ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2018. Том 25, № 4. С. 46–58

УДК 519.716 DOI: 10.17377/daio.2018.25.605

РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРА ПОЗИТИВНОГО ЗАМЫКАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗОК [*)]

С. С. Марченков

Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, 119991 Москва, Россия

E-mail: ssmarchen@yandex.ru

Аннотация. Оператор позитивного замыкания определяется на основе логических формул, содержащих логические связки $\vee$, & и квантор $\exists$. Рассматриваются расширения оператора позитивного замыкания с помощью произвольных логических связок (не только бинарных). Устанавливается, что всякое собственное расширение оператора позитивного замыкания с помощью логических связок даёт либо оператор с полной системой логических связок, либо оператор импликативного замыкания (расширение с помощью связки импликации). Для оператора импликативного замыкания получено описание всех замкнутых классов в терминах полугрупп эндоморфизмов. Библиогр. 11.

Ключевые слова: оператор позитивного замыкания, оператор параметрического замыкания.

Введение

Операторы замыкания, рассматриваемые в теории функций многозначной логики, используются для формализации выразимости одних функций через другие и построения на этой основе классификации множества функций многозначной логики. Среди операторов замыкания наиболее известен и изучен оператор суперпозиции. Однако у этого оператора имеется один «недостаток»: при любом $k \geqslant 3$ оператор суперпозиции порождает континуальную классификацию множества P_k функций k-значной логики. Отчасти по этой причине вот уже более 40 лет различные авторы с использованием различных идей предлагают операторы замыкания, которые являются расширениями оператора суперпозиции

[*)] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16–01–00593).

и порождают конечные либо счётные классификации множеств P_k (так называемые сильные операторы замыкания).

Одним из первых операторов этого типа стал оператор параметрического замыкания, предложенный А. В. Кузнецовым [2] (несколько ранее понятие параметрической выразимости появилось в работе [1]). Параметрически замкнутые классы (в англоязычной литературе primitive positive clones) исследовались довольно интенсивно [6–11]. В частности, в [7] установлено, что при любом k число параметрически замкнутых классов в P_k конечно.

На основе оператора параметрического замыкания в [3] введён ещё один сильный оператор замыкания — оператор позитивного замыкания (на возможность введения данного оператора указано в работе [2]). При любом k все позитивно замкнутые классы в P_k полностью характеризуются своими полугруппами эндоморфизмов [4].

Вместе с тем, из операторов замыкания, получаемых из оператора позитивного замыкания добавлением в язык оператора новых логических связок, хорошо изучен оператор с полной системой логических связок [3] и начато изучение оператора с добавленной логической связкой импликацией [5]. Однако до сих пор не получен ответ на принципиальный вопрос: какие операторы замыкания можно получить из оператора позитивного замыкания с помощью внесения в язык оператора произвольных логических связок?

В данной работе мы даём ответ на этот вопрос. Мы показываем, что всякое собственное расширение оператора позитивного замыкания с помощью логических связок приводит к оператору с полной системой логических связок либо к оператору, образованному добавлением связки импликации (оператор импликативного замыкания). Для второго оператора в терминах полугрупп эндоморфизмов получено описание всех соответствующих замкнутых классов. В качестве следствия основного результата установлено, что всякое собственное расширение оператора параметрического замыкания с помощью логических связок ведёт либо к оператору позитивного замыкания, либо к одному из двух отмеченных выше операторов.

1. Основные понятия

Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, P_k — множество всех функций на E_k (множество функций k-значной логики). Если $n \geqslant 1$, то пусть $P_k^{(n)}$ обозначает множество всех функций из P_k, зависящих от n переменных. При любом $a \in E_k$ через T_a обозначим множество всех функций из P_k, сохраняющих a (т. е. множество всех функций f, удовлетворяющих равенству $f(a, \ldots, a) = a$).

