)^T \in V_{\widetilde{A}}(1)$ соответствует корневой вектор $x \in V_A(1)$, т. е. $\dim V_A(1) + 1 \geqslant \dim V_{\widetilde{A}}(1)$, что противоречит следствию 3. Утверждение 6 доказано.

Утверждение 7. *Вектор $(z,1,0)^T$ является собственным вектором матрицы $\widetilde{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda = 1$, тогда и только тогда, когда $\omega_z = 1$ и z является решением системы линейных уравнений $(A+E)x = \mathbf{1}$.*

Доказательство. Пусть $(z,1,0)^T$ является собственным вектором для матрицы $\widetilde{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda = 1$, т. е.

$$(\widetilde{A}+\widetilde{E})\begin{pmatrix} z\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 1 & 1\\ & A+E & & \vdots & \vdots\\ & & & 1 & 1\\ 1 & \ldots & 1 & 1 & 1\\ 1 & \ldots & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A+E)z+\mathbf{1}\\ \omega_z+1\\ \omega_z+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Это равенство верно тогда и только тогда, когда $\omega_z = 1$ и $(A+E)z = \mathbf{1}$. Утверждение 7 доказано.

Утверждение 8. *Вектор $(z,1,0)^T$ является присоединённым вектором матрицы $\widetilde{A}$ к собственному вектору $(\mathbf{0},1,1)^T$, отвечающему собственному значению $\lambda = 1$, тогда и только тогда, когда $\omega_z = 0$ и z является решением системы линейных уравнений $(A+E)x = \mathbf{1}$.*

Доказательство. Пусть вектор $(z,1,0)^T$ присоединённый к вектору $(\mathbf{0},1,1)^T$, т. е.

$$(\widetilde{A}+\widetilde{E})\begin{pmatrix} z\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A+E)z+\mathbf{1}\\ \omega_z+1\\ \omega_z+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Это равенство верно тогда и только тогда, когда $\omega_z = 0$ и $(A+E)z = \mathbf{1}$. Утверждение 8 доказано.

Следствие 4. *Если система уравнений $(A+E)x = \mathbf{1}$ имеет некоторое решение $z \in \mathbb{Z}_2^n$, то в базисе $(e_1,0,0)^T,\ldots,(e_n,0,0)^T,(\mathbf{0},1,1)^T,(z,1,0)^T$ матрица оператора $\widetilde{A}$ принимает вид*

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0\\ & A & & \vdots & \vdots\\ & & & 0 & 0\\ 1 & \ldots & 1 & 1 & \overline{\omega}_z\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица перехода от стандартного базиса пространства $\mathbb{Z}_2^{n+2}$ к базису $(e_1, 0, 0)^T, \ldots, (e_n, 0, 0)^T, (\mathbf{0}, 1, 1)^T, (z, 1, 0)^T$ примет вид

$$S = \begin{pmatrix} & & & 0 & \\ & E & & \vdots & z \\ & & & 0 & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Структура циклов функционального графа ЛДДС $\left(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{A}\right)$ описывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть задана линейная дискретная динамическая система $\left(\mathbb{Z}_2^n, A\right)$ и система уравнений $(A+E)x = \mathbf{1}$ имеет некоторое решение $z \in \mathbb{Z}_2^n$. Тогда каждой компоненте связности функционального графа системы $\left(\mathbb{Z}_2^n, A\right)$, являющейся (k, w, T)-циклическим деревом, однозначно соответствуют следующие компоненты связности функционального графа дискретной динамической системы $\left(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{A}\right)$:*

- *при $\omega_z = 0$ и нечётном k два $(k, 0, T)$-циклических дерева и одно $(2k, 0, T)$-циклическое дерево,*
- *иначе при $w = 0$ четыре $(k, 0, T)$-циклических дерева, при $w = 1$ два $(2k, 0, T)$-циклических дерева.*

Других компонент связности в функциональном графе системы $\left(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{A}\right)$ нет.

Доказательство. Так как $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ — матрицы одного и того же линейного оператора, функциональные графы линейных дискретных динамических систем $\left(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{A}\right)$ и $\left(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{B}\right)$ изоморфны, а матрица перехода S задаёт изоморфизм этих графов.