Булевы функции отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и сумму по модулю 2 обозначаем соответственно через

$$\bar{x}, \quad x \cdot y, \quad x \vee y, \quad x \to y, \quad x \oplus y.$$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ и $g \in P_k^{(1)}$. Будем говорить, что g есть *эндоморфизм функции* f, если выполняется тождество

$$f(g(x_1), \ldots, g(x_n)) = g(f(x_1, \ldots, x_n)).$$

Если $Q \subseteq P_k$ и функция g является эндоморфизмом любой функции из Q, то говорим, что g есть *эндоморфизм множества функций* Q. Совокупность всех эндоморфизмов множества Q будем обозначать через $\mathrm{End}(Q)$ (в случае $Q = \{f\}$ — через $\mathrm{End}(f)$). Если эндоморфизм g функции f представляет собой перестановку на множестве E_k, то говорят, что g — *автоморфизм* функции f, а функция f является *самосопряжённой* относительно перестановки g. Множество всех функций из P_k, самосопряжённых относительно перестановки g (т. е. имеющих автоморфизм g), обозначим через S_g.

При любом $k \geqslant 2$ через p обозначим функцию на E_k, которая определяется соотношениями

$$p(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что любая перестановка на E_k является автоморфизмом функции p.

При определении операторов замыкания будем использовать технические и логические средства из [3–5]. Сначала дадим определение оператора параметрического замыкания. Зафиксируем число $k \geqslant 2$ и для класса P_k введём язык параметрического замыкания Par. Исходными символами языка Par являются предметные переменные $x_1, x_2, \ldots$ (с областью значений E_k), символы $f_i^{(n)}$ для обозначения n-местных функций из P_k ($1 \leqslant i \leqslant k^{k^n}$, $n = 1, 2, \ldots$), знак равенства $=$, знаки & и $\exists$, левая и правая скобки и запятая.

Обычным образом вводится понятия терма языка Par. Любая предметная переменная есть терм; если $t_1, \ldots, t_m$ — термы (в частности, любые предметные переменные), а $f_l^{(m)}$ — символ m-местной функции, то $f_l^{(m)}(t_1, \ldots, t_m)$ есть терм.

Всякий терм t языка Par очевидным образом определяет некоторую функцию g из P_k (переменная определяет тождественную функцию). Если $f_1, \dots, f_r$ — все символы функций, входящие в терм t, то говорим, что *терм t выражает функцию g через функции $f_1, \dots, f_r$*. Если t_1, t_2 — термы языка Par, то выражение $(t_1 = t_2)$ называем *элементарной формулой языка* Par. Из элементарных формул по обычным правилам определяем остальные формулы языка Par. Если Φ_1, Φ_2 — формулы языка Par, а x_i — предметная переменная, то $(\Phi_1 \mathbin{\&} \Phi_2), (\exists x_i)\Phi_1$ — также формулы языка Par.

Всякая формула языка Par с m свободными переменными определяет некоторое m-местное отношение на E_k. Пусть $Q \subseteq P_k, \Phi(x_1, \dots, x_m)$ — формула языка Par со свободными переменными $x_1, \dots, x_m$, все функциональные символы которой суть обозначения функций из Q, и формула $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ определяет отношение $\rho(x_1, \dots, x_m)$ на E_k. В этом случае говорим, что формула $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ *параметрически выражает* отношение $\rho(x_1, \dots, x_m)$ через функции множества Q. Отношение ρ называем *параметрически выразимым* через функции множества Q, если существует формула языка Par, которая параметрически выражает отношение ρ через функции множества Q. В дальнейшем для выделения некоторых символов предметных переменных будем использовать символы x, y, z, w, возможно, с индексами.

Понятие параметрической выразимости перенесём с отношений на функции. Именно, если $g(x_1, \dots, x_m)$ — функция из P_k, а формула $\Phi(x_1, \dots, x_m, y)$ языка Par параметрически выражает отношение $g(x_1, \dots, x_m) = y$ (график функции g) через функции множества Q, то говорим, что *формула Φ параметрически выражает функцию g через функции множества Q*. Совокупность всех функций, параметрически выразимых через функции множества Q, называем *параметрическим замыканием* множества Q. Параметрические замыкания множеств функций называем параметрически замкнутыми классами.

При определении других операторов замыкания добавляем к языку Par необходимые логические связки и вносим соответствующие изменения в определение формулы рассматриваемого языка. Так, язык Pos позитивного замыкания получается из языка Par добавлением знака $\vee$. При определении формул языка Pos появляется новый пункт: если Φ_1, Φ_2 — формулы языка Pos, то $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$ — также формула языка Pos.

Рассмотрим ещё четыре оператора замыкания, которые получаются из оператора параметрического замыкания внесением в язык дополнительной логической связки: отрицания $\neg$, импликации $\to$, разделительной дизъюнкции $\oplus_2$ и тернарной связки $\oplus_3$. Связки $\oplus_2$ и $\oplus_3$ выражаются через связки & и ¬ следующим образом:

$$\oplus_2(p, q) = (p \,\&\, \neg q) \vee (\neg p \,\&\, q), \quad \oplus_3(p, q, r) = \oplus_2(\oplus_2(p, q), r),$$

где, как обычно, $p \vee q = \neg(\neg p \,\&\, \neg q)$. Отметим, что язык со связками &, ¬ является языком с полной системой логических связок. О соответствующем операторе говорим как об операторе с полной системой логических связок. Оператор замыкания, отвечающий языку со связками &, →, называем *оператором импликативного замыкания.*

Обозначим через Π_k множество всех отношений на E_k. На множестве Π_k определим операции конъюнкции и проектирования. Пусть ρ_1 и ρ_2 — m- и n-местные отношения на E_k соответственно. *Конъюнкцией отношений* ρ_1, ρ_2 назовём $(m + n)$-местное отношение, определяемое формулой

$$\rho_1(x_1, \ldots, x_m) \,\&\, \rho_2(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}).$$

Проекцией отношения $\rho_1(x_1, \ldots, x_m)$ по переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, назовём $(m - 1)$-местное отношение, которое определяется формулой

$$(\exists x_i)\rho_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m),$$

где переменная x_i под квантором $\exists$ пробегает множество E_k. *Элементарной диагональю* назовём любое отношение вида $x_i = x_j$.

Пусть $R \subseteq \Pi_k$. *Замыканием множества* R будем называть наименьшее множество отношений из Π_k, которое содержит все элементарные диагонали, все отношения из R и замкнуто относительно операций конъюнкции, проектирования, а также перестановки, переименования и отождествления переменных.

При получении замыкания множества R естественным образом используем (&∃)-формулы, составленные из символов отношений из R, элементарных диагоналей, а также логических символов & и ∃. В связи с этим в дальнейшем говорим о (&∃)-формулах, определяющих рассматриваемые отношения через отношения множества R.

2. Результаты

Теорема 1. *Любое собственное расширение оператора позитивного замыкания с помощью логических связок даёт либо оператор с полной системой логических связок, либо импликативный оператор.*

Доказательство. Будем рассматривать расширения оператора позитивного замыкания с помощью любых логических связок (произвольных истинностных функций). Выделим сразу бесконечную серию логических связок, которые не приводят к собственным расширениям оператора позитивного замыкания: это, очевидно, все «позитивные» связки, т. е. связки, которые можно получить из связок & и $\vee$. Кроме того, как нетрудно заметить, этим свойством обладают также две тривиальные «связки»: тождественно истинная и тождественно ложная.

Если обратиться к обычно используемому соответствию между логическими связками и булевыми функциями, то исключённым из рассмотрения логическим связкам отвечают все монотонные булевы функции. Поэтому далее будем рассматривать в этом смысле лишь немонотонные связки.