Пусть (k, ω, T)-циклическое дерево — компонента связности функционального графа $\left(\mathbb{Z}_2^n, A\right)$, а $(x, Ax, \ldots, A^{k-1}x)$ — цикл этой компоненты связности. Рассмотрим вектор $(x, y_1, y_2)^T$, где $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}_2$, и действие на него операторов $\widetilde{B}^k$ и $\widetilde{B}^{2k}$:

$$\widetilde{B}^k \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & A & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & \overline{\omega}_z \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & A & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \overline{\omega}_z \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} Ax \\ \omega_x + y_1 + \overline{\omega}_z y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \dots = \begin{pmatrix} A^k x \\ \omega_{A^{k-1}x} + \dots + \omega_x + y_1 + \overline{\omega}_z k y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \omega + y_1 + \overline{\omega}_z k y_2 \\ y_2 \end{pmatrix},
$$

$$
\widetilde{B}^{2k} \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \widetilde{B}^k \begin{pmatrix} x \\ \omega + y_1 + \overline{\omega}_z k y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} A^k x \\ \omega + \omega + y_1 + \overline{\omega}_z k y_2 + \overline{\omega}_z k y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.
$$

Отсюда следует, что $(x, y_1, y_2)^T$ — циклическая вершина в функциональном графе системы $\big(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{B}\big)$, причём если её период равен l, то $l \leqslant 2k$, при этом также выполняется равенство $A^l x = x$, т. е. l нацело делится на k. Значит, $l = k$ или $l = 2k$.

Заметим, что последняя координата вектора не меняется под действием оператора $\widetilde{B}$, поэтому рассмотрим предпоследнюю координату $\omega + \overline{\omega}_z k y_2 + y_1$.

Если $\omega_z = 0$ и k нечётное, то

$$
\omega + \overline{\omega}_z k y_2 + y_1 = y_1 \Leftrightarrow \omega + y_2 + y_1 = y_1 \Leftrightarrow \omega + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = \omega.
$$

Получаем, что если $y_2 = \omega$, то $l = k$ для любого $y_1 \in \mathbb{Z}_2$. Тем самым в функциональном графе системы $\big(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{B}\big)$ есть два цикла длины k, один из которых содержит вектор $(x, 1, \omega)^T$, а другой — $(x, 0, \omega)^T$. Если же $y_2 = \overline{\omega}$, то $l = 2k$ и оба вектора $(x, 1, \overline{\omega})^T$ и $(x, 0, \overline{\omega})^T$ лежат в одном цикле длины $2k$ функционального графа системы $\big(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{B}\big)$, так как $\widetilde{B}^{2k}(x, 0, \overline{\omega})^T = \widetilde{B}^k(x, 1, \overline{\omega})^T = (x, 0, \overline{\omega})^T$.

Если же $\omega_z = 1$ или k чётное, то

$$
\omega + \overline{\omega}_z k y_2 + y_1 = y_1 \Leftrightarrow \omega + y_1 = y_1 \Leftrightarrow \omega = 0.
$$

Стало быть, при $\omega = 0$ имеем $l = k$ для любых $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}_2$. И в этом случае в функциональном графе системы $\big(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{B}\big)$ есть четыре цикла длины k, каждый из которых содержит ровно один из векторов $(x, 0, 0)^T$, $(x, 0, 1)^T$, $(x, 1, 0)^T$, $(x, 1, 1)^T$ соответственно. Если же $\omega = 1$, то $l = 2k$

и в функциональном графе системы $\big(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{B}\big)$ существует два цикла длины $2k$, один из которых содержит векторы $(x, 0, 0)^T, (x, 1, 0)^T$, а другой — $(x, 0, 1)^T, (x, 1, 1)^T$, так как $\widetilde{B}^{2k}(x, 0, y_2)^T = \widetilde{B}^k(x, 1, y_2)^T = (x, 0, y_2)^T$ для любого $y_2 \in \mathbb{Z}_2$.

Таким образом, если $x \in \mathbb{Z}_2^n$ — циклическая вершина функционального графа ЛДДС $\big(\mathbb{Z}_2^n, A\big)$, то $(x, y_1, y_2)^T \in \mathbb{Z}_2^{n+2}$ также является циклической вершиной для любых $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}_2$ функционального графа ЛДДС $\big(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{B}\big)$. Покажем, что это утверждение верно и в обратную сторону.