Известно, что любая немонотонная булева функция вместе с функциями $x \cdot y$, $x \vee y$ порождает один из замкнутых классов P_2, T_0, T_1, T_{01}. Базисами этих замкнутых классов являются соответственно следующие системы функций:

$$\{x \cdot y, \bar{x}\}, \quad \{x\dot{y}, x \oplus y\}, \quad \{x \cdot y, x \to y\}, \quad \{x \cdot y, x \oplus y \oplus z\}.$$

Это означает, в частности, что суперпозициями функций $x \cdot y$, $x \vee y$ и произвольной немонотонной функции можно получить одну из функций $\bar{x}$, $x \oplus y$, $x \to y$, $x \oplus y \oplus z$. Логические связки, отвечающие этим булевым функциям, суть $\neg$, $\oplus_2$, $\to$, $\oplus_3$.

Понятно, что связки $\&, \neg$ дают оператор с полной системой связок. В [5] показано, что к такому же результату приводит система связок $\{\&, \oplus_2\}$. Покажем далее, что система связок $\{\&, \oplus_3\}$ даёт оператор импликативного замыкания.

В самом деле, несложно убедиться, что связка $\oplus_3$ выражается через связки $\&, \to$. Рассмотрим далее в классе T_{01} (его базис образуют функции $x \cdot y, x \oplus y \oplus z$) такую функцию $f(x, y, z)$, что $f(x, y, 1) = (x \to y)$. Пусть тернарная связка φ (порождаемая связками $\&, \oplus_3$) отвечает булевой функции f. Тогда вместо связки $\to$ можно использовать связку φ, если только вместо третьего аргумента этой связки подставить тождественно истинное высказывание $x = x$, а затем связать свободную предметную переменную x квантором $\exists$. Таким образом, в данном случае приходим к импликативному оператору. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Любое собственное расширение оператора параметрического замыкания с помощью логических связок даёт оператор позитивного замыкания либо является собственным расширением этого оператора.*

Доказательство. Как и в теореме 1, будем рассматривать расширения оператора параметрического замыкания с помощью логических связок, не выражающихся через связку & и тривиальные тождественно истинную и тождественно ложную связки. На языке булевых функций это означает, что рассматриваются булевы функции, которые не входят в класс K конъюнкций (функции 0, 1, $x \cdot y$ образуют базис класса K).

Используя диаграмму замкнутых классов булевых функций, заключаем, что всякий замкнутый класс, содержащий функцию $x \cdot y$ и какую-либо функцию, не входящую в класс K, обязательно включает функцию $(x \vee y) \cdot z$. Обозначим через ψ соответствующую тернарную связку. Поскольку подстановка константы 1 в функцию $(x \vee y) \cdot z$ вместо переменной z даёт функцию $x \vee y$, приходим к выводу, что вместо связки дизъюнкции можно использовать связку ψ, если только в качестве последнего аргумента этой связки взять тождественно истинное высказывание $x = x$, а затем связать переменную x квантором $\exists$. Таким образом, приходим к расширению (возможно, несобственному) оператора позитивного замыкания. Далее применяем теорему 1. Теорема 2 доказана.

Исследуем более подробно оператор импликативного замыкания. Заметим прежде всего, что любому импликативно замкнутому классу принадлежит тернарный дискриминатор $p(x, y, z)$. Это вытекает из эквивалентности

$$(w = p(x, y, z)) \equiv ((x = y) \to (w = z)) \mathbin{\&} ((x = y) \vee (w = x)).$$

Далее, как отмечалось, полугруппа эндоморфизмов дискриминатора p содержит все перестановки на E_k. Кроме того, нетрудно убедиться, что полугруппа эндоморфизмов функции p содержит ещё все функции-константы и исчерпывается перечисленными функциями. Отсюда следует [4], что любой позитивно замкнутый класс функций, содержащий дискриминатор p, имеет полугруппу эндоморфизмов, состоящую только из функций-перестановок и функций-констант. Поскольку оператор импликативного замыкания является расширением оператора позитивного замыкания, всякий импликативно замкнутый класс состоит, вообще говоря, из нескольких позитивно замкнутых классов. Следовательно, чтобы определить структуру импликативно замкнутых классов, необходимо исследовать позитивно замкнутые классы, содержащие дискриминатор p.

Теорема 3. *Любой позитивно замкнутый класс функций, содержащий дискриминатор p, является импликативно замкнутым.*

Доказательство. Пусть Q — произвольный позитивно замкнутый класс, включающий дискриминатор p. Как отмечено выше, полугруппа $\mathrm{End}(Q)$ эндоморфизмов класса Q состоит только из функций-перестановок и функций-констант. По определению множества $\mathrm{End}(Q)$ класс Q представляет собой пересечение позитивно замкнутых классов Q_g, определяемых эндоморфизмом g, по всем эндоморфизмам g из полугруппы $\mathrm{End}(Q)$. Если g является перестановкой, то Q_g есть множество всех функций, самосопряжённых относительно g (имеющих автоморфизм g). В [5] доказано, что в этом случае множество Q_g будет импликативно замкнутым классом. Если g — константа, то множество Q_g состоит из всех функций, сохраняющих данную константу. В [5] также показано, что множество Q_g будет импликативно замкнутым классом. Таким образом, класс Q представляет собой пересечение импликативно замкнутых классов и потому также является импликативно замкнутым классом. Теорема 3 доказана.

Для дальнейшего нам необходимо знать, может ли «групповая часть» полугруппы эндоморфизмов импликативно замкнутого класса, лежащего в P_k, быть произвольной подгруппой полной симметрической группы перестановок на E_k. Ответ на этот вопрос даёт

Теорема 4. *Пусть G — подмножество множества $P_k^{(1)}$, состоящее из перестановок на E_k и функций-констант и замкнутое относительно операции композиции. Тогда замыкание множества $\mathrm{Gr}(G)$, рассматриваемое для графиков одноместных функций, состоит из графиков всех функций из G и, быть может, графиков ещё некоторых функций-констант.*

Доказательство. Будет удобно записывать график $y = f(x)$ функции-константы $f(x) = a$ в виде $y \in \{a\}$, опуская несущественную переменную x (впоследствии её можно добавить в виде конъюнктивной формулы $x = x$). Кроме того, отметим, что отношения вида $y \in F$ для неодноэлементных множеств F в дальнейшем могут появиться в замыкании множества $\mathrm{Gr}(G)$ при рассмотрении, например, формул вида

$$(\exists x)((y = g_1(x)) \mathbin{\&} (y = g_2(x))),$$

где g_1, g_2 — перестановки из G. В связи с этим будем далее рассматривать $(\&\exists)$-формулы над G более общего вида, допуская в качестве элементарных подформул формулы $z \in F$ и $g_1(z_1) = g_2(z_2)$, где F — непустое подмножество множества E_k и g_1, g_2 — перестановки из G.

Покажем, как можно элиминировать квантор $\exists$ в формуле $(\exists z)\Phi(z, z_1, \ldots, z_m)$ подобного вида, где подформула $\Phi(z, z_1, \ldots, z_m)$ не содержит кванторов и каждый её конъюнктивный сомножитель содержит переменную z.

Отметим прежде всего, что если в формулу Φ конъюнктивно входят сомножители $z \in F_1$, $z \in F_2$, то их можно заменить одним множителем $z \in F$, где $F = F_1 \cap F_2$ (предполагаем, что $F \neq \varnothing$). Далее, равенство $g_1(z) = g_2(z_i)$ можно заменить эквивалентным равенством $z = g_1^{-1}(g_2(z_i))$, помня о том, что перестановка g_1^{-1}, обратная к перестановке g_1, также входит в множество G. Наконец, если в формулу Φ конъюнктивно входят равенства $z = g_1(z_i)$, $z = g_2(z_i)$, то их можно заменить конъюнкцией равенств $z = g_1(z_i)$, $g_1(z_i) = g_2(z_i)$, после чего равенство $g_1(z_i) = g_2(z_i)$, не содержащее переменной z, можно вынести из-под действия квантора $\exists z$.