Пусть $|V_C(A)|$ — число циклических вершин функционального графа системы $\big(\mathbb{Z}_2^n, A\big)$. Тогда для числа циклических вершин функционального графа системы $\big(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{B}\big)$ выполняется неравенство $|V_C(\widetilde{B})| \geqslant 4|V_C(A)|$.

По следствию 1 все циклические вершины функциональных графов систем $\big(\mathbb{Z}_2^n, A\big)$ и $\big(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{B}\big)$ притягивают деревья, изоморфные некоторому дереву T. Тогда неравенство

$$2^{n+2} = |V_C(\widetilde{B})| \cdot |T| \geqslant 4|V_C(A)||T| = 4 \cdot 2^n = 2^{n+2}$$

выполняется только при $|V_C(\widetilde{B})| = 4|V_C(A)|$.

Перейдём к функциональному графу линейной дискретной динамической системы $\big(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{A}\big)$ и покажем, что сумма всех циклических вершин равна нулю для каждой компоненты связности этого графа. Пусть $(x, y_1, y_2)^T$ — координаты вектора из $\mathbb{Z}_2^{n+2}$ в базисе $(e_1, 0, 0)^T, \ldots, (e_n, 0, 0)^T$, $(\mathbf{0}, 1, 1)^T$, $(z, 1, 0)^T$. Тогда в стандартном базисе этот вектор имеет координаты

$$S\begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 0 & \\ & E & & \vdots & z \\ & & & 0 & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y_2 z \\ y_1 + y_2 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

а его вес равен $\omega_x + y_2\omega_z + y_1 + y_2 + y_1 = \omega_x + y_2\,\overline{\omega}_z$.

Так как циклические вершины одной и той же компоненты связности функционального графа системы $\big(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{B}\big)$, построенной по (k, w, T)-циклическому дереву функционального графа системы $\big(\mathbb{Z}_2^n, A\big)$, имеют одинаковые последние координаты, сумма весов циклических вершин соответствующей компоненты связности функционального графа системы $\big(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{A}\big)$ равна $\omega + ky_2\,\overline{\omega}_z$, если длина цикла равна k, и $2\omega + 2ky_2\,\overline{\omega}_z = 0$, если длина цикла равна $2k$. В то же время длина цикла равна k в двух

случаях: в первом случае $\omega_z = 0$, k нечётное и $y_2 = \omega$, т. е. $\omega + ky_2\,\overline{\omega}_z = 0$; а во втором случае $\omega = 0$ и либо $\omega_z = 1$, либо k чётное и опять получаем, что $\omega + ky_2\,\overline{\omega}_z = 0$. Теорема 2 доказана.

Следствие 5. *Вершина $x \in \mathbb{Z}_2^n$ функционального графа линейной дискретной динамической системы $\left(\mathbb{Z}_2^n, A\right)$ циклическая тогда и только тогда, когда вершина $(x, y_1, y_2)^T$, $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}_2$, является циклической функционального графа линейной дискретной динамической системы $\left(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{B}\right)$.*

Следствие 6. *В функциональном графе линейной дискретной динамической системы $\left(\mathbb{Z}_2^{n+2}, \widetilde{A}\right)$ сумма весов всех циклических вершин равна нулю для каждой компоненты связности.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Батуева Ц. Ч.-Д.** Дискретные динамические системы циркулянтного типа с пороговыми функциями в вершинах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 4. С. 25–32.
2. **Быков И. С.** Функционирование дискретной динамической системы циркулянтного типа с пороговыми функциями в вершинах // Прикл. дискрет. математика. 2014. № 4. С. 84—95.
3. **Гарбер А. И.** Графы линейных операторов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2008. Т. 263. С. 64–71.
4. **Гилл А.** Линейные последовательностные машины. М.: Наука, 1974. 288 с.
5. **Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А.** Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестн. ТГУ. 2005. № 14. С. 206–212.
6. **Евдокимов А. А., Пережогин А. Л.** Дискретные динамические системы циркулянтного типа с линейными функциями в вершинах сети // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 3. С. 39–48.
7. **Нажмиденова А. М., Пережогин А. Л.** Дискретная динамическая система на двойном циркулянте // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 4. С. 80–88.
8. **Arnold V. I.** Complexity of finite sequences of zeros and ones and geometry of finite spaces of functions // Funct. Anal. Other Math. 2006. Vol. 1, No. 1. P. 1–18.
9. **Elspas B.** The theory of autonomous linear sequential networks // IRE. Trans. Circuit Theory. 1959. Vol. CT-6. P. 45–60.
10. **Harary F.** The number of functional digraphs // Math. Ann. 1959. Vol. 139. P. 203–210.

11. **Hernández Toledo René A.** Linear finite dynamical systems // Commun. Algebra. 2005. Vol. 33, No. 9. P. 2977–2989.
12. **Lerner E. Yu.** Multiplicative function instead of logarithm (an elementary approach). 2007. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:0710.2088).

Парфиненко Анастасия Сергеевна,
Пережогин Алексей Львович

Статья поступила
19 декабря 2017

Исправленный вариант —
6 апреля 2018

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2018. Volume 25, No. 4. P. 81–96

UDC 519.174 DOI: 10.17377/daio.2018.25.604

THE FUNCTIONAL GRAPH OF A LINEAR DISCRETE DYNAMICAL SYSTEM WITH TWO DOMINATING VERTICES

A. S. Parfinenko[1,a] and *A. L. Perezhogin*[1,2,b]

[1]Novosibirsk State University,
1 Pirogov St., 630090 Novosibirsk, Russia,

[2]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: [a]anastasia.s.parfinenko@gmail.com, [b]pereal@math.nsc.ru

Abstract. The change of the functional graph of a linear discrete dynamical system is described under transformation of the support graph of the system. Namely, the support graph is transformed by adding two dominating vertices. Bibliogr. 12.

Keywords: discrete dynamical system, linear discrete dynamical systems, functional graph, state diagram, support graph, linear sequential network.

REFERENCES

1. **Ts. Ch.-D. Batueva,** Discrete dynamical systems with threshold functions at the vertices, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **21**, No. 4, 25–32, 2014.
2. **I. S. Bykov,** Functioning of discrete dynamic circulant-type system with threshold functions, *Prikl. Diskretn. Mat.,* No. 4, 84–95, 2014.
3. **A. I. Garber,** Graphs of linear operators, *Tr. Mat. Inst. Steklova,* **263**, 64–71, 2008. Translated in *Proc. Steklov Inst. Math.,* **263**, 57–64, 2008.
4. **A. Gill,** *Linear Sequential Circuits: Analysis, Synthesis, and Applications,* McGraw-Hill Book Co., New York, 1966. Translated under the title *Lineinye posledovatel'nostnye mashiny: Analiz, sintez i primenenie,* Nauka, Moscow, 1974.
5. **E. D. Grigorenko, A. A. Evdokimov, V. A. Likhoshvai,** and **I. A. Lobareva,** The fixed points and cycles of automatic mapping modeling the functioning of genetic networks, *Vestn. TGU,* No. 14, 206–212, 2005.
6. **A. A. Evdokimov** and **A. L. Perezhogin,** Discrete dynamical systems of a circulant type with linear functions at vertices of network, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **18**, No. 3, 39–48, 2011. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **6**, No. 2, 160–166, 2012.

7. **A. M. Nazhmidenova** and **A. L. Perezhogin,** A discrete dynamical system on a double circulant, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **21**, No. 4, 80–88, 2014.
8. **V. I. Arnold,** Complexity of finite sequences of zeros and ones and geometry of finite spaces of functions, *Funct. Anal. Other Math.,* **1**, No. 1, 1–18, 2006.
9. **B. Elspas** The theory of autonomous linear sequential networks, *IRE Trans. Circuit Theory,* **6**, No. 1, 45–60, 1959.
10. **F. Harary,** The number of functional digraphs, *Math. Ann.,* **139**, 203–210, 1959.
11. **René A. Hernández Toledo,** Linear finite dynamical systems, *Commun. Algebra,* **33**, No. 9, 2977–2989, 2005.
12. **E. Yu. Lerner,** Multiplicative function instead of logarithm (an elementary approach), 2007 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:0710.2088).

Anastasia S. Parfinenko,
Aleksey L. Perezhogin

Received
19 December 2017

Revised
6 April 2018