Таким образом, проводя в формуле $(\exists z)\Phi(z, z_1, \ldots, z_m)$ обозначенные выше эквивалентные преобразования, получим в области действия квантора $\exists z$ формулу вида

$$(z \in F) \mathbin{\&} (z = g_1(z_1)) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} (z = g_m(z_m)).$$

Очевидно, что навешивание на эту формулу квантора $\exists z$ приведёт к эквивалентной формуле

$$\big(z_1 \in g_1^{-1}(F)\big) \mathbin{\&} \Big(\mathop{\&}_{1<i<m} (g_1(z_1) = g_i(z_i))\Big),$$

где $g_1^{-1}(F)$ — полный прообраз множества F при отображении g_1 (при $m = 1$ получим формулу $z_1 \in g_1^{-1}(F)$).

Итак, при приведении формулы $(\exists z)\Phi(z, z_1, \ldots, z_m)$ к бескванторному виду используются следующие преобразования частей формулы $\Phi(z, z_1, \ldots, z_m)$: пересечения множеств F, входящих в подформулы вида $z \in F$; композиция перестановок, входящих в множество G; образование новых множеств вида $g(F)$, где g — перестановка из G, а множество F либо входит в формулу Φ, либо получено на предыдущих этапах преобразования.

Если изначально в формулу $\Phi(z, z_1, \ldots, z_m)$ не входили равенства вида $z \in F$, то после исключения квантора существования получим формулу вида

$$\mathop{\&}_{1<i<m} (g_1(z_1) = g_i(z_i))$$

(при $m = 1$ придём к тождественно истинной формуле).

Из проведённых построений следует, что после элиминирования всех кванторов существования из произвольной формулы Φ над множеством G останутся лишь конъюнктивные сомножители вида $z \in F$

и $g_1(z_1) = g_2(z_2)$. Поэтому если формула Φ определяет график некоторой одноместной функции g, то g является либо перестановкой из G, либо константой. Теорема 4 доказана.

Опираясь на теоремы 3, 4, приведём список всех полугрупп эндоморфизмов, определяющих импликативно замкнутые классы в P_3. Перестановку g на E_3 записываем в виде вектора $(g(0)g(1)g(2))$, константы — посредством 0, 1, 2. Для сокращения записи во всех полугруппах, за исключением последней, опускаем тождественную перестановку (012).

$$\{(021), (102), (120), (201), (210), 0, 1, 2\}, \quad \{(120), (201), 0, 1, 2\},$$
$$\{(120), (201)\}, \quad \{(021), 0, 1, 2\}, \quad \{(021), 0\}, \quad \{(102), 0, 1, 2\},$$
$$\{(102), 2\}, \quad \{(210), 0, 1, 2\}, \quad \{(210), 1\}, \quad \{0, 1, 2\},$$
$$\{0, 1\}, \quad \{0, 2\}, \quad \{1, 2\}, \quad \{0\}, \quad \{1\}, \quad \{2\}, \quad \{(012)\}.$$

В приведённом списке с помощью полугрупп эндоморфизмов определены все 17 позитивно замкнутых классов трёхзначной логики, содержащих тернарный дискриминатор p.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Данильченко А. Ф.** О параметрической выразимости функций трёхзначной логики // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 397–416.
2. **Кузнецов А. В.** О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33.
3. **Марченков С. С.** О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискрет. математика. 1999. Т. 11, № 4. С. 110–126.
4. **Марченков С. С.** Задание позитивно замкнутых классов посредством полугрупп эндоморфизмов // Дискрет. математика. 2012. Т. 24, № 4. С. 19–26.
5. **Марченков С. С.** О расширениях оператора параметрического замыкания с помощью логических связок // Изв. вузов. Поволж. рег. Физ.-мат. науки. 2017. № 1. С. 22–31.
6. **Barris S.** Primitive positive clones which are endomorphism clones // Algebra Univers. 1987. Vol. 24. P. 41–49.
7. **Barris S., Willard R.** Finitely many primitive positive clones // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. Vol. 101, No. 3. P. 427–430.
8. **Danil'chenko A. F.** On parametrical expressibility of the functions of k-valued logic // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1981. Vol. 28. P. 147–159.
9. **Hermann M.** On Boolean primitive positive clones // Discrete Math. 2008. Vol. 308. P. 3151–3162.

10. **Snow J. W.** Generating primitive positive clones // Algebra Univers. 2000. Vol. 44. P. 169–185.
11. **Szabó L.** On the lattice of clones acting bicentrally // Acta Cybern. 1984. No. 6. P. 381–388.

Марченков Сергей Серафимович

Статья поступила
22 декабря 2017 г.
Исправленный вариант —
14 мая 2018 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2018. Volume 25, No. 4. P. 46–58

UDC 519.716 DOI: 10.17377/daio.2018.25.605

EXTENSIONS OF THE POSITIVE CLOSURE OPERATOR BY USING LOGICAL CONNECTIVES

S. S. Marchenkov

Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie gory, 119991 Moscow, Russia
E-mail: ssmarchen@yandex.ru

Abstract. The positive closure operator is defined on using the logical formulas containing the logical connectives $\vee$, & and the quantifier $\exists$. Extensions of the positive closure operator are considered by using arbitrary (and not necessarily binary) logical connectives. It is proved that each proper extension of the positive closure operator by using local connectives gives either an operator with a full system of logical connectives or an implication closure operator (extension by using logical implication). For the implication closure operator, the description of all closed classes is found in terms of endomorphism semigroups. Bibliogr. 11.

Keywords: positive closure operator, parametric closure operator.

REFERENCES

1. **A. F. Danil'chenko,** On parametric expressibility of three-valued logic functions, *Algebra Logika*, **16**, No. 4, 397–416, 1977 [Russian].
2. **A. V. Kuznetsov,** On the tools for detection of nondeducibility and nonexpressibility, *Logical Inference,* pp. 5–33, Nauka, Moscow, 1979 [Russian].
3. **S. S. Marchenkov,** On expressibility of functions of many-valued logic in some logical-functional languages, *Diskretn. Mat.,* **11**, No. 4, 110–126, 1999 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.*, **9**, No. 6, 563–581, 1999.
4. **S. S. Marchenkov,** Definition of positively closed classes by endomorphism semigroups, *Diskretn. Mat.,* **24**, No. 4, 19–26, 2012 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.*, **22**, No. 5–6, 511–520, 2012.
5. **S. S. Marchenkov,** On the extensions of parametric closure operator by means of logical connectives, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Povolzh. Reg., Fiz.-Mat. Nauki,* No. 1, 22–31, 2017 [Russian].
6. **S. Barris**, Primitive positive clones which are endomorphism clones, *Algebra Univers.,* **24**, 41–49, 1987.
7. **S. Barris** and **R. Willard,** Finitely many primitive positive clones, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **101**, No. 3, 427–430, 1987.

8. **A. F. Danil'chenko,** On parametrical expressibility of the functions of k-valued logic, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai,* **28**, 147–159, 1981.
9. **M. Hermann,** On Boolean primitive positive clones, *Discrete Math.,* **308**, 3151–3162, 2008.
10. **J. W. Snow,** Generating primitive positive clones, *Algebra Univers.,* **44**, 169–185, 2000.
11. **L. Szabó,** On the lattice of clones acting bicentrally, *Acta Cybern.,* No. 6, 381–388, 1984.

Sergey S. Marchenkov

Received
22 December 2017
Revised
14 May 2